

CHUYÊN ĐỀ 3: PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ

Chủ đề 2: Dùng các dấu hiệu để chứng minh bài toán chia hết

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép chia hết

Với a, b là số TN và b khác 0. Ta nói a chia hết b nếu tồn tại số TN q sao cho $a = b.q$

2. Tính chất chung

- 1) $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$
- 2) $a : a$ với mọi a khác 0
- 3) $0 : b$ với mọi b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

3. Tính chất chia hết của tổng, hiệu

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m .
- Tổng của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

4. Tính chất chia hết của 1 tích

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m .
- Nếu a chia hết cho m, b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$.
- Nếu a chia hết cho b thì: $a^n : b^n$

*) *Chú ý:*

$$a^n - b^n : (a - b) \forall n \geq 2$$

$$a^n - b^n : (a + b) \forall n \text{ chẵn}$$

5. Dấu hiệu chia hết

- a) Dấu hiệu chia hết cho 2: Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.
- b) Dấu hiệu chia hết cho 3 (hoặc 9)
 - Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ của số đó chia hết cho 3 (hoặc 9).
 - Chú ý: Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của nó chia cho 3 (hoặc 9) cũng dư bấy nhiêu và ngược lại.
- c) Dấu hiệu chia hết cho 5
 - Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số của số đó có tận cùng bằng 0 hoặc 5.
- d) Dấu hiệu chia hết cho 4 (hoặc 25)
 - Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 4 (hoặc 25).
- e) Dấu hiệu chia hết cho 8 (hoặc 125)
 - Một số chia hết cho 8 (hoặc 125) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8 (hoặc 125).
- f) Dấu hiệu chia hết cho 11

- Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho 11.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI TOÁN CHIA HẾT

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số

I. Phương pháp giải: Chứng minh biểu thức A chia hết cho số m.

- Viết biểu thức A thành một tổng (hiệu) các số trong đó mỗi số đều chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m.
- Viết biểu thức A thành một tích các thừa số trong đó có thừa số chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m.
- Viết m thành một tích các thừa số nguyên tố cùng nhau và chỉ ra biểu thức A chia hết cho các thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m.
- Viết biểu thức A và m thành một tích các thừa số và chỉ ra mỗi thừa số của A chia hết cho một thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m.
- Viết A thành một tổng hoặc hiệu các số mà có tổng hoặc hiệu các số dư chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m.

Cụ thể ta có thể vận dụng các PHƯƠNG PHÁP sau:

+ PHƯƠNG PHÁP 1: Nếu số A là một số cụ thể ta vận dụng dấu hiệu chia hết 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 9 ; 11 ; ... để chứng minh.

+ PHƯƠNG PHÁP 2: Nếu số A có tổng hoặc hiệu các số, ta cần phân tích số A để đưa số A về hoặc hiệu hoặc tích của các số có dấu hiệu chia hết rồi áp dụng tính chất chia hết của tổng (hiệu) hoặc tích để chứng minh.

+ PHƯƠNG PHÁP 3: Để chứng minh A chia hết cho p, ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A cho p.

+ PHƯƠNG PHÁP 4: Ngoài ra ta cũng có thể dùng cách tìm chữ số tận cùng của A để chứng minh A chia hết cho một số.

+ PHƯƠNG PHÁP 5: Nếu $A : m$ và $A : n$, đồng thời m và n là hai số nguyên tố cùng nhau thì A chia hết cho tích m.n

II. Bài toán

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ sao cho

a) $\overline{34x5y} : 36$

b) $\overline{423x7y} : 45$

c) $\overline{1x8y2} : 36 \Leftrightarrow : 4, 9$

d) $\overline{21xy} : 60$

Lời giải:

a) Ta có $\overline{34x5y} : 36 \Leftrightarrow : 4, 9$

$$\Rightarrow \overline{5y} : 4 \Leftrightarrow y \in \{2; 6\} \Rightarrow x \in \{4; 0; 9\}$$

