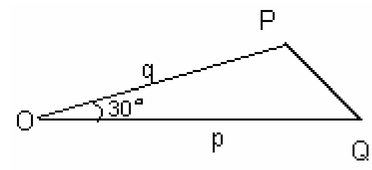
TAM GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH

*Bài giảng của Thầy **Lê Bá Khánh Trình** tại trường hè 2010*

I/ Phương trình từ tam giác:

<u>**Ví Dụ 1**</u>: Tìm x và y thỏa: $\sqrt{x^2+b^2-bx\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+a^2-ay\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+b^2}$

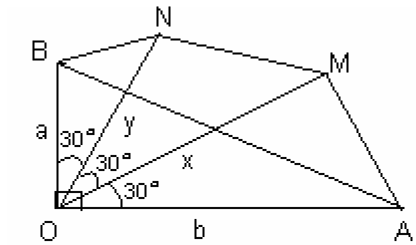


Ý tưởng là :

+ AM + MN + NB $\geq$ AB. Dấu "=" <=> M, N thuộc AB theo thứ tự.

+ Tại sao có $\sqrt{3}$? Không có căn 3 có giải được không?

+ Nhận thấy: $\sqrt{p^2+q^2-pq\sqrt{3}}=PQ$ trong hình bên:



<u>**TH1**</u>: x > 0, y > 0:

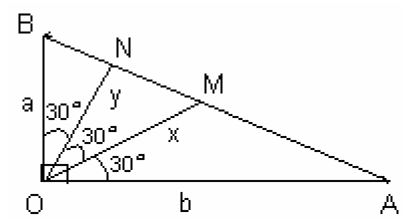
- Xét tam giác OAB vuông tại O
- Lấy M, N trong góc AOB:

$\widehat{AOM}=\widehat{MON}=30^0$.*Đặt* $OM=x;ON=y$ *thì*:

$AM=\sqrt{x^2+b^2-xb\sqrt{3}}$; $MN=\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}$; $NB=\sqrt{y^2+a^2-ay\sqrt{3}}$

Vậy PT là: AM + MN + NB = AB <=> M, N thuộc AB theo thứ tự

- Bài toán quay về tìm x và y thỏa M, N thuộc AB theo thứ tự

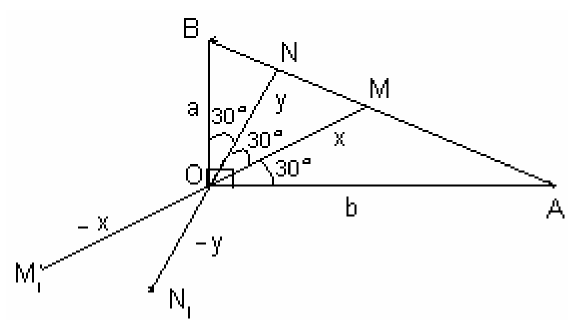


Do:

$$S_{OAB}=S_{OAM}+S_{OMB}\Leftrightarrow a.b=\frac{1}{2}bx+\frac{\sqrt{3}}{2}a.x$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2ab}{b+\sqrt{3}a}.\ \textit{Tương tự}: y=\frac{2ab}{a+\sqrt{3}b}$$

* <u>Cách khác</u>: Dùng tọa độ cho các điểm.



<u>**TH2**</u>: x < 0, y < 0: (Dùng đối xứng tâm)

- Lấy đối xứng của M, N qua O là M1, N1

$\overline{OM}_1=-x$; $\overline{ON}_1=-y$

$AM_1=\sqrt{b^2+(-x)^2+b(-x).\sqrt{3}}=\sqrt{b^2+x^2-bx.\sqrt{3}}$

$M_1N_1=\sqrt{x^2+y^2-xy.\sqrt{3}}$

$N_1B=\sqrt{y^2+a^2-ay.\sqrt{3}}$

PT trở thành: $AM_1+M_1N_1+N_1B=AB$. Điều này không xảy ra do M_1 ; N_1 không thuộc góc AOB.

Vậy Pt vô nghiệm

<u>**TH3**</u>: x <= 0, y > 0: (Dùng đối xứng tâm)

- Lấy đối xứng của M qua O là M1

PT trở thành: $AM_1+M_1N+NB=AB$. Điều này không xảy ra do M_1 không thuộc góc AOB.

