

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC: 2023-2024
MÔN TOÁN**

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1:

Cho $x = 2 + \sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 5x^5 - 18x^4 - 10x^3 - 13x^2 + 3x + 4$

Ta có $x = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

Do đó $P = 5x^5 - 20x^4 - 5x^3 + 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + x^2 - 4x - 1 + 10x + 5$

$= 5x^3(x^2 - 4x - 1) + 2x^2(x^2 - 4x - 1) + 3x(x^2 - 4x - 1) + (x^2 - 4x - 1) + 10(2 + \sqrt{5}) + 5$

$P = 25 + 10\sqrt{5}$

Câu 2 Cho biểu thức $C = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{5-\sqrt{x}}{1-x} \right) : \frac{1-2\sqrt{x}}{x-1}$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức C là số nguyên.

ĐKXD $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$. Ta có $C = \frac{2}{1-2\sqrt{x}}$.

Để $C \in \mathbb{Z}$ thì $1-2\sqrt{x} \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow x \in [1; 0]$. Đối chiếu ĐKXD ta có $x = 0$

Câu 3 Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(29^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(30^4 + \frac{1}{4}\right)}$

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $n^4 + \frac{1}{4} = n^4 + n^2 + \frac{1}{4} - n^2 = \left(n^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2 = \left(n^2 - n + \frac{1}{2}\right)\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)$

Lần lượt thay $n = 1, 2, 3, \dots, 15$. Ta có

$A = \frac{\left(1^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(1^2 + 1 + \frac{1}{2}\right)\left(3^2 - 3 + \frac{1}{2}\right)\left(3^2 + 3 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(29^2 - 29 + \frac{1}{2}\right)\left(29^2 + 29 + \frac{1}{2}\right)}{\left(2^2 - 2 + \frac{1}{2}\right)\left(2^2 + 2 + \frac{1}{2}\right)\left(4^2 - 4 + \frac{1}{2}\right)\left(4^2 + 4 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(30^2 - 30 + \frac{1}{2}\right)\left(30^2 + 30 + \frac{1}{2}\right)}$

Ta thấy $1^2 - 1 + \frac{1}{2} = 2^2 - 2 + \frac{1}{2}; 2^2 + 2 + \frac{1}{2} = 3^2 - 3 + \frac{1}{2}, \dots, 29^2 + 29 + \frac{1}{2} = 30^2 - 30 + \frac{1}{2}$

Do đó $A = \frac{1}{1861}$

Câu 4 Tìm số tự nhiên n để $B = n^2 + 4n + 2013$ là số chính phương.

Đặt $n^2+4n+2013=a^2$ với $a \in \mathbb{Z}$ ta có $a^2-(n+2)^2=2009$

$\Leftrightarrow (|a|-|n+2|)(|a|+|n+2|)=2009$. Vì $|a|+|n+2|>|a|-|n+2|$, ta có các trường hợp:

$$\text{TH1. } \begin{cases} |a|+|n+2|=2009 \\ |a|-|n+2|=1 \end{cases} \Leftrightarrow 2|n+2|=2008 \Rightarrow n=1002$$

$$\text{TH2. } \begin{cases} |a|+|n+2|=287 \\ |a|-|n+2|=7 \end{cases} \Leftrightarrow 2|n+2|=280 \Rightarrow n=138$$

$$\text{TH3. } \begin{cases} |a|+|n+2|=49 \\ |a|-|n+2|=41 \end{cases} \Leftrightarrow 2|n+2|=8 \Rightarrow n=2$$

Vậy $n \in \{2; 138; 1002\}$ là các giá trị cần tìm

Câu 5

Gọi M là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O trên đường thẳng $y = (m+2)x+m-5$, với m là tham số. Khi OM đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Xét $m=-2 \Rightarrow y = -7$, khi đó $OM=7$

Xét $m \neq -2$, Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $y = (m+2)x+m-5$ với trục Ox, Oy.

Tọa độ của $A\left(\frac{5-m}{m+2}; 0\right)$, $B(0; m-5)$, suy ra $OA = \left|\frac{5-m}{m+2}\right|$; $OB = |m-5|$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OM^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 + OB^2} = \frac{m^2 - 10m + 25}{m^2 + 4m + 5} = \frac{-(7m+15)^2}{(m+2)^2 + 1} + 50 \leq 50$$

$$\Leftrightarrow OM \leq \sqrt{50}. \text{ Vậy OM có giá trị lớn nhất bằng } \sqrt{50}, \text{ khi đó } m = -\frac{15}{7}$$

Câu 6 Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$.