Vậy các cặp số $(x; y) = (4; 2); (0; 6); (9; 6)$

b) Ta có $\overline{423x7y} : 45 \Leftrightarrow ;5,9$

$$\Rightarrow y \in \{0; 5\} \Rightarrow x \in \{2; 6\}$$

c) Ta có $\overline{1x8y2} : 36 \Leftrightarrow ;4,9$

$$\Rightarrow \overline{y2} : 4 \Rightarrow y \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow x \in \{6; 4; 2; 0; 9; 7\}$$

$\Rightarrow$ có 6 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán

d) Ta có $\overline{21xy} : 60$ hay $2100 + \overline{xy} : 60$

$$\Rightarrow \overline{xy} = 00; \overline{xy} = 60$$

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp trong đó có một số chia hết cho 9, biết rằng tổng của hai số đó thỏa mãn các điều kiện sau

- Là số có ba chữ số
- Là số chia hết cho 5
- Tổng của chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị là số chia hết cho 9
- Tổng của chữ số hàng trăm và chữ số hàng chục là số chia hết cho 4

Lời giải:

Tổng của hai số tự nhiên chia hết cho 5 nên tận cùng là 5

Mà tổng của chữ số hàng trăm và hàng đơn vị bằng 9 nên chữ số hàng trăm phải bằng 4

Vậy tổng hai số tự nhiên có dạng: $\overline{4a5}$

$$\text{Mà } a + 4 : 4 \Rightarrow a \in \{0; 4; 8\}$$

Tổng của hai số đó là: $405 = 202 + 203; 445 = 222 + 333; 485 = 242 + 243$

Bài 3: Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{a56b} : 45$

Lời giải:

Ta thấy $45 = 5.9$ mà $(5; 9) = 1$

$$\text{để } \overline{a56b} : 45 \Leftrightarrow \overline{a56b} : 5; 9$$

$$\overline{a56b} : 5 \Leftrightarrow b \in \{0; 5\}$$

Xét

Nếu $b = 0$ ta có số $\overline{a56b} : 9$

$$\Leftrightarrow (a + 5 + 6 + 0) : 9$$

$$\Leftrightarrow (a+11):9 \Leftrightarrow a=7$$

Nếu $b=5$ ta có số $\overline{a56b} : 9$

$$\Leftrightarrow (a+5+6+5):9$$

$$\Leftrightarrow (a+16):9 \Leftrightarrow a=2$$

Vậy: $a=7$ và $b=0$ ta có số 7560

$a=2$ và $b=5$ ta có số 2560

Bài 4: Biết tổng các chữ số của 1 số là không đổi khi nhân số đó với 5. Chứng minh rằng số đó chia hết cho 9.

Lời giải:

Gọi số đã cho là a

Ta có: a và $5a$ khi chia cho 9 cùng có 1 số dư

$$\Leftrightarrow (5a - a):9$$

$$\Leftrightarrow 4a : 9$$

$$\Leftrightarrow a : 9$$

Vậy $a : 9$

$$\overline{111111111} : 81 \text{ sè } 1$$

Bài 5: CMR số

Lời giải:

Ta thấy: $\overline{111111111} : 9$

$$\overline{111111111} = 111111111(10^{72} + 10^{63} + \dots + 10^9 + 1)$$

Có

$$(10^{72} + 10^{63} + \dots + 10^9 + 1)$$

Mà tổng có tổng các chữ số bằng 9 : 9

$$\Rightarrow (10^{72} + 10^{63} + \dots + 10^9 + 1):9$$

$$\overline{111111111} : 81 \text{ sè } 1$$

Vậy:

Bài 6: Tìm các chữ số x, y sao cho

a. $\overline{34x5y} : 4; 9$

b. $\overline{2x78} : 17$

Lời giải:

a) Để $\overline{34x5y} : 4 \Leftrightarrow \overline{5y} : 4 \Leftrightarrow y \in \{2, 6\}$

Nếu $y = 2$ ta có số $\overline{34x5y} : 9$

$$\Leftrightarrow (3 + 4 + 2 + 5 + x) : 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 14) : 9 \Leftrightarrow x = 4$$

