

Bài 1. (4 điểm)

a) Giải phương trình : $(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43$

b) Cho phương trình: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$

Tìm giá trị m để phương trình vô nghiệm.

Bài 2. (2 điểm) Chứng minh rằng:

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ và $a + b + c = abc$ thì ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Bài 3. (2 điểm)

Cho $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng $S > \frac{7}{12}$

Bài 4. (4 điểm) Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

Bài 5. (6 điểm)

Câu 1. Cho tam giác ABC nhọn. Dựng ra phía ngoài hai tam giác đều $ABE; ACF$, lại dựng hình bình hành $AEPF$. Chứng minh rằng PBC là tam giác đều

Câu 2. Cho tam giác ABC có $BC = 15cm, AC = 20cm, AB = 25cm$.

a) Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC

b) Gọi CD là đường phân giác của $\triangle ACH$. Chứng minh $\triangle BCD$ cân

c) Chứng minh: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$

Bài 6. (2 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $(x^2 - 4x)^2 + 2.(x - 2)^2 = 43 \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x + 4) = 43$

Đặt $x^2 - 4x = t$. Điều kiện : $t \geq -4$. Khi đó ta có phương trình:

$$t^2 + 2t - 35 = 0 \Leftrightarrow (t + 7)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 (ktm) \\ t = 5 (tm) \end{cases}$$

Với $t = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy $S = \{5; -1\}$

b) ĐK của phương trình: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1} \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \neq 0 \Rightarrow x \neq m \\ x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

Từ (*) $\Rightarrow (x+2)(x-1) = (x+1)(x-m) \Rightarrow mx = 2 - m (**)$

Với $m = 0$ thì PT (**) có dạng $0x = 2 (VN)$

Với $m \neq 0$ thì PT (*) có nghiệm $x = \frac{2-m}{m}$

Nghiệm $x = \frac{2-m}{m}$ là nghiệm của PT (*) khi nó phải thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x \neq m \\ x \neq 1 \end{cases}$

Tức là: $\frac{2-m}{m} \neq 1 \Rightarrow 2 - m \neq m \Leftrightarrow m \neq 1$

$$\frac{2-m}{m} \neq m \Rightarrow m^2 + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Như vậy PT (*) vô nghiệm với các giá trị của $m \in \{-2; 0; 1\}$

Bài 2.

Theo giả thiết: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ nên $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) = 4$$

Vì $a+b+c=abc(gt) \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2(dfcm)$$

Bài 3.

Ta có: $A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right)$

Thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong từng nhóm ấy ta được

$$\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) > \frac{1}{150} \cdot 50 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \frac{1}{200} \cdot 50 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \frac{7}{12}$$

Bài 4.

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$

Ta có:

$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, 31 < k < m < 100 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$$

Do đó: $m^2 - k^2 = 1353$

$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123 \cdot 11 = 41 \cdot 33 \quad (k+m < 200)$$

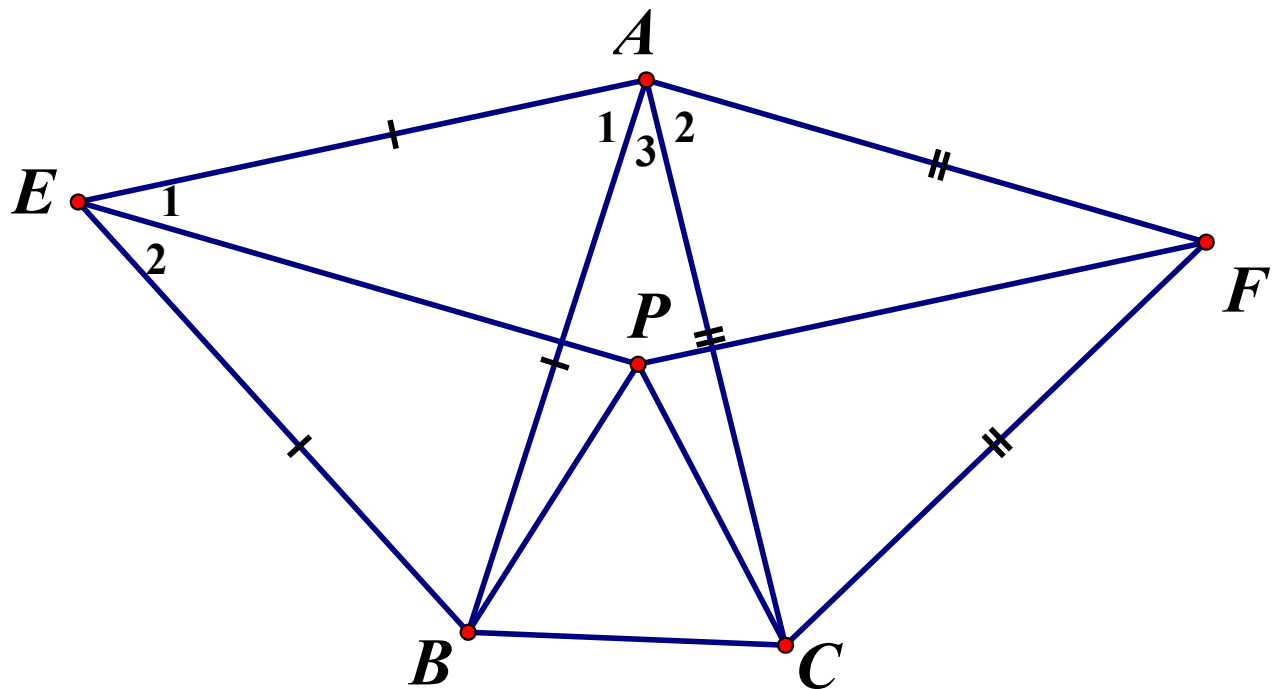
$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ m=57 \end{cases} (TM)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases} (KTM)$$

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 3136$

Bài 5.