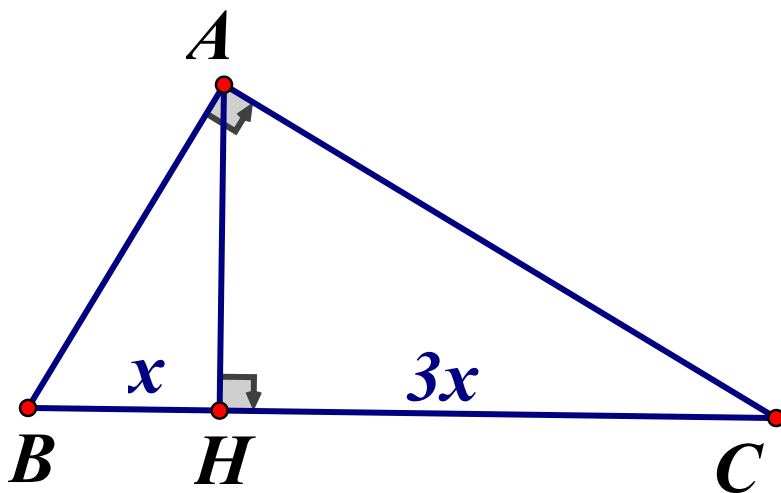
Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{4a^4 - b^4}{4b^4 - a^4}$.

$$\text{Ta có } a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 2a^2b + a^2b - 2ab^2 + 3ab^2 - 6b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b)(a^2 - ab + 3b^2) = 0. \text{ Vì } a^2 - ab + 3b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{11b^2}{4} = 0 \Rightarrow a = b = 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } a = 2b \Rightarrow P = \frac{-63}{12}$$

Câu 7 Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BC = 4BH$. Tính diện tích tam giác ABC.

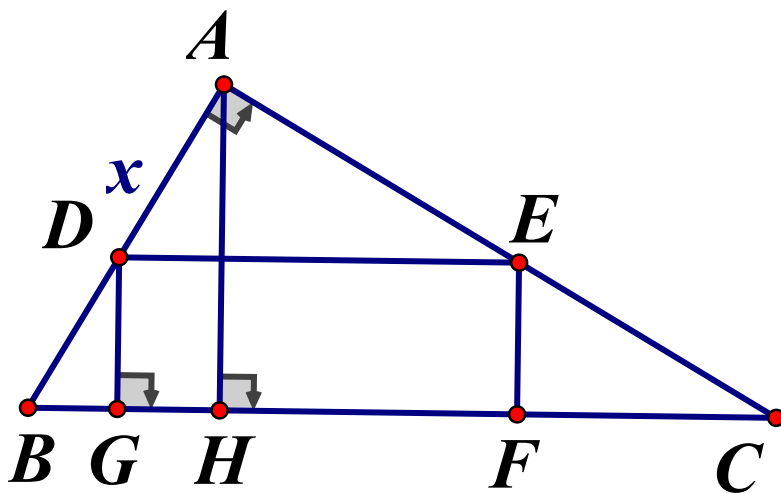


Đặt $BH = x$, suy ra $CH = 3x$

Ta có $BH \cdot CH = AH^2 \Rightarrow 3x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$BC = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 8 Cho tam giác ABC vuông tại A có $4AB=3AC$, $BC=25$. Vẽ hình chữ nhật DEFG nội tiếp tam giác ABC sao cho D thuộc cạnh AB, E thuộc cạnh AC, F và G thuộc cạnh BC. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật DEFG.