Nếu $y = 6$ ta có số $\overline{34x5y} : 9$

$$\Leftrightarrow (x + 5 + 6 + 6) : 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 17) : 9 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy: $x = 1$ và $y = 6$ ta có số 34156

$x = 4$ và $y = 2$ ta có số 34452

b) $\overline{2x78} = 17(122 + 6x) + 2(2-x) : 17 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 7: Cho số $N = \overline{dcba}$ CMR

a. $N : 4 \Rightarrow (a + 2b) : 4$

b. $N : 16 \Rightarrow (a + 2b + 4c + 8d) : 16$ với b chẵn

c. $N : 29 \Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) : 29$

Lời giải:

a. Ta có:

$$N : 4 \Leftrightarrow \overline{ba} : 4 \Leftrightarrow (10b + a) : 4$$

$$\Leftrightarrow 8b + (2b + a) : 4 \Rightarrow (2b + a) : 4$$

b. $N : 16 \Leftrightarrow 1000d + 100c + 10b + a : 16$

$$\Leftrightarrow (992d + 96c + 8b) + (8d + 4c + 2b + a) : 16$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b + 4c + 8d) : 16$$

với b chẵn

c. Ta có:

$$100(d + 3c + 9b + 27a) - \overline{dbca} : 29$$

$$(1000; 29) = 1; \overline{dbca} : 29 \Rightarrow (d + 3c + 9b + 27a) : 29$$

Bài 8: Tìm tất cả các số có 2 chữ số sao cho mỗi số gấp 2 lần tích các chữ số của số đó.

Lời giải:

Gọi $\overline{ab}$ là số có 2 chữ số

Theo bài ra ta có:

$$\overline{ab} = 10a + b = 2ab(1)$$

$$\overline{ab} : 2 \Rightarrow b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$$

Thay vào (1) $a = 3; b = 6$

Bài 9: Viết liên tiếp tất cả các số có 2 chữ số từ 19 đến 80 ta được số $A = 192021...7980$. Hỏi số A có chia hết cho 1980 không? Vì sao?

Lời giải:

Có $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

Vì 2 chữ số tận cùng của A là $80 : 4$ và 5

$$\Rightarrow A : 4; 5$$

Tổng các số hàng lẻ $1 + (2 + 3 + \dots + 7) \cdot 10 + 8 = 279$

Tổng các số hàng chẵn $9 + (0 + 1 + \dots + 9) \cdot 6 + 0 = 279$

Có $279 + 279 = 558 : 9 \Rightarrow A : 9$

$$279 - 279 = 0 : 11 \Rightarrow A : 11$$

Bài 10: Tổng của 46 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 46 không? Vì sao?

Lời giải:

Có 46 số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow$ có 23 cặp số mỗi cặp có tổng là 1 số lẻ

$\Rightarrow$ tổng 23 cặp không chia hết cho 2.

Vậy tổng của 46 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 46.

$$\begin{array}{cc} \overline{11} & \overline{22} \\ \downarrow & \downarrow \\ 100 \text{ sè } 1 & 100 \text{ sè } 2 \end{array}$$

Bài 11: Chứng tỏ rằng số $\overline{11} \overline{22} \dots \overline{99}$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải:

Có $\overline{11} \overline{22} \dots \overline{99} = \overline{11} \overline{22} \dots \overline{99} \cdot \overline{100} \dots \overline{02} : 100$

$$\overline{100 \dots 02} = 3 \cdot \overline{33 \dots 34}$$

Mà $\overline{100 \dots 02} \equiv 2 \pmod{99}$ và $\overline{33 \dots 34} \equiv 3 \pmod{99}$

$$\Rightarrow \overline{11 \dots 11} \equiv 1 \pmod{100}, \overline{22 \dots 22} \equiv 2 \pmod{100}, \overline{33 \dots 33} \equiv 3 \pmod{100}, \overline{33 \dots 34} \equiv 3 \pmod{99} \quad (\text{Đpcm})$$

Dạng 2: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức.