Vậy Pt vô nghiệm

* <u>**Nhận xét**</u>: *VD này là 1 hướng để xây dựng phương trình.*

Ví dụ 2: Giải hệ pt: $x^2+y^2=(a-x)^2+b^2=(b-y)^2+a^2$

Xét mp Oxy với 3 điểm: A(a; b); B(x; 0); C(0; y)

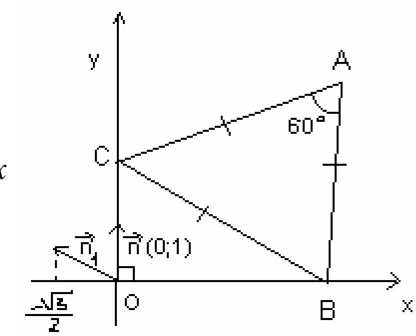
Hệ có nghĩa là: Tam giác ABC đều

Cần xác định: B, C trên Ox, Oy để tam giác ABC đều

* Gọi C là giao điểm Oy và d1; d2 là ảnh của Ox qua Q1(A; + 60^0) hoặc Q2(A; - 60^0)

* Lập pt d1:

d1 có VTPT



$\overrightarrow{n_1}=(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}) \qquad \Rightarrow d1: \frac{-\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+c=0$

$Mặt\ khác: f(x;y)=\frac{-\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y \Rightarrow f(a;b)=f_0(a;b)\ ,\ f_0: là\ pt\ Ox$

$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+c=b \Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$

$Suy\ ra\ C_1: x_1=0; y_1=-2c=-\sqrt{3}a-b$

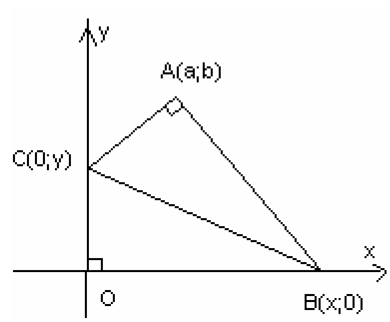
$*\ Tt\psi\ B_1\ có\ hoành\ độ\ x_2=-\sqrt{3}b-a$

$\Rightarrow Nghiệm\ (-\sqrt{3}a-b; -\sqrt{3}b-a)$

$*\ khi\ quay\ theo\ Q_2(A;-60^0)\ thì\ có\ nghiệm: (\sqrt{3}a-b;\sqrt{3}b-a)$

Ví dụ 3:

Giải hệ: $\frac{x^2+y^2}{5}=\frac{(a-x)^2+b^2}{3}=\frac{(b-y)^2+a^2}{2}$



Xét mp Oxy với 3 điểm: A(a; b); B(x; 0); C(0; y)

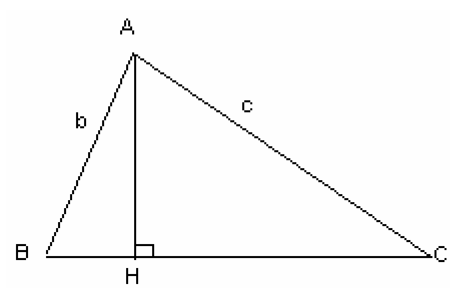
=> Biểu thức là sự đồng dạng của 2 tam giác: ABC và tam giác vuông cạnh $\sqrt{5};\sqrt{3};\sqrt{2}$

=> Cần tìm B, C thuộc Ox; Oy để ABC vuông ở A có cạnh tỉ lệ: $\sqrt{5};\sqrt{3};\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-a)a+(y-b)b=0\\ \frac{(x-a)^2+b^2}{3}=\frac{(y-b)^2+a^2}{2}\end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ví dụ 4: Giải hệ:

$$\begin{cases}x=\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}\\ y=\sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2}\\ z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}\end{cases}$$



Tam giác ABC không tù

$$BC=BH+HC=\sqrt{b^2-h^2}+\sqrt{c^2-h^2}$$

Giả sử có nghiệm: x, y, z (x, y, z ≥ 0)

- Lúc đó Pt có nghĩa: x, y, z là 3 cạnh 1 tam giác không tù và 3 đường cao a, b, c.

Gọi tam giác cần tìm là Δ, và tam giác $\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}$ *là* δ ==> $\Delta \sim \delta$

- Ta tính tỉ đồng dạng:

* Tỉ số đồng dạng k = $\frac{x}{1/a} = \frac{y}{1/b} = \frac{z}{1/c} = 2S$

* Mặt khác: Gọi s là diện tích δ, vậy k=$\sqrt{\frac{S}{s}}$ =>2S=$\sqrt{\frac{S}{s}}$ => 2S=$\frac{1}{2s}$

=> $(x;y;z) = (\frac{1}{2as};\frac{1}{2bs};\frac{1}{2cs})$

* Điều kiện có nghiệm:

Tam giác không tù $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2} \end{cases}$

II/ <u>Phương trình trong tam giác</u>: (Chủ yếu nói về cạnh)

<u>Mệnh đề 1</u>: (pt tam giác)

3 cạnh a, b, c của 1 tam giác là 3 nghiệm pt sau: $\boxed{x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)x - 4Rrp = 0}$

$Do: \begin{cases} a + b + c = 2p \\ ab + bc + ca = r^2 + 4Rr + p^2 \\ abc = 4Rrp \end{cases}$ (Tức là chỉ phụ thuộc R, r, p)

Ta cần chứng minh biểu thức thứ 2 (2 bthức còn lại là hiển nhiên)

$Đặt\ F(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2px^2 + ...$

$Xét\ F(p) = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - 2p^3 + ...(...)p....$

