

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH NGHỆ AN
MÔN TOÁN 9 NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1.

- a) Cho a, b là các số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - b^2$ chia hết cho 24.
- b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để $9n^2 + 6n - 35$ là số nguyên tố.

Câu 2.

- a) Giải phương trình $3x + 1 = \sqrt{8x + 1} + \sqrt{2x - 1}$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 y^2 + 2xy + 1 = 7x + 9 \\ x(y - x) = 2 \end{cases}$$

Câu 3.

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + 3y + 2z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + z(z^2 - 8z + 17)$.

Câu 4.

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Trên cung BC không chứa điểm A lấy điểm M bất kì (M không trùng với B và C).

- a) Chứng minh $MA = MB + MC$.
- b) Gọi D là giao điểm của AM và BC . Chứng minh $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.
- c) Xác định vị trí của M để tổng: $\frac{12}{MA} + \frac{2}{MD} + 2023 \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5.

Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước $100\text{m} \times 120\text{m}$. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước $25\text{m} \times 35\text{m}$ và 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5m . Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước $25\text{m} \times 35\text{m}$ để xây sân bóng.

Lời giải.

Câu 1.

a)

$$+ \text{Do } \begin{cases} a \text{ không chia hết cho } 3 \\ b \text{ không chia hết cho } 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 : 3 \quad (1)$$

+ Do a không chia hết cho 2 $\Rightarrow \begin{cases} a-1 : 2 \\ a+1 : 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 1 : 8$, do $a-1$ và $a+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

+ Tương tự $b^2 - 1 : 8$

$$\text{Do đó } a^2 - b^2 = (a^2 - 1) - (b^2 - 1) : 8 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $a^2 - b^2 : 24$.

$$\text{b) Ta có } 9n^2 + 6n - 35 = (9n^2 + 6n + 1) - 36 = (3n+1)^2 - 36$$

$$= (3n+1-6)(3n+1+6) = (3n-5)(3n+7)$$

Lại có $3n-5 < 3n+7, \forall n$

Suy ra $9n^2 + 6n - 35$ là số nguyên tố thì $3n-5 = 1 \Leftrightarrow n=2$

Thử lại ta thấy $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2.

a) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 6x+2 = 2(\sqrt{8x+1} + \sqrt{2x-1}).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{8x+1} \\ b = \sqrt{2x-1} \end{cases} (a > 0, b \geq 0)$$

$$\Rightarrow 6x+2 = (8x+1) - (2x-1) = a^2 - b^2$$

$$\text{Phương trình trên trở thành: } a^2 - b^2 = 2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b-2) = 0 \Leftrightarrow a-b-2=0, \text{ do } a+b > 0$$

$$\text{Với } a-b=2 \Rightarrow \sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8x+1} = 2 + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 8x+1 = (2 + \sqrt{2x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ (3x-1)^2 = 4(2x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 14x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{9} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1, x = \frac{5}{9}$.

b) Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (xy+1)^2 = 7x+9 & (1) \\ xy = x^2+2 & (2) \end{cases}$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có: } (x^2+3)^2 = 7x+9 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 + 6x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Thay vào (2) ta thấy:

Khi $x = 0 \Rightarrow y = 3$ (không thỏa mãn).

Khi $x = 1 \Rightarrow y = 3$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (1; 3)$.

Câu 3.

Ta có: $x + 3y + 2z = 3 \Rightarrow x + 3y = 3 - 2z \Rightarrow 3 - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{3}{2}$

Lại có $\frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + 6 - 6 = \frac{x^2 + 9y^2 + 6xy + 6}{xy + 1} - 6 = \frac{(x + 3y)^2 + 6}{xy + 1} - 6$
 $\leq \frac{(3 - 2z)^2 + 6}{1} - 6, do \begin{cases} x + 3y = 3 - 2z \\ xy \geq 0 \end{cases}$