I. Phương pháp giải:

- Biến đổi biểu thức bị chia thành tích của các biểu thức nhỏ trong đó có biểu thức chia hết cho biểu thức chia.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Chứng minh rằng $10^n + 2^3 \vdots 9$

b) $10^n + 26 \vdots 18$

c) $9^{2n+1} + 1 \vdots 10$

Lời giải:

a) Ta có: $10^n + 2^3 \vdots 9$ có tổng các chữ số = 9 nên chia hết cho 9

b) Ta có $10^n + 26 = \overline{100 \dots 026}$ (n-2 chữ số 0) có tổng các chữ số = 9 nên chia hết cho 9 và là số chẵn nên chia hết cho 2. Vậy chia hết cho 18

c) Ta có $9^{2n+1} + 1$ có tận cùng là 0 suy ra chia hết cho 10.

Vì 9^{2n+1} tận cùng là 9 do $2n+1$ lẻ.

Bài 2: Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $A = (2^{10} + 1)^{11} \vdots 25$

b) $B = 39^{1001} + 21^{1000} \vdots 10$

Lời giải:

Ta có $A = (2^{10} + 1)^{11} = 1025^{11} \vdots 25$

Bài 4: Giả sử S(a) là tổng các chữ số của số tự nhiên a. Chứng minh rằng

a) $a - S(a) \vdots 9$

b) Nếu $S(a) = S(2a)$ thì a chia hết cho 9, điều ngược lại có đúng không?

Lời giải:

a) Đặt $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \rightarrow S(a) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$

$$\Rightarrow a - S(a) = a_n \cdot \underbrace{(10^n - 1)}_{\vdots (10-1)} + a_{n-1} \cdot \underbrace{(10^{n-1} - 1)}_{\vdots (10-1)} + \dots + \underbrace{9a_1}_{\vdots 9}$$

$$\Rightarrow a - S(a) : 9$$

b. $S(a) = S(2a)$

$$\Rightarrow a = \left[\underbrace{2a}_{:9} - \underbrace{S(2a)}_{:9} \right] - \left[\underbrace{a}_{:9} - \underbrace{S(a)}_{:9} \right]$$

$$\Rightarrow a : 9$$

Ví dụ: $a = 18 \Rightarrow S(a) = 9$

$$\Rightarrow a - S(a) = 9 : 9 ; 2a = 36$$

$$\Rightarrow S(2a) = 9$$

Bài 5: Số tự nhiên a có 26 chữ số, người ta đổi chỗ các chữ số của A để được 1 số B lớn gấp 3 lần số A. Chứng minh rằng $B : 27$

Lời giải:

$$B = 3A \Rightarrow B : 3 \Rightarrow S(A) : 3 \Rightarrow S(A) : 3 \Rightarrow A : 3$$

Mà $\left. \begin{array}{l} B = 3A \\ A : 3 \end{array} \right\} \Rightarrow B : 9 \Rightarrow S(B) : 9 \Rightarrow S(A) : 9 \Rightarrow A : 9$

Và $\left. \begin{array}{l} B = 3A \\ A : 9 \end{array} \right\} \Rightarrow B : 27 \Rightarrow$
đpcm.

Bài 6: Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 99 ta được số A. Số A có chia hết cho 99 không?

Lời giải:

Ta có 90 số thảo mãn bài toán: 10, 11, ..., 99

Tổng các chữ số hàng đơn vị là: $(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot 9 = 45 \cdot 9 = 405$

Tổng các chữ số hàng chục là: $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot 10 = 45 \cdot 10 = 450$

Tổng các chữ số của A là: $405 + 450 = 855 : 9 \Rightarrow A : 9$

Bài 7: Chứng minh với mọi n là STN lẻ thì số $A = n^2 + 4n + 5 : 8$

Lời giải:

Vì n lẻ, ta đặt $n = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow A = (2k + 1)^2 + 4(2k + 1) + 5$$

$$= 4k(k + 1) + 8(k + 1) + 2$$

- Ta có k và $k + 1$ là hai số TN liên tiếp có một số chẵn nên $4k(k + 1) : 8$

Lại có $8(k+1) : 8; 2 \nmid 8 \Rightarrow A$ chia 8 dư 2.