$\Rightarrow pr^2 = -p^3 + (bc + ca + ab)p - 4Rrp$

$\Rightarrow bc + ca + ab = r^2 + Rr + p^2$

Vậy khi cần cm tam giác thỏa gì đó thì cần cm sự tồn tại a, b, c > 0 là nghiệm của pt:

$x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)x - 4Rrp = 0$ và a + b > c ; b + c > a ; c + a > b

<u>Mệnh đề 1'</u>: (Để khỏi ktra đk a + b > c ; b + c > a ; c + a > b ta xây dựng mệnh đề sau)

$\boxed{\begin{array}{l} Kí\ hiệu: a_1 = p - a; b_1 = p - b; c_1 = p - c\ là\ 3\ nghiệm\ dương\ pt: \\ x^3 - px^2 + (r^2 + 4Rr)x - r^2 p = 0\ \ (***)\ \ thì\ a,b,c\ là\ cạnh\ 1\ tam\ giác\ nào\ đó. \end{array}}$

<u>Ví dụ 5</u>: Tồn tại hay không tam giác có trọng tâm G, trực tâm H cùng thuộc đtròn nội tiếp (I)?

Phương hướng:

- Hãy biểu diễn các đk: IG = r ; IH = r theo r, R, p
- Viết lại pt tam giác đã tính tới các đk này
- CM pt nhận được có 3 nghiệm dương ---> tam giác với các cạnh a, b, c thỏa mãn

<u>Bổ đề 1:</u> $\boxed{IG^2 = \frac{p^2 - 16Rr + 5r^2}{9}}$

$Do: IA^2+IB^2+IC^2=3IG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

$\Leftrightarrow r^2+(p-a)^2+r^2+(p-b)^2+r^2+(p-c)^2=3IG^2+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Leftrightarrow ...$

<u>Hệ quả 1:</u> Nếu G thuộc (I) $\Leftrightarrow p^2=16Rr+4r^2$ (I)

<u>Hệ quả 1':</u> Nếu G thuộc (I) $\Leftrightarrow pt\ tam\ giác\ (***)\ có\ dạng: \boxed{x^3-px^2+\dfrac{p^2}{4}x-r^2p=0}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{8x^3}{p^3}-\dfrac{8x^2}{p^2}+\dfrac{2x}{p}-\dfrac{8r^2}{p^2}=0$. $Đặt: t=\dfrac{2x}{p}\Rightarrow pt\ bậc\ 3: t^3-2t^2+t-8(\dfrac{r}{p})^2=0$

Ta cần tính $\dfrac{r}{p}$ là xong.

<u>Bổ đề 2</u>: $\boxed{IH^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2}$

Gợi ý:

$\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OH}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

<u>Hệ quả 2:</u> $\boxed{H\ thuộc\ (I)\Leftrightarrow p^2=4R^2+4Rr+2r^2\ \ (II)}$

<u>Hệ quả 2'</u>: $\boxed{Nếu\ H\ thuộc\ (I)\ và\ G\ thuộc\ (I)\ thì: \dfrac{R}{r}=\dfrac{\sqrt{11}+3}{2}}$

* Khi đó từ (I) có: $\dfrac{p^2}{r^2}=\dfrac{16R}{r}+4=8\sqrt{11}+28 \qquad \Rightarrow \dfrac{p}{r}=2\sqrt{2\sqrt{11}+7}$

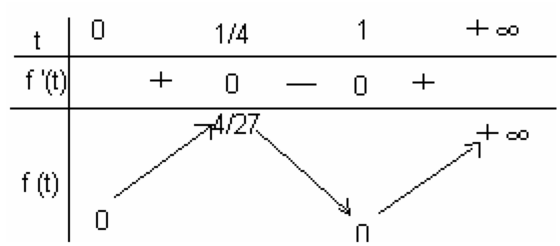
<u>Hệ quả 2''</u>: $\boxed{H\ thuộc\ (I)\ và\ G\ thuộc\ (I)\ thì: \dfrac{p^2}{r^2}=4(2\sqrt{11}+7)}$

<u>Ví dụ 6</u>: Giải bài toán sau:

$H\ thuộc\ (I)\ và\ G\ thuộc\ (I),\ pt\ tam\ giác\ trở\ thành: \boxed{t^3-2t^2+t=\dfrac{8}{4(2\sqrt{11}+7)}=\dfrac{2(7-2\sqrt{11})}{5}}$

Xét $t^3-2t^2+t=m$, ta tìm m để có 3 nghiệm > 0

Đặt f(t) = t^3-2t^2+t, có BBT:



=> PT có 3 nghiệm > 0 $\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{4}{27}$

Nhận thấy: $\dfrac{2(7-2\sqrt{11})}{5}<\dfrac{4}{27}$ cho nên tam giác có 3 nghiệm > 0

Vậy tồn tại tam giác. Xong.

<u>BÀI TẬP</u>:

1/ CM tam giác ABC vuông <=> 2R + r = p

2/ Tồn tại hoặc không 1 tam giác vuông có trọng tâm G thuộc đường tròn nội tiếp (I)?