

ĐỀ SỐ 7: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$ là:

A. $P = \frac{-2}{2x-1}$

B. $P = \frac{2}{2x-1}$

C. $P = \frac{-2}{2x+1}$

D. $P = \frac{2}{2x+1}$

Câu 2. Số tiền thuế thu nhập cá nhân khi mức thu nhập chịu thuế trong năm khoảng từ trên 60 triệu đến 120 triệu đồng được cho bởi công thức: $T(x) = 0,1x - 3$ (triệu đồng), trong đó $60 \leq x \leq 120$ (triệu đồng) là mức thu nhập chịu thuế của người đó trong năm. Khi mức thu nhập chịu thuế trong năm của người đó là 90 triệu đồng thì số tiền thuế phải đóng là bao nhiêu?

A. 6 triệu đồng

B. 0,6 triệu đồng

C. 60 triệu đồng

D. 9 triệu đồng

Câu 3. Cho $3a^2 + b^2 = 4ab$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$. Với : $a \neq -b$ và $a \neq b$ là:

A. $\frac{-1}{3}$

B. $\frac{-1}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

Câu 4. Nhiệt độ ở mặt đất đo được khoảng $30^\circ C$. Biết rằng cứ lên $1km$ thì nhiệt độ giảm đi $5^\circ C$. Hỏi khi ở độ cao $3km$ so với mặt đất thì nhiệt độ là bao nhiêu?

A. $15^\circ C$

B. $45^\circ C$

C. $20^\circ C$

D. $30^\circ C$

Câu 5. Gọi x là nghiệm của phương trình $5x - 12 = 4 - 3x$. x còn là nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $2x - 4 = 0$;

B. $-x - 2 = 0$;

C. $x - 7 = 0$;

D. $3x - 1 = 0$.

Câu 6. Các hệ số a và b sao cho đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư -6 , chia cho $x - 2$ dư 21 là:

A. $a = 3$; $b = 1$

B. $a = -3$; $b = -1$

C. $a = -3$; $b = 1$

D. $a = 3$; $b = -1$

Câu 7. Các hằng số a và b sao cho đa thức $x^4 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 4$ là:

A. $a = 0$ và $b = 16$

B. $a = 0$ và $b = 15$

C. $a = 0$ và $b = -15$

D. $a = 0$ và $b = -16$

Câu 8. Biết đa thức $f(x)$ chia cho $x - 2013$ thì dư 2012 , chia cho $x - 2014$ thì dư 2013 và chia cho $(x - 2013)(x - 2014)$ thì được thương là $x^2 - 1$ và còn dư. Dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 2013)(x - 2014)$ là:

A. $x + 1$

B. $1 - x$

C. $x - 1$

D. $2x - 1$

Câu 9. Cho tam giác ABC có diện tích S , trung tuyến AM . Gọi N là trung điểm của AM , BN cắt cