

CD 9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hòa đợt 1 năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y, z biết: $2x = 3y$; $4y = 5z$ và $x + y + z = 11$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 3y \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} \\ 4y = 5z \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Nhu vậy: } x = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5; y = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}; z = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Câu 2. (HSG 7 Thanh Hóa lần 2 năm 2022 - 2023)

Tìm ba số a, b, c biết rằng: $\frac{b+c+1}{a} = \frac{a+c+2}{b} = \frac{a+b-3}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{b+c+1}{a} = \frac{a+c+2}{b} = \frac{a+b-3}{c} &= \frac{1}{a+b+c} \\ &= \frac{b+c+a+c+a+b+1+2-3}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a+b+c} = 2 \text{ hay } a+b+c = 0,5$$

Do đó:

$$\frac{b+c+1}{a} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-a)+1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+c+2}{b} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-b)+2}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{5}{6}$$

$$\frac{a+b-3}{c} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-c)-3}{c} = 2 \Rightarrow c = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{2}; b = \frac{5}{6}; c = -\frac{5}{6}$$

Câu 3. (HSG 7 THCS Thị trấn Càng Nàng năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 38$.

Lời giải

$$\text{Có: } 2x + y = z - 38 \Rightarrow 2x + y - z = -38$$

$$3x = 4y = 5z - 3x - 4y \Rightarrow 3x = 4y = 5z - 3x - 4y \Rightarrow 9x = 5z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{9} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{z}{36} \quad (1)$$

$$\text{Do } 3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$$

Từ (1) và (2)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x+y-z}{2 \cdot 20 + 15 - 36} = \frac{-38}{19} = -2$$

Suy ra $x = -2 \cdot 20 = -40$; $y = -2 \cdot 15 = -30$; $z = -2 \cdot 36 = -72$

Câu 4. (HSG 7 huyện Than Uyên – Lai Châu năm 2022 - 2023)

Cho a, b, c khác 0 và $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$

$$A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$$

Tính giá trị của biểu thức

Lời giải

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$$

Vì $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$ nên:

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{a-b+c}{b} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{a} \quad (1)$$

- Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c$; $b+c=-a$; $c+a=-b$

$$A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} = \frac{(-c)(-b)(-a)}{abc} = -1$$

Khi đó:

- Nếu $a+b+c \neq 0$ thì từ (1) suy ra: $a=b=c$

$$A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} = 8$$

Khi đó:

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa - Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $C = 26x - 3y + z^{2023}$

Lời giải

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

$$\frac{2+16}{9} = \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

Thay vào tỉ lệ thức ta được:

$$\Rightarrow y = -2, z = 1$$

Khi đó: $C = 26x - 3y + z^{2023} = 26 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 59$

Câu 6. (HSG 7 quận Hà Đông năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k \Rightarrow x = 15k, y = 20k, z = 24k$$

$$M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{2 \cdot 15k + 3 \cdot 20k + 4 \cdot 24k}{3 \cdot 15k + 4 \cdot 20k + 5 \cdot 24k} = \frac{186k}{245k} = \frac{186}{245}$$

Suy ra:

Câu 7. (HSG 7 huyện Bình Xuyên – Vĩnh Phúc năm 2022 - 2023)

Tìm 3 số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5}; x+y+z = -110$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: } \frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{6+14+35} = \frac{-110}{55} = -2$$

$$\text{Suy ra: } x = -2.6 = -12; y = -2.14 = -28; z = -2.25 = -70$$

$$\text{Vậy } x = -12; y = -28; z = -70$$

Câu 8. (HSG 7 trường THCS Võ Thị Sáu năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho } \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} \text{ và } 5a-3b-4c=46. \text{ Tìm } a, b, c.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5.(a-1)}{5.2} = \frac{3.(b+3)}{3.4} = \frac{4.(c-5)}{4.6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24} \\ = \frac{(5a-5) - (3b+9) - (4c-20)}{10-12-24} = \frac{5a-3b-4c+6}{-26} = \frac{46+6}{-26} = \frac{52}{-26} = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a-1}{2} = -2 \Rightarrow a-1 = -4 \Rightarrow a = -3$$

$$\frac{b+3}{4} = -2 \Rightarrow b+3 = -8 \Rightarrow b = -11$$

$$\frac{c-5}{6} = -2 \Rightarrow c-5 = -12 \Rightarrow c = -7$$

$$\text{Vậy } (a; b; c) = (-3; -11; -7)$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm 2022 - 2023)

$$\text{Tìm các số thực } x, y, z \text{ biết } \frac{x+y-7}{z} = \frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{6}{x+y+z}$$