Dạng 3: Cho một biểu thức chia hết cho m chứng minh một biểu thức khác chia hết cho m.

I. Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất: $A : C; B : C \Rightarrow pA + qB : C$ từ đó tìm giá trị p và q thích hợp.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh $(495a + 1035b) : 45$ với mọi a, b là số tự nhiên.

Lời giải:

Vì $495 : 9$ nên $1980.a : 9$ với mọi a.

Vì $1035 : 9$ nên $1035.b : 9$ với mọi b.

Nên: $(495a + 1035b) : 9$

Chứng minh tương tự ta có: $(495a + 1035b) : 5$ với mọi a, b.

Mà $(9; 5) = 1 \Rightarrow (495a + 1035b) : 45$ với mọi a, b là số tự nhiên.

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $\overline{ab + cd} : 11$ thì $\overline{abcd} : 11$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{ab + cd} = a.10 + b + 10c + d$

$$= (a + c)10 + b + d$$

$$= \overline{(a + c)(b + d)} : 11$$

hay $(a + c) - (b + d) : 11$

Khi đó $\overline{abcd} : 11$ vì có $(a + c) - (b + d) : 11$

Bài 3: Chứng minh rằng:

a, CMR: $\overline{ab} = 2.\overline{cd} \rightarrow \overline{abcd} : 67$

b, Cho $\overline{abc} : 27$ cmr $\overline{bca} : 27$

Lời giải:

a, Ta có: $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$

$$= 200\overline{cd} + \overline{cd}$$

$$= 201\overline{cd} : 67$$

b, Ta có : $\overline{abc};27 \Rightarrow \overline{abc0};27$

$$\Rightarrow 1000a + \overline{bc0};27$$

$$\Rightarrow 999a + a + \overline{bc0};27$$

$$\Rightarrow 27.37a + \overline{bca};27$$

Nên $\overline{bca};27$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg});11$ thì $\overline{abcdeg};11$

b, Nếu $\overline{abc} + \overline{deg};37$ thì $\overline{abcdeg};37$

c, Nếu $\overline{abcd};99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd};99$

Lời giải:

a, Ta có : $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg}$

$$= 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg});11$$

b, Ta có : $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg}$

$$= 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg});37$$

c, Ta có : $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd}$

$$= 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd});99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd};99$$

Câu 5: Chứng minh rằng: với $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right];7$$

Lời giải

Ta có: $A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right]$

$$= n \left[n(n^2 - 7) - 6 \right] \left[n(n^2 - 7) + 6 \right]$$

$$= n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6)$$

$$= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6)$$

$$\begin{aligned}
&= n \left[(n^2 - 1) - 6(n+1) \right] \left[n(n^2 - 1) - 6(n-1) \right] \\
&= n(n+1)(n^2 - n - 6)(n-1)(n^2 + n - 6) \\
&= n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)
\end{aligned}$$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A \div 7 \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 6: Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

Ta có:

$$2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots)$$

Vì chia hết cho 2010 (1)

$$2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots)$$

Vì chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 7

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Lời giải

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b) \left[(a + b)^2 - 3ab \right]$$

Ta có:

$$\text{Vì } a + b \text{ chia hết cho 3 nên } (a + b)^2 - 3ab \text{ chia hết cho 3.}$$

$$\text{Do vậy, } (a + b) \left[(a + b)^2 - 3ab \right] \text{ chia hết cho 9}$$

b) Ta có:

$$n^5 + 1 \div (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) \div (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \div (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) \div (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \div n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) \div n^2 - n + 1$$

$$\text{Hay } n^2 - n \div n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 \div (n^2 - n + 1)$$

$$\Rightarrow 1; n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$TH1: n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$TH2: n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 8: Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ta có:

$$= (a + b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab]$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