Kẻ đường cao AH

Ta có $4AB=3AC \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16}$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{25^2}{25} = 25 \Rightarrow AB=15; AC=20$$

$$\text{Lại có } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 12. \text{ Đặt } AD = x \Rightarrow BD = 15 - x$$

$$\text{Do đó } \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{x}{15} \Rightarrow DE = \frac{5x}{3}; \frac{DG}{AH} = \frac{BD}{AB} = \frac{15-x}{15} \Rightarrow DG = \frac{4 \cdot (15-x)}{5}$$

$$\text{Suy ra } S_{\text{DEFG}} = DE \cdot DG = \frac{1}{3} \cdot 4x(15-x) \leq \frac{1}{3} [x+15-x]^2 = 75$$

Vậy diện tích hình chữ nhật DEFG đạt giá trị lớn nhất bằng 75

Câu 9 Cho a, b không âm thỏa mãn $2a + b \leq 4, 2a + 3b \leq 6$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 - 2a - b$

$$\text{Ta có } 2a + b \leq 4 \Leftrightarrow 4 \geq 2a + b \geq 2a \Leftrightarrow 2 \geq a \Leftrightarrow 2a \geq a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 2a$$

$$\text{Do đó } P = a^2 - 2a - b \leq 2a - 2a - b \leq 0$$

Vậy GTLN của P bằng 0. Đạt được khi $(a; b) \in \{(0; 0), (2; 0)\}$

$$\text{Mặt khác } 2a + 3b \leq 6 \Leftrightarrow -b \geq \frac{2a-6}{3}$$

$$\text{Suy ra } P = a^2 - 2a - b \geq a^2 - 2a + \frac{2a-6}{3} = \left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{22}{9} \geq -\frac{22}{9}$$

$$\text{Vậy GTNN của P bằng } -\frac{22}{9}. \text{ Đạt được khi } (a; b) = \left(\frac{2}{3}; \frac{14}{9}\right)$$

Câu 10 Giải phương trình $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$

ĐKXD $x \geq 0$. Ta có $\sqrt{3x^2+33} - (x+5) = (x+2) - 3\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10x+8}{\sqrt{3x^2+33}+(x+5)} = \frac{x^2-5x+4}{(x+2)+3\sqrt{x}} \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+33}+(x+5)} - \frac{1}{(x+2)+3\sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\text{Xét } (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}. \text{ Xét } \left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+33}+(x+5)} - \frac{1}{(x+2)+3\sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33} - 6\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x-11)}{\sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}} - (x-1) = 0$$

$$\text{Với } x=1 \text{ là nghiệm. Với } x \neq 1 \text{ ta có } \frac{3(x-11)}{\sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}+3x-33$$

Kết hợp với $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$ được $x-3\sqrt{x}-40=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-8)=0 \Leftrightarrow x=64. \text{ Vậy tập nghiệm phương trình } S = \{1; 4; 64\}$$

$$\text{Câu 11 Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{2x+y+1}(x^2-x-1)=2 \end{cases}$$

$$\text{ĐKXD } x+y \neq 0; 2x+y+1 > 0; x^2-x-1 > 0 (*). \text{ Từ phương trình } x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1$$

$$\Rightarrow x^2(x+y) + y^2(x+y) + 2xy - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y) - x^2 + y^2(x+y) - y^2 + x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y-1) + y^2(x+y-1) + (x+y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y) = 0$$

Xét $x+y-1=0$ thay vào phương trình $\sqrt{2x+y+1}(x^2-x-1)=2$ được

$$\sqrt{x+2}(x^2-x-1) = 2. \text{ Với điều kiện } x^2-x-1 \geq 0, \text{ ta có } (x+2)(x^2-x-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^4-2x^3-x^2+2x+1) - 4 = 0 \Leftrightarrow x^5-5x^3+5x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^5-4x^3-x^3+4x+x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4-2x^3-x^2+2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-1)^2 = 0. \text{ Với } x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{Với } x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2-x-1 < 0 \text{ (loại)}$$

Xét $x^2+y^2+x+y=0$ ta có $x^2+y^2+x+y = (x^2-x-1) + y^2 + (2x+y+1) > 0$ (theo ĐKXD)