Lời giải

Với $x, y, z \neq 0$ và $x+y+z \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x+y-7}{z} = \frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\frac{6}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 3$$

Suy ra:

Khi đó:

$$+ \frac{x+y-7}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-z-7}{z} = 2 \Leftrightarrow -4-z = 2z \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \frac{y+z+2}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-x+2}{x} = 2 \Leftrightarrow 5-x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \frac{x+z+5}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-y+5}{y} = 2 \Leftrightarrow 8-y = 2y \Leftrightarrow y = \frac{8}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = \frac{5}{3}$; $y = \frac{8}{3}$; $z = -\frac{4}{3}$ là các số thực cần tìm.

Câu 10. (HSG 7 huyện Thọ Sơn – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2}$ (với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{y+z-2+z+x+1+x+y-3}{x+1+y-1+z-2} = \frac{2(x+y+z-2)}{x+y+z-2} = 2$$

Suy ra:

$$+ y+z-2 = 2(x+1) = 2x+2 \Rightarrow y+z = 2x+4$$

$$+ z+x+1 = 2(y-1) = 2y-2 \Rightarrow z+x = 2y-3$$

$$+ x+y-3 = 2(z-2) = 2z-4 \Rightarrow x+y = 2z-1$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{x+y+z-2} = 2 \Rightarrow x+y+z-2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y+z = \frac{5}{2}$$

$$y+z = \frac{5}{2} - x; \quad z+x = \frac{5}{2} - y; \quad x+y = \frac{5}{2} - z$$

Suy ra:

Như vậy:

$$+ 2x+4 = \frac{5}{2} - x \Rightarrow 3x = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$+ 2y-3 = \frac{5}{2} - y \Rightarrow 3y = \frac{11}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{6}$$

$$+ 2z-1 = \frac{5}{2} - z \Rightarrow 3z = \frac{7}{2} \Rightarrow z = \frac{7}{6}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-1}{2}; y = \frac{11}{6}; z = \frac{7}{6}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Liên Trường năm 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2022 \cdot x + (y+z)^{2023}$

Lời giải

Điều kiện: $x+y+z \neq 0$; $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = \frac{1}{2} \quad (1) \text{ và } \frac{y+z+1}{x} = 2 \Leftrightarrow y+z+1 = 2x \quad (2).$$

$$\text{Trừ (1) và (2) vế với vế, ta được: } x-1 = \frac{1}{2} - 2x \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Mà $x + y + z = \frac{1}{2}$ nên $y + z = 0$.

Thay vào biểu thức ta có: $A = 2022 \cdot \frac{1}{2} + 0^{2023} = 1011$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Diễn Châu năm 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$. (*)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7x-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} \text{ và } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \quad (1)$$

+ Trường hợp 1: $y = 0$ thay vào (*) $\Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{5x} = \frac{1}{4x}$, điều này vô lí.

+ Trường hợp 2: $y \neq 0$. Từ (1) $\Rightarrow -x = 5x - 12 \Leftrightarrow x = 2$.

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào (1) ta được: } \frac{1+3y}{12} = \frac{2y}{-2} = -y \Leftrightarrow 1+3y = -12y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = 2; y = -\frac{1}{15}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$.

Lời giải

$$\text{Biết: } \frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x-1=0 \\ 7y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{7} \end{cases}$$

+ Nếu $3x+7y-5 \neq 0$ thì áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{9} \Rightarrow \frac{3x+7y-5}{9} = \frac{3x+7y-5}{3x} \neq 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{7y - 4}{5} \Rightarrow y = 2$$

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{7} \right), (3; 2) \right\}$$

Vậy

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{2z-4x}{3}$ và $x - 2y + 3z = 8$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{12x-8y}{16} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{6z-12x}{9}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12x-8y}{16} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{6z-12x}{9} = \frac{12x-8y+8y-6z+6z-12x}{16+4+9} = 0$$

$$\text{Suy ra: } 12x-8y=0; 8y-6z=0; 6z-12x=0$$

$$\Rightarrow 12x=8y=6z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x-2y+3z}{2-6+12} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow x=2; y=3; z=4$$

$$\text{Vậy } x=2; y=3; z=4$$

Câu 15. (HSG 7 Huyện Thạch Thành năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $3x=4y=5z-3x-4y$ và $2x+y=z-38$