Câu 9: Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n - 1)(n + 1) + 18n$$

Vì $n(n - 1)(n + 1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2, 3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 10: Chứng minh rằng:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \text{ chia hết cho } 40.$$

Lời giải

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$$

$$= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40$$

$$= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8)40$$

Vậy $A : 40$

Câu 11:

a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

a) Ta phải chứng minh $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$A = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

$$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

$$= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9$$

$$= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1)$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

b) $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n}$

$$= 5^n (59 - 8) + 8 \cdot 64^n$$

$$= 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n)$$

Vì $59 \cdot 5^n : 59$ và $8 \cdot (64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 12: Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11}$

$$= 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$$

chia hết cho 17

b) Ta có:

$$19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$$

$$= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$$

chia hết cho 44

Câu 13: Chứng minh rằng $a^5 - a \vdots 30 (a \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^4 - 1) \\ &= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) \\ &= a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5] \\ &= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1) \end{aligned}$$

Do tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) \vdots 30$ và $5a(a+1)(a-1) \vdots 30$.

Vậy $a^5 - a \vdots 30$

Câu 14: Cho a, b là hai số tự nhiên. Biết rằng a chia cho 5 dư 3 và b chia cho 5 dư 2. Hỏi tích $a.b$ chia cho 5 dư bao nhiêu ?

Lời giải

a chia cho 5 dư 3 nên tồn tại số tự nhiên m sao cho $a = 5m + 3$ (1)

b chia cho 5 dư 2 nên tồn tại số tự nhiên n sao cho $b = 5n + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a.b = (5m + 3).(5n + 2) = 5(5mn + 2m + 3n + 1) + 1$

Suy ra $a.b$ chia cho 5 dư 1.

Câu 15: Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

Lời giải

HD: Xét hiệu: $S - P$

Chứng minh: $a^3 - a = (a-1)a(a+1) \vdots 6$ với mọi số nguyên a .

Sau đó sử dụng tính chất chia hết của một tổng suy ra đpcm.

Câu 16: Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45

Lời giải

Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45.

HD: Đặt $M = 21^{30} + 39^{21}$

Nhận xét $45 = 5 \cdot 9$ mà 5 và 9 là hai số nguyên tố cùng nhau (1)

Vậy để c/m $M : 45$ ta cần c/m $M : 5$ và $M : 9$

$$M = 21^{30} + 39^{21} = (21^{30} - 1^{30}) + (39^{21} - (-1)) : 5 \quad (2)$$

$$(21^{30} - 1^{30}) : (21 - 1) : 5 \quad (39^{21} - (-1)) : (39 - (-1)) : 5$$

(Vi và)

$$\text{Mặt khác, } 21 : 3 \Rightarrow 21^{30} : 9 \quad \text{và} \quad 39 : 3 \Rightarrow 39^{21} : 9. \text{ Do đó, } M : 9 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm.

$$(a^n - b^n) : (a - b)$$

* Chú ý:

Câu 17: Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

Lời giải

Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

Ta có:

$$B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24 = n^3 - n + 6n^2 - 18n - 24$$

$$= n(n^2 - 1) + 6(n^2 - 3n - 4)$$

$$= (n - 1)n(n + 1) + 6(n^2 - 3n - 4)$$

$$\text{Vi } (n - 1)n(n + 1) : 6 \quad \text{và} \quad 6(n^2 - 3n - 4) : 6 \quad \text{nên } B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24 \text{ chia hết cho 6}$$

(đpcm)

Câu 18: Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 6

chia hết cho 323 chia hết cho 6

Lời giải

Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$

chia hết cho 323

$$\text{Ta có: } 323 = 17 \cdot 19 \quad (17; 19) = 1. \text{ Ta cần c/m: } A : 17; 19$$

$$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$$

Ta có

$$(20^n - 3^n) : (20 - 3) : 17(1)$$

Mà

$$(16^n - 1) : (16 - 1) : 17(2)$$

Và (vì n là số chẵn) hay Từ (1) và (2) suy ra $A : 17$.

$$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$$

Tương tự,

$$(20^n - 1) : (20 - 1) : 19(3)$$

Mà

$$(16^n - 3^n) : (16 - 3) : 19(4)$$

Và (vì n là số chẵn)

Từ (3) và (4) suy ra $A : 19$.