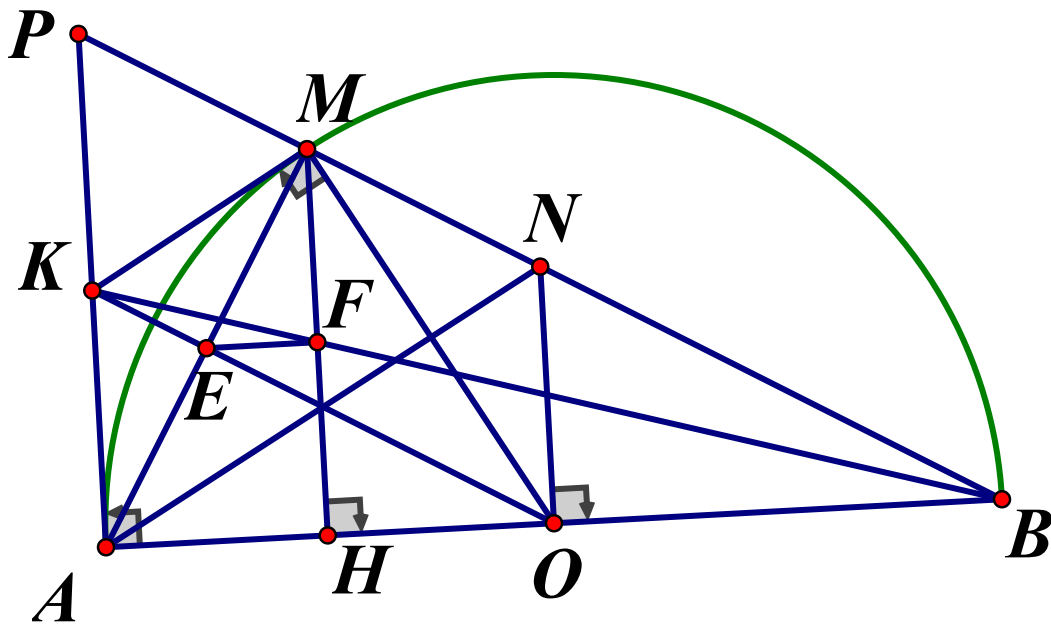
Thay vào ĐKXD (*). Hệ phương trình có tập nghiệm $(x; y) \in \left\{ (2; 1), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$

Câu 12 Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Lấy điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B), các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau tại K. Gọi E là giao điểm của AM và OK

Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BM tại N.

a) Tính BM.AN theo R

b) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh rằng EF song song với AB và BH.OK = OE.AB



a) Ta có $\widehat{BMA} = \widehat{BON} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle BMA \sim \triangle BON \Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{BA}{BN}$$

$$\Rightarrow BM \cdot BN = BO \cdot BA = 2R^2$$

Vì $\angle AOB = 90^\circ$ nên $\triangle ANB$ cân tại N
 Suy ra $AN=BN$, suy ra $BM \cdot AN = 2R^2$

b) Ta có $KM=KA$, $OM=OA$ nên KO là trung trực của AM suy ra $KO \perp AM$ và $EA=EM$ (1). Gọi P là giao điểm của đường thẳng BM và đường thẳng AK . Ta có $\triangle AMK$ vuông tại M , có $KM=KA$ nên $KM=KA=KP$. Áp dụng hệ quả định lý Thales,

$$\text{ta có } \frac{FM}{KP} = \frac{BF}{BK} = \frac{FH}{KA}$$

$\Rightarrow FM = FH$ (2). Từ (1) và (2) suy ra là đường trung bình của $\triangle AHM$ nên $EF \parallel AB$
 Mặt khác OK cũng là đường trung bình của $\triangle ABP$ nên $OK \parallel BP$ Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{AOK}$

Và $\widehat{AMB} = \widehat{OAK} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BMA \sim \triangle OAK \Rightarrow \frac{BM}{OA} = \frac{BA}{OK}$, tương tự $\triangle BHM \sim \triangle OEA$

$$\Rightarrow \frac{BM}{OA} = \frac{BH}{OE}. \text{ Suy ra } \frac{BA}{OK} = \frac{BH}{OE} \Rightarrow BH \cdot OK = BA \cdot OE$$

Câu 13 Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy + yz + zx + x^3 + y^3 + z^3}{5(xy + yz + zx) + 1}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $9 = x^3 + 1 + 1 + y^3 + 1 + 1 + z^3 + 1 + 1 \geq 3(x + y + z)$

$\Leftrightarrow x + y + z \leq 3$. Lại có $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 9 \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3$

$$\text{Do đó } 5P = \frac{5(xy + yz + zx) + 15}{5(xy + yz + zx) + 1} = 1 + \frac{14}{5(xy + yz + zx) + 1} \geq 1 + \frac{14}{5 \cdot 3 + 1} = \frac{15}{8} \Rightarrow P \geq \frac{3}{8}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{8}$. Đạt được khi $x = y = z = 1$.