Lời giải

$$\text{Từ } 3x=4y=5z-3x-4y \Rightarrow 3x=5z-3x-4y \Rightarrow 9x=5z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{9} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{z}{36} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } 3x=4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x+y-x}{40+15-36} = \frac{-38}{19} = -2$$

$$\text{Từ đó suy ra } x=-40; y=-30; z=-72$$

Câu 16. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa – Nghệ An năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho ba số thực } a, b, c \text{ khác 0 thỏa mãn: } \frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$$

$$\text{Tính } P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a} \quad (a, b, c \text{ khác } 0)$$

$$\Rightarrow \frac{a-2b+c}{b} + 3 = \frac{b-5c+a}{2c} + 3 = \frac{c-8a+b}{3a} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{2c} = \frac{c+a+b}{3a} \quad (1)$$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì:

$$P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b+c}{c} \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} = -1$$

$$\text{+ Nếu } a+b+c \neq 0 \text{ thì từ (1) } \Rightarrow b=2c=3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}; \frac{b}{c} = \frac{2}{1}; \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Thay vào } P \text{ ta có } P=10$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Anh Sơn năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=72$.

Lời giải

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y)+3(2z-4x)+2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

Suy ra:

$$\left. \begin{aligned} 3x-2y=0 &\Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 4y-3z=0 &\Rightarrow 4y=3z \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{72}{9} = 8 \Rightarrow x=8 \cdot 2=16; y=8 \cdot 3=24; z=8 \cdot 4=32$$

Vậy $x=16, y=24, z=32$.

Câu 18. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn năm 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính giá trị biểu thức: $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{a+b+c+d}{a} = 1 + \frac{a+b+c+d}{b} = 1 + \frac{a+b+c+d}{c} = 1 + \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (1)$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow a=b=c=d$.

$$\text{Khi đó, } Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1+1=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -(c+d) \\ b+c = -(a+d) \\ c+d = -(a+b) \\ d+a = -(b+c) \end{cases}$$

+ Với $a+b+c+d=0$

Khi đó:

$$Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{-(a+b)}{a+b} + \frac{-(b+c)}{b+c} = -1-1-1-1=-4$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên năm 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức:

Lời giải

+ Với $a+b+c \neq 0$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = 1$$

Suy ra:

$$\frac{a+b}{c} - 1 = \frac{b+c}{a} - 1 = \frac{c+a}{b} - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Khi đó:

+) Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{b} = -1$$

Khi đó:

Vậy: +) Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $B=8$.

+) Nếu $a+b+c=0$ thì $B=-1$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hà Trung năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $2x=3y; 4y=5z$ và $4x-3y+5z=7$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2x=3y \\ 4y=5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x=12y \\ 12y=15z \end{cases} \Rightarrow 8x=12y=15z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x-3y+5z}{4 \cdot 15 - 3 \cdot 10 + 5 \cdot 8} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Suy ra: } x = 15 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}; y = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1; z = 8 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Lập Thạch năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y biết: $4x=5y$ và $x^2-y^2=1$.

Lời giải

$$4x=5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = k \Rightarrow x=5k, y=4k$$

Ta có:

$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow 25k^2 - 16k^2 = 9k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3}$$

Do đó:

$$k = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}; y = \frac{4}{3}$$

Với

$$k = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{5}{3}; y = -\frac{4}{3}$$

Với

$$(x; y) = \left\{ \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3} \right), \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right) \right\}$$

Vậy

Câu 22. (HSG 7 huyện Yên Định năm 2022 - 2023)

1) Tìm x, y, z biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x-3y+4z=4$.

2) Cho $a, b, c > 0$ và: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$.

$$P = \frac{(3a-2b)(3b-2c)(3c-2a)}{(3a-c)(3b-a)(3c-b)}$$

Tính:

Lời giải

1) Ta có: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = 2$$

Suy ra: $\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x=5; \frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y=11; \frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z=8$

Vậy $x=5; y=11; z=8$

2) Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2b+c-a}{a} &= \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c} \\ &= \frac{(2b+c-a)+(2c-b+a)+(2a+b-c)}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \end{aligned}$$

Suy ra: $\begin{cases} 2b+c-a=2a \\ 2c-b+a=2b \\ 2a+b-c=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=c \\ 3b-2c=a \\ 3c-2a=b \end{cases}$ và $\begin{cases} 3a-c=2b \\ 3b-a=2c \\ 3c-b=2a \end{cases}$

$$P = \frac{1}{8}$$

Khi đó ta được

Câu 23. (HSG 7 THCS Yên Phong năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $2x=3y; 4y=5z$ và $x-y+z=26$.