$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323 (đpcm)

Câu 19: a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

a) Ta phải chứng minh: $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 \\ &= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

$$\begin{aligned} b) 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} &= 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n} \\ &= 5^n (59 - 8) + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n) \end{aligned}$$

$$59 \cdot 5^n : 59 \quad \text{và} \quad 8(64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 20: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Lời giải

Dễ thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \\ &= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016}) \end{aligned}$$

Các hiệu trên chia hết cho 3 , do vậy A chia hết cho 3

Câu 21: Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Lời giải

Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a+1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b+2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a+1)^2 + (5b+2)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 20b + 4 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1);5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 22: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

Ta có:

$$2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} + \dots + 1); 2010$$

Vì (1)

$$2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots + 1); 2010 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 23: Chứng minh rằng:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \text{ chia hết cho } 40$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40 = 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8); 40 \end{aligned}$$

Vậy $A:40$

Câu 24: Chứng minh rằng $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Lời giải

$$\begin{aligned} 11^{10} - 1 &= (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) \\ &= 10 \cdot (11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) \end{aligned}$$

Vì $10:10$

Và $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ có chữ số tận cùng bằng 0

Nên $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ chia hết cho 10

Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

Câu 25: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots)$

$= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots)$

$= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 26: Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

Áp dụng hằng đẳng thức:

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n lẻ

Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$

$= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$ chia hết cho 44

Câu 27: a) Chứng minh rằng: $n^3 + 3n^2 + 2n$: 6 với mọi số nguyên n

Lời giải

Ta có:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2)$$

$$= n \left[(n^2 + n) + (2n + 2) \right] = n(n+1)(n+2)$$

Vì n là số nguyên nên: $n; n+1; n+2$ là ba số nguyên liên tiếp. Do đó có ít nhất một số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3

$$\Rightarrow n(n+1)(n+2) : 6 \quad \text{hay} \quad n^3 + 3n^2 + 2n : 6 \quad \text{với mọi số nguyên } n$$

b) Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : (2n - 1)$

Lời giải

$$\text{Để } 2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1 \quad \text{thì } 5 : 2n - 1 \quad \text{hay } 2n - 1 \text{ là U} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } n \in \{-2; 0; 1; 3\} \quad \text{thì } 2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$$

Câu 28: Cho số tự nhiên $n > 3$.

Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2 \quad (1)$$

$$\text{Ta chứng minh } ab : 3 \quad (2)$$

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

$$\text{Đặt } n = 4k + r \quad (k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3) \quad \text{ta có: } 2^n = 16^k \cdot 2^r$$

$$\text{Nếu } r = 0 \quad \text{thì } 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n \quad \text{tận cùng là } 2^r$$

$$b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$$

Suy ra

$$\text{Từ } (1) \quad \text{và } (2) \quad \text{suy ra } ab : 6$$

Câu 30: Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

Lời giải

$$\text{Với } n = 1 \text{ ta có: } 16 - 15 - 1 = 0 : 225$$

$$\text{Giả sử bài toán đúng với } n = k \text{ tức là ta có: } 16^k - 15k - 1 : 225$$

$$\text{Ta chứng minh bài toán đúng với } n = k + 1$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned}16^{k+1} - 15(k+1) &= 16 \cdot 16^k - 15k - 15 - 1 \\&= 16(15+1) - 15k - 15 - 1 \\&= 16^k - 15k - 1 + 15(15^k - 1) \\&= 16^k - 15k - 1 + 15A(k) : 225\end{aligned}$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi n là số nguyên dương.

Câu 31: Chứng minh rằng $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010}$ chia hết cho 7

Lời giải

$$2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} = 2^{2008} \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{2008} : 7$$

! HẾT

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>