Câu 1.



Ta có: $AEPF$ là hình bình hành nên $\angle AEP = \angle AFP$

Xét $\triangle EPB$ và $\triangle FPC$ có:

$$EB = FP (=AE); EP = FC (=AF); \angle PEB = \angle PFC (\text{vi } 60^\circ - \angle AEP = 60^\circ - \angle AFP)$$

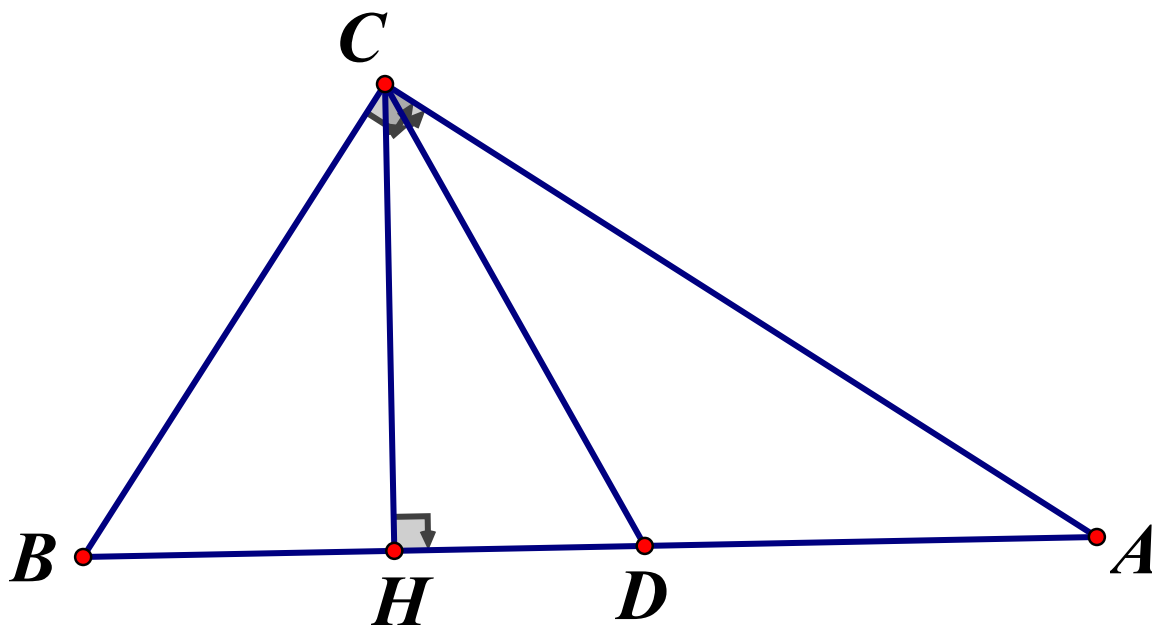
$$\Rightarrow \triangle EPB = \triangle FPC (c.g.c) \Rightarrow PB = PC \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \angle EAP + \angle AEP = 180^\circ \Rightarrow \angle A_3 + \angle E_1 = 60^\circ \text{ mà } \angle E_1 + \angle E_2 = 60^\circ \Rightarrow \angle A_3 = \angle E_2$$

$$\Rightarrow \triangle EPB = \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow PB = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $PB = PC = BC$. Vậy $\triangle PBC$ đều

Câu 2.



a) Dùng định lý Pytago đảo chứng minh được: $\triangle ABC$ vuông tại C

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ cm}$.

b) Dễ dàng tính được: $HA = 16 \text{ cm}, BH = 9 \text{ cm}$

CD là tia phân giác của $\triangle ACH$ nên suy ra $AD = 10 \text{ cm}, HD = 6 \text{ cm}$.

Do đó: $BC = BD (= 15 \text{ cm})$

Vậy $\triangle BDC$ cân tại B

c) Xét các $\triangle$ vuông: CBH, CAH

Ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 (\text{Pytago})$$

$$CD^2 = DH^2 + CH^2 (\text{Pytago})$$

$$BD^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 (\text{Pytago})$$

Từ đó suy ra $BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$

Bài 6.

Xét 2 số dương :

$$\text{Xét : } a^2 + b^2 \leq 1 + ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \leq (a+b) \quad (\text{Vi } a+b > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \leq a + b$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^3 + b^3) \leq (a+b)(a^5 + b^5) \quad (\text{Vi } a^3 + b^3 = a^5 + b^5)$$

$$\Leftrightarrow a^6 + 2a^3b^3 + b^6 \leq a^6 + ab^5 + a^5b + b^6$$

$$\Leftrightarrow 2a^3b^3 \leq ab^5 + a^5b$$

$$\Leftrightarrow ab(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \text{ đúng } \forall a, b > 0$$

Vậy : $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$ với a, b dương và $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$