Lời giải

Từ $2x=3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; 4y=5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$.

Suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x-y+z}{15-10+8} = \frac{26}{13} = 2$$

Suy ra: $x=15 \cdot 2=30; y=10 \cdot 2=20; z=8 \cdot 2=16$.

Vậy $x=30; y=20; z=16$.

Câu 24. (HSG 7 THCS Tân Kỳ năm 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{xyz}$ biết: $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x-y+z=4$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ (vì xyz là số tự nhiên nên x, y, z là các chữ số).
 Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 4$ ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Suy ra $x = 2; y = 3; z = 5$.

Vậy số cần tìm là 235.

Câu 25. (HSG 7 Quảng Ninh năm 2022 - 2023)

1) Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$.

2) Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$.

Tính tổng:
$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

Lời giải

1) Ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ (1) và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

Suy ra: $x = 20; y = 30; z = 42$.

2) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Suy ra:

$$+) \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b+c = 2a$$

$$+) \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c+a = 2b$$

$$+) \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = 2c$$

$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 2 + 2 + 2 = 6$$

Do đó:

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

Câu 26. (HSG 7 Thanh Hóa lần 2 năm 2022 - 2023)

Cho các số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2020} = \frac{c}{2019}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{2021} = \frac{b}{2020} = \frac{c}{2019} = \frac{a-b}{1} = \frac{b-c}{1} = \frac{a-c}{2}$$

Suy ra: $2(a-b) = a-c$ và $2(b-c) = a-c$

Nhân vế với vế ta có: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$ (đpcm).

Câu 27. (HSG 7 huyện Hoằng Hóa – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2+ab+ab+b^2}{c^2+cd+cd+d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{a(c+d)} = \frac{b(c+d)}{d(a+b)} \Rightarrow \frac{ca+cb}{ca+ad} = \frac{bc+bd}{da+db} = \frac{ca-bd}{ca-bd} = 1$$

$$\Rightarrow ca+cb = ca+ad \Rightarrow cb = ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Câu 28. (HSG 7 trường THCS Võ Thị Sáu năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a}{d}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$.

Suy ra: $\left(\frac{a}{b} \right)^3 = \left(\frac{b}{c} \right)^3 = \left(\frac{c}{d} \right)^3 = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$.

Vậy: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a}{d}$ (đpcm).

Câu 29. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c biết: $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (c-a)^2$.

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023} = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} = \frac{c-a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{1} = \frac{(c-a)^2}{4} \Rightarrow 4(a-b)^2 = (c-a)^2 \Rightarrow 4(a-b)(a-b) = (c-a)^2 \quad (1)$$

Mà $\frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} \Rightarrow (a-b) = (b-c)$ nên từ (1) suy ra: $4(a-b)(b-c) = (c-a)^2$.

Vậy $4(a-b)(b-c) = (c-a)^2$ (đpcm).

Câu 30. (HSG 7 huyện Thạch Thành năm 2022 - 2023)

Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn: $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (các tỉ số đều có nghĩa). Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x+y+z}{1} = x+y+z \quad (\text{vì } a+b+c=1).$$

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{1} = x^2+y^2+z^2$$

Suy ra:

Câu 31. (HSG 7 huyện Đông Hưng năm 2022 - 2023)

Biết: $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ ($a, b, c \neq 0$). Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $a, b, c \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ và

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$bz - cy = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{z}{c} = \frac{x}{a}; \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Câu 32. (HSG 7 huyện Tân Kỳ năm 2022 - 2023)

Biết: $a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 2023; c^2 + \frac{b^2}{3} = 2000; a^2 + ac + c^2 = 23$ và $a \neq 0; c \neq 0; a \neq -c$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 2023; c^2 + \frac{b^2}{3} = 2000; a^2 + ac + c^2 = 23$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3}\right) - \left(c^2 + \frac{b^2}{3}\right) - (a^2 + ac + c^2) = 2023 - 2000 - 23$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{3} - c^2 - \frac{b^2}{3} - a^2 - ac - c^2 = 0$$

$$\Rightarrow ab - ac - 2c^2 = 0$$

$$\Rightarrow ab = ac + 2c^2$$

$$\Rightarrow ab + ac = 2ac + 2c^2$$

$$\Rightarrow a(b+c) = 2c(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$$

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức (không có)

Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Câu 33. (HSG 7 huyện Ứng Hòa đợt 1 năm 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số tẩy của ba lớp cùng mua là x gói (x là số tự nhiên lớn hơn 0).

