

Câu 1. (3,0 điểm)

- a. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

- b. Tính tổng các chữ số của A , biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

Câu 2. (7,0 điểm)

- a. Tìm tất cả các bộ 3 số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $abc \mid ab+bc+ca$.
- b. Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-2} = \frac{2x^2+2x-2}{3x-1}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Trên đoạn BH lấy M sao cho $\widehat{AMC} = 90^\circ$, trên đoạn CH lấy N sao cho $\widehat{ANB} = 90^\circ$.

Chứng minh rằng:

- a. Tam giác $\triangle AMN$ cân

b. $S_{ABN} = \sqrt{S_{ABH} \cdot S_{ABC}}$

c. $\frac{EF}{BC} + \frac{DE}{AB} + \frac{DF}{AC} \leq \frac{3}{2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

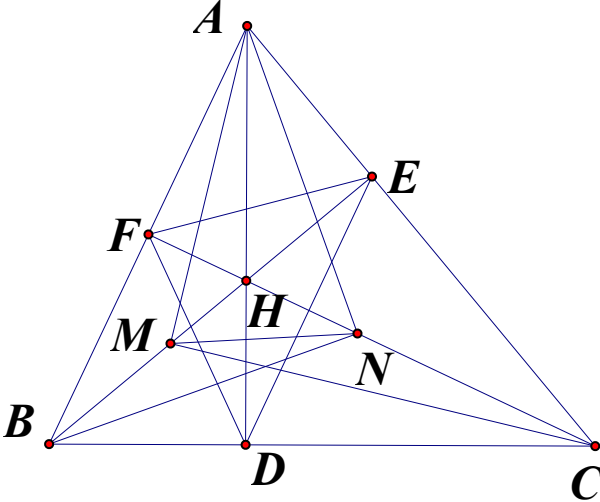
Trên mặt phẳng cho 2023 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Bất kỳ 3 điểm nào cũng là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không vượt quá 2024. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích 8096 chứa 2023 điểm đã cho.

-----**HẾT**-----

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Ý	Nội dung cần đạt	Điểm
1	a. 2đ	Ta có :($\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \Big)^2 = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2}{(a-b)(b-c)} + \frac{2}{(a-b)(c-a)} + \frac{2}{(b-c)(c-a)}$ $\stackrel{!}{=} \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2(a-b+b-c+c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ $\stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$ $\stackrel{!}{=} \left \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right \text{ là số hữu tỉ}$	0.5
			0.5
			0.5
	b. 1đ	Ta có: $A = \sqrt{A^2} - 16 + 16$ $\stackrel{!}{=} (\sqrt{A} + 4)(\sqrt{A} - 4) + 16 = (100\dots 0) \cdot (99\dots 92) + 16 = 99\dots 9200\dots 016$ $(100 \text{ chữ số } 9, 101 \text{ chữ số } 0)$ Tổng các chữ số của A là : $100.9 + 2 + 1 + 6 = 909$	0.25
			0.25
			0.25
2	a. 3đ	Giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3bc$ $\Rightarrow abc < 3bc$ $\Rightarrow a < 3, \text{ mà } a \text{ là số nguyên tố nên } a = 2.$ $\Rightarrow 2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b+c) \text{ vì } b \leq c \text{ nên } bc < 4c \Rightarrow b < 4.$ Nếu $b = 2 \Rightarrow 2c < 4 + 2c$ (luôn đúng) Nếu $b = 3 \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$. Vậy các bộ số $(2; 2; c), (2; 3; 3), (2; 3; 5)$ và các hoán vị với c là số nguyên tố tùy ý.	0.25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.5
			0.5
	b. 4đ	$\sqrt{3x-2} = \frac{2x^2+2x-2}{3x-1}$ ĐKXĐ: $x \geq \frac{2}{3}$ $2x^2+2x-2 - (3x-1)\sqrt{3x-2} = 0$ $3x-2 - (3x-1)\sqrt{3x-2} + 2x^2-x = 0$ $3x-2 - (3x-1)\sqrt{3x-2} + x(2x-1) = 0$ $(\sqrt{3x-2}-x)(\sqrt{3x-2}-2x+1) = 0$ $\sqrt{3x-2}-x=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ $\Rightarrow x=1(TM), x=2(TM)$ $\sqrt{3x-2}-2x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=2x-1 \Leftrightarrow 4x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=1(TM), x=3(TM)$ Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm	0.25
			0.25
			0.25
			0.5
			1.0
			1.0