Khi đó, $P \leq (3 - 2z)^2 + z^3 - 8z^2 + 17z = z^3 - 4z^2 + 5z + 9$

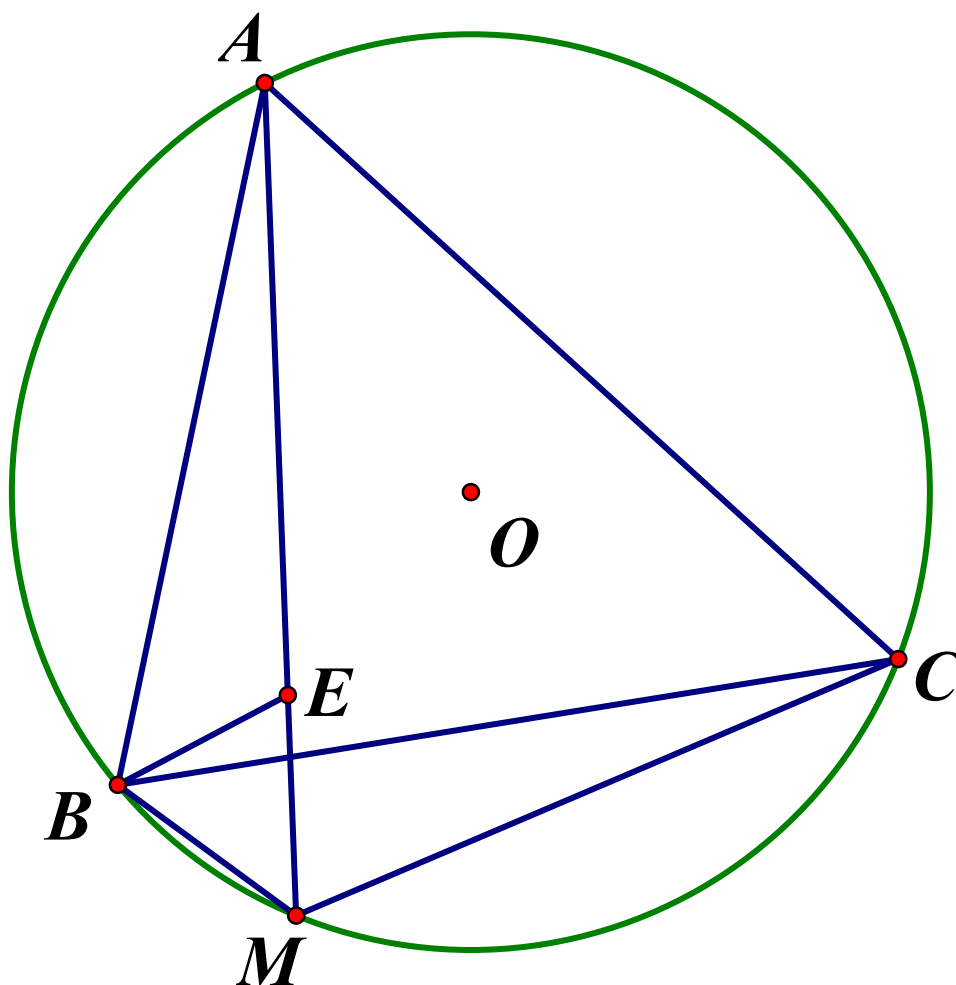
$\hookrightarrow (z^2 - 2z + 1)(z - 2) + 11 = 11 + (z - 1)^2(z - 2) \leq 11, do z - 2 < 0,$

$\forall 0 \leq z \leq \frac{3}{2}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z = 1$.

Vậy $\max P = 11 \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$ hoặc $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3}; 0; 1\right).$

Câu 4.



a) Chứng minh $MA = MB + MC$

Trên đoạn AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$.

Ta có: $\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$ (cùng chắn cung AB).

Suy ra $\triangle MBE$ là tam giác đều $\Rightarrow MB = BE$ (1)

Xét $\triangle EBA$ và $\triangle MBC$ có:

$MB = BE$; $AB = AC$, $\angle BCM = \angle BAE$ (cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow \triangle EBA = \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow EA = MC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $MB + MC = ME + EA = MA$.

b) Gọi D là giao điểm AM và BC. Chứng minh $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.