Gọi số tẩy lúc đầu dự định chia cho ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c (gói), ta có:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{5+6+7} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}, b = \frac{6x}{18}, c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Gọi số gói tẩy sau đó chia cho ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{4+5+6} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}, b' = \frac{5x}{15}, c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh ta thấy $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu 4 gói.

$$\text{Suy ra: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy số tẩy của ba lớp mua là 360 gói.

Câu 34. (HSG 7 Trường THCS Thị Trấn Cành Nàng – Huyện Bá Thước năm 2022 - 2023)

Để phòng tránh nCovid-19 trường A phát khẩu trang cho ba lớp 7A, 7B, 7C. Lúc đầu số khẩu trang dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với $5; 6; 7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4; 5; 6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 khẩu trang. Tính tổng số khẩu trang mà ba lớp đã được phát.

Lời giải

Gọi tổng số khẩu trang 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên lớn hơn 0)

Gọi số khẩu trang dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c (gói).

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$$

Gọi số khẩu trang sau đó chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là $a'; b'; c'$ (gói).

$$\text{Ta có: } \frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} = \frac{2x}{5}$$

So sánh ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Suy ra: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy tổng số khẩu trang 3 lớp đã nhận được là 360 cái.

Câu 35. (HSG 7 huyện Lương Tài – Bắc Ninh năm 2022 - 2023)

Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong

đó, $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh nhóm III. Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Lời giải

Gọi số học sinh của nhóm I, nhóm II, nhóm III lần lượt là x, y, z (học sinh).

Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}$.

$$\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{11}{8}} = \frac{z}{\frac{5}{4}}$$

Theo bài ra ta có:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{11}{8}} = \frac{z}{\frac{5}{4}} = \frac{-x+y+z}{-\frac{3}{2} + \frac{11}{8} + \frac{5}{4}} = 16$$

$$\text{Suy ra: } x = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24; \quad y = 16 \cdot \frac{11}{8} = 22; \quad z = 16 \cdot \frac{5}{4} = 20$$

Vậy số học sinh của nhóm I, nhóm II, nhóm III lần lượt là 24; 22; 20 (học sinh).

Câu 36. (HSG 7 quận Hà Đông năm 2022 - 2023)

Nhà trường dự định chia vở viết cho 3 lớp 7A, 7B, 7C theo tỉ lệ số học sinh là 7:6:5. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển chuyển giữa 3 lớp nên phải chia lại theo tỉ lệ 6:5:4. Như vậy có lớp đã nhận được ít hơn theo dự định 12 quyển vở. Tính số vở mỗi lớp nhận được.

Lời giải

Gọi số vở của ba lớp 7A, 7B, 7C nhận được theo dự định tương ứng là $x; y; z$ (quyển) và số vở nhận được trong thực tế là $a; b; c$ (quyển).

Điều kiện: $x; y; z; a; b; c \in \mathbb{N}^*$.

Do tổng số vở không thay đổi nên $a+b+c=x+y+z$.

$$\text{Theo bài ta có: } \frac{x}{7} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{18} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{90}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{15} \Rightarrow \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = \frac{a+b+c}{90}$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24}$$

Vì $\frac{x}{35} = \frac{a}{36}$ nên $x < a \Rightarrow$ số vở của lớp 7A nhận được nhiều hơn so với dự định.

Vì $\frac{y}{30} = \frac{b}{30}$ nên $y = b \Rightarrow$ số vở lớp 7B nhận được không đổi.

Vì $\frac{z}{25} = \frac{c}{24}$ nên $z > c \Rightarrow$ số vở lớp 7C nhận được ít hơn so với dự định.

Suy ra $z - c = 12$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = \frac{z}{25} = \frac{z-c}{25-24} = \frac{12}{1} = 12$$

Do đó: $a = 36 \cdot 12 = 432$; $b = 30 \cdot 12 = 360$; $c = 24 \cdot 12 = 288$ (thỏa mãn).