		$X=1, x=2, x=\frac{3}{4}$	0.5
3	2.0đ	Chứng minh bài toán phụ: Với x, y là các số thực dương ta luôn có $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$ Dấu “=” xảy ra khi $x=y=1$. $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$ $\frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{1}{1+bc}$ $\frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{1}{1+ca}$	1.0
		$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \right)$ $\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{1+ab+1+bc+1+ca} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{6} = \frac{3}{4}$	0.25
		Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$	0.25
			0.25
			0.25
4			
	a. 2đ	Chứng minh: Tam giác $\triangle AMN$ cân Tam giác ABN vuông tại N, NF là đường cao nên $AN^2 = AF \cdot AB$ (1) Tam giác AMC vuông tại M, có đường cao ME nên $AM^2 = AE \cdot AC$ (2) Chứng minh được $AF \cdot AB = AE \cdot AC \quad (3)$ Từ (1), (2), (3) suy ra $AN^2 = AM^2 \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \text{Tam giác } AMN \text{ cân tại } A$	0.5
			0.5
			0.5
	b. 2đ	Chứng minh $S_{ABN} = \sqrt{S_{ABH} \cdot S_{ABC}}$ $S_{ABN} = \frac{1}{2} NF \cdot AB \quad (1)$ $\sqrt{S_{ABH} \cdot S_{ABC}} = \sqrt{\frac{1}{2} HF \cdot AB \cdot \frac{1}{2} CF \cdot AB}$ $= \frac{1}{2} \sqrt{HF \cdot CF} \cdot AB \quad (2)$ Chứng minh được $HF \cdot CF = AF \cdot FB$ (3) Chứng minh được $NF^2 = AF \cdot FB$ (4)	0.5
			0.5
			0.5

		Từ (1), (2), (3), (4) ta được $S_{ABN} = \sqrt{S_{ABH} \cdot S_{ABC}}$	0.5
	c. 2đ	Chứng minh $\frac{EF}{BC} + \frac{DE}{AB} + \frac{DF}{AC} \leq \frac{3}{2}$ Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC nên $\frac{EF}{BC} = \sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE}{AC} + \frac{AF}{AB} \right)$ Tương tự: $\frac{DE}{AB} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{CD}{BC} + \frac{CE}{AC} \right)$ $\frac{DF}{AC} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{BD}{BC} + \frac{BF}{AB} \right)$ $\frac{EF}{BC} + \frac{DE}{AB} + \frac{DF}{AC} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE}{AC} + \frac{AF}{AB} + \frac{CD}{BC} + \frac{CE}{AC} + \frac{BD}{BC} + \frac{BF}{AB} \right) = \frac{3}{2}$ Dấu “=” khi tam giác ABC đều.	0.5 0.5 0.25 0.25
5	2đ	Do số tam giác là hữu hạn nên tồn tại một tam giác trong số các tam giác tạo thành có diện tích lớn nhất. Gọi tam giác đó là ΔABC, $\Rightarrow S_{ABC} \leq 2024$. Qua các đỉnh của tam giác ABC vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chúng cắt nhau tại M, N, P. Vì $S_{ABC} \leq 2024 \Rightarrow S_{MNP} \leq 8096$ Ta chứng minh được tam giác MNP chứa 2023 điểm đã cho. Thật vậy, giả sử có điểm D trong 2023 điểm đã cho nằm ngoài tam giác MNP (h. vẽ) Khi đó $S_{DBC} > S_{ABC}$ (trái với giả thiết tam giác ABC có diện tích lớn nhất). Vậy tồn tại một tam giác có diện tích 8096 chứa 2023	0.5 0.5 0.5 0.5

		điểm đã cho.	
--	--	--------------	--

----- Hết -----