Ta có $\angle ADB = \angle CDM$ (đối đỉnh) và $\angle BAD = \angle DCM$ (cùng chắn cung BM)

$$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CMD (g.g) \Rightarrow \frac{MD}{CM} = \frac{BD}{AB} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự } \Delta ACD \sim \Delta BMD (g.g) \Rightarrow \frac{MD}{BM} = \frac{CD}{CA}$$

$$\text{Lại do } AC = AB \Rightarrow \frac{MD}{BM} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{AB} \quad (4)$$

$$\text{Cộng (3) và (4) về theo về ta có } \frac{MD}{CM} + \frac{MD}{BM} = \frac{BD}{AB} + \frac{CD}{AB} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

c) Xác định vị trí của M để tổng: $\frac{12}{MA} + \frac{2}{MD} + 2023 \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Từ câu b) } \frac{MD}{CM} + \frac{MD}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{1}{MD} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB+MC}$$

Dấu bằng xảy ra khi $MB = MC$ (5)

$$\text{Khi đó } \frac{12}{MA} + \frac{2}{MD} + 2023 \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right) = \frac{12}{MA} + 2 \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right) + 2023 \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right)$$

$$\geq \frac{12}{MA} + 2025 \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right)$$

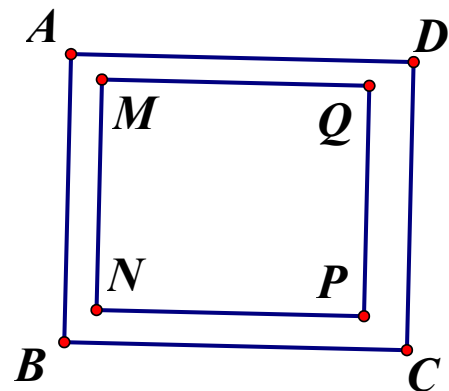
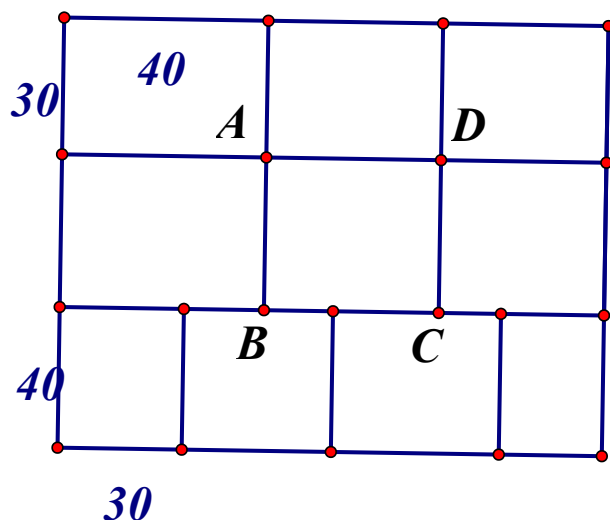
$$\geq \frac{12}{MA} + 2025 \frac{4}{MB+MC} = \frac{12}{MA} + 2025 \frac{4}{MA} \quad (\text{do kết quả câu a: } MB + MC = MA)$$

$$= \frac{8112}{MA} \geq \frac{8112}{2R} = \frac{4056}{R} \quad (\text{do } MA \leq 2R)$$

Dấu bằng xảy ra khi $MA = 2R \Rightarrow MB = MC$.

Câu 5.

Ta chia mảnh đất hình chữ nhật ban đầu thành các mảnh đất hình chữ nhật nhỏ kích thước 30m x 40m (như hình vẽ). Có tất cả 10 hình chữ nhật 30m x 40m.



Theo nguyên lí Dirichle tồn tại ít nhất một hình chữ nhật 30m x 40m không chứa tâm hình tròn nào trong 9 hình tròn nói trên. Giả sử đó là ABCD.

Ta cắt mỗi cạnh của mảnh đất ABCD này đi 2,5m được một mảnh đất mới MNPQ có:

$$\text{Chiều rộng } MN = 30 - 2 \cdot 2,5 = 25\text{m}$$

$$\text{Chiều dài } NP = 40 - 2 \cdot 2,5 = 35\text{m}$$

Suy ra MNPQ là mảnh đất đủ để xây sân bóng theo yêu cầu.

Như vậy trong phần đất còn lại sau khi xây 9 bồn hoa ta luôn tìm được mảnh đất có kích thước 25m x 35m để xây sân bóng.