Vậy lớp 7A nhận được 432 quyển vở, lớp 7B nhận được 360 quyển vở, lớp 7C nhận được 288 quyển vở.

Câu 37. (HSG 7 huyện Bình Xuyên – Vĩnh Phúc năm 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng tham gia trồng cây trong vườn trường, lúc đầu thầy phụ trách dự định giao số cây trồng cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó thầy giao theo tỉ lệ

4:5:6 nên có một lớp trồng nhiều hơn dự định 4 cây. Tính tổng số cây mà ba lớp đã trồng.

Lời giải

Gọi tổng số cây 3 lớp đã trồng là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số cây dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c .

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số cây sau đó chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a', b', c' .

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số cây ba lớp trồng được là 360 cây.

Câu 38. (HSG 7 huyện Thọ Sơn – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Một đơn vị công nhân sửa đường theo dự định phân chia số mét đường phải sửa cho 3 tổ: Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỉ lệ 4:5:6. Nhưng sau đó, vì số người thay đổi nên đơn vị đã chia lại số mét đường phải sửa cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỉ lệ 3:4:5. Do đó, có một tổ làm ít hơn dự định 20 m đường. Tính số mét đường đơn vị đã chia lại cho mỗi tổ.

Lời giải

Gọi tổng số mét đường ba tổ công nhân phải sửa là x (x là số tự nhiên khác 0).

Số mét đường dự định chia cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 lúc đầu lần lượt là a, b, c .

$$\text{Ta có: } \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{a+b+c}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a = \frac{4x}{15} = \frac{16x}{60}; b = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c = \frac{6x}{15} = \frac{24x}{60} \quad (1)$$

Số mét đường sau đó chia cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 lần lượt là a', b', c' .

$$\text{Ta có: } \frac{a'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{5} = \frac{a'+b'+c'}{12} = \frac{x}{12} \Rightarrow a' = \frac{3x}{12} = \frac{15x}{60}; b' = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}; c' = \frac{5x}{12} = \frac{25x}{60} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên Tổ 1 nhận ít hơn lúc đầu 20 m.

$$\text{Suy ra: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{16x}{60} - \frac{15x}{60} = 20 \Rightarrow \frac{x}{60} = 20 \Rightarrow x = 20 \cdot 60 = 1200 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy số mét đường đơn vị đã chia lại cho 3 tổ lần lượt là:

$$\text{Tổ 1: } a' = \frac{3x}{12} = \frac{3 \cdot 1200}{12} = 300 \text{ (m)}$$

$$\text{Tổ 2: } b' = \frac{4x}{12} = \frac{1200}{3} = 400 \text{ (m)}$$

$$\text{Tổ 3: } c' = \frac{5x}{12} = \frac{5 \cdot 1200}{12} = 500 \text{ (m)}$$

Tổ 3:

Câu 39. (HSG 7 huyện Diễn Châu năm 2022 - 2023)

Một trường THCS có ba lớp 7, tổng số học sinh hai lớp 7A, 7B là 8^5 em. Nếu chuyển 10 học sinh từ lớp 7A sang lớp 7C thì số học sinh ba lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ thuận với 7; 8; 9. Hỏi lúc đầu mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh), ($x, y, z \in \mathbb{N}^*, x > 10$).

Theo bài ra ta có: $x + y = 85$. (1)

Nếu chuyển 10 học sinh từ lớp 7A sang lớp 7C thì số học sinh lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ thuận với 7; 8; 9 nên ta có:

$$\frac{x-10}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+10}{9} \quad (2)$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-10}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+10}{9} = \frac{(x-10)+y}{7+8} = \frac{85-10}{15} = 5$$

Suy ra $x=45, y=40, z=35$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 45, 40, 35 học sinh.

Câu 40. (HSG 7 huyện Thạch Thành năm 2022 - 2023)

Một bản thảo sách giáo khoa dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy một trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ ba cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả ba người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải

Gọi số trang mà người thứ nhất, người thứ hai, người thứ ba lần lượt đánh máy được là $x; y; z$ (với $x; y; z$ nguyên dương).

Trong cùng một khoảng thời gian số trang sách đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian đánh 1 trang sách nên ta có:

$$x:y:z = \frac{1}{5}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6} = 12:15:10 \quad \text{hay} \quad \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{37} = 15$$

Suy ra: $x=180; y=225; z=150$

Vậy số trang người thứ nhất, người thứ hai, người thứ ba lần lượt đánh được là: 180; 225; 150

Câu 41. (HSG 7 thị xã Thái Hòa năm 2022 - 2023)

Trong phong trào “Tết vì bạn nghèo” năm 2022 của một trường A, ba khối 6, 7, 8 đã ủng hộ được 9 120 000 đồng. Trung bình mỗi học sinh khối 6, 7, 8 theo thứ tự ủng hộ được 12 000 đồng; 14 000 đồng; 16 000 đồng. Số học sinh đã ủng hộ khối 6 và 7 tỉ lệ với 1 và 3, số học sinh đã ủng hộ khối 7 và 8 tỉ lệ với 4 và 5. Tính số học sinh mỗi khối của trường A đã ủng hộ.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh đã ủng hộ khối 6, 7, 8 (với $x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Do số học sinh khối 6 và 7 tỉ lệ với 1 và 3, số học sinh khối 7 và 8 tỉ lệ với 4 và 5 suy ra:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \quad (1)$$

Mặt khác cả ba khối ủng hộ được 9 120 000 đồng và trung bình mỗi học sinh khối 6, 7, 8 theo thứ tự ủng hộ được 12 000 đồng; 14 000 đồng; 16 000 đồng nên:

$$12000x + 14000y + 16000z = 9120000 \Rightarrow 12x + 14y + 16z = 9120 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{12x+14y+16z}{4 \cdot 12 + 12 \cdot 14 + 15 \cdot 16} = \frac{9120}{456} = 20$$

Suy ra: $x=80, y=240, z=300$ (thỏa mãn).

Vậy khối 6 có 80 học sinh, khối 7 có 240 học sinh và khối 8 có 300 học sinh.

Câu 42. (HSG 7 huyện Lục Ngạn – Bắc Giang năm 2022 - 2023)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt tỉ lệ với 4 và 3. Biết chu vi khu vườn là 140 m. Tính chiều dài và chiều rộng khu vườn đó?

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của khu vườn lần lượt là x (m), y (m).

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Vì chu vi của mảnh vườn là 140 m nên ta có: $2(x+y)=140 \Rightarrow x+y=70$

Mặt khác chiều dài và chiều rộng lần lượt tỉ lệ với 4 và 3 nên: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{4+3} = \frac{70}{7} = 10$

Suy ra: $x=10 \cdot 4=40$ và $y=10 \cdot 3=30$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là 40 m và 30 m.

Câu 43. (HSG 7 huyện Anh Sơn năm 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để các lớp 7A, 7B, 7C hoàn thành công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số học sinh tham gia làm việc của mỗi lớp, biết rằng số học sinh tham gia làm việc tại 7C ít hơn số học sinh tham gia của 7B là 5 người. (Năng suất việc của mỗi học sinh là như nhau).

Lời giải:

Gọi số học sinh tham gia chuyển gạch của 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh). Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

Thời gian hoàn thành công việc của 3 lớp lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ và thời gian

và số học sinh là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên: $2x=3y=4z$ hay $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}$

Mà số học sinh tham gia làm việc tại 7C ít hơn số học sinh tham gia của 7B là 5 người nên $y-z=5$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$2x=3y=4z = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60$$

Suy ra: $x=30; y=20; z=15$

Vậy lớp 7A có 30 học sinh, lớp 7B có 20 học sinh, lớp 7C có 15 học sinh.

Câu 44. (HSG 7 huyện Đô Lương năm 2022 - 2023)

Nhân dịp trồng cây đầu xuân, một trường THCS có ba lớp 7A, 7B, 7C tham gia trồng cây. Nhà trường giao chỉ tiêu trồng cây cho từng lớp. Sau buổi làm việc thứ nhất thì

thấy $\frac{1}{3}$ số cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$ số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C. Tính số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C sau

buổi làm việc thứ nhất. Biết rằng tổng số cây đã trồng trong buổi thứ nhất của hai lớp 7A và 7B là 39 cây.

Lời giải

Gọi số cây lớp 7A, 7B, 7C trồng được trong buổi thứ nhất lần lượt là: x, y, z (cây).

Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Vì $\frac{1}{3}$ số cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$

số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C nên: $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{3}{5}z \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$.

Tổng số cây lớp 7A và 7B đã trồng được trong buổi thứ nhất là 39 cây nên $x + y = 39$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y}{9+4} = \frac{39}{13} = 3$.

Suy ra: $z = 3 \cdot 5 = 15$.

Vậy số cây chưa trồng của lớp 7C là 15 cây.

Câu 45. (HSG 7 huyện Đông Hưng năm 2022 - 2023)

Lúc ban đầu ba kho có tất cả 710 tấn thóc. Sau khi bán đi $\frac{1}{5}$ số thóc ở kho I, $\frac{1}{6}$ số thóc ở kho II và $\frac{1}{11}$ số thóc ở kho III thì số thóc còn lại ở ba kho bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi kho có bao nhiêu tấn thóc?

Lời giải

Gọi số thóc lúc đầu ở kho I, II, III lần lượt là x, y, z (tấn). Điều kiện: $x, y, z > 0$.

Vì lúc ban đầu ba kho có tất cả 710 tấn thóc nên $x + y + z = 710$.

Sau khi bán đi $\frac{1}{5}$ số thóc ở kho I, $\frac{1}{6}$ số thóc ở kho II và $\frac{1}{11}$ số thóc ở kho III thì số thóc

còn lại ở ba kho bằng nhau nên $\frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z$.

Vì $\frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z \Rightarrow \frac{4}{5 \cdot 20}x = \frac{5}{6 \cdot 20}y = \frac{10}{11 \cdot 20}z \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{22}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{22} = \frac{x+y+z}{25+20+22} = \frac{710}{71} = 10$.

Suy ra: $x = 250; y = 240; z = 220$.

Vậy số thóc kho I, II, III lúc đầu lần lượt có là 250 tấn, 240 tấn, 220 tấn.

Câu 46. (HSG 7 huyện Tân Kỳ năm 2022 - 2023)

Ba hộp trứng gà có tất cả 710 quả. Sau khi bán $\frac{1}{5}$ số trứng ở hộp thứ nhất, $\frac{1}{6}$ số trứng

ở hộp thứ hai và $\frac{1}{11}$ số trứng ở hộp thứ ba thì số trứng còn lại ở ba hộp bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu quả trứng?

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số trứng ở ba hộp. Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ và $x, y, z < 710$.

Vì tổng số trứng ở ba hộp là 710 nên: $x + y + z = 710$.

Vì sau khi bán $\frac{1}{5}$ số trứng ở hộp thứ nhất, $\frac{1}{6}$ số trứng ở hộp thứ hai và $\frac{1}{11}$ số trứng ở hộp thứ ba thì số trứng còn lại ở ba hộp bằng nhau ta có:

$$\frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{y}{24} = \frac{z}{22}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{24} = \frac{z}{22} = \frac{x+y+z}{25+24+22} = \frac{710}{71} = 10$$

Suy ra: $x = 250$, $y = 240$, $z = 220$ (thỏa mãn).

Vậy ban đầu ba hộp có số trứng lần lượt là 250; 240; 220 quả.

Câu 47. (HSG 7 TP Ninh Bình năm 2022 - 2023)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5 m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4 m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3 m/s. Tính độ dài cạnh của hình vuông, biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Lời giải

Gọi x, y, z (giây) là thời gian vật chuyển động lần lượt với các vận tốc 5 m/s; 4 m/s; 3 m/s. Điều kiện: $x, y, z > 0$.

Vì tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây nên: $x + x + y + z = 59$.

Cùng một đoạn đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

$$5x = 4y = 3z$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \frac{x+x+y+z}{1+1+1+1} = \frac{59}{4} = 14.75$$

Do đó: $x = 14.75 \cdot 1 = 14.75$; $y = 14.75 \cdot 1 = 14.75$; $z = 14.75 \cdot 1 = 14.75$ (thỏa mãn).

Vậy cạnh hình vuông là: $5 \cdot 14.75 = 73.75$ (m).

Câu 48. (HSG 7 huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023)

Số A được chia thành ba phần tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24 309. Tìm số A .

Lời giải

Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c .

Theo bài ra ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 24\,309$.

Ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 24 : 45 : 10 \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24\,309}{2\,701} = 9$$

Suy ra: $a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 72; & b = 135; & c = 30 \\ a = -72; & b = -135; & c = -30 \end{cases}$$

Vậy $(a, b, c) \in \{(72; 135; 30), (-72; -135; -30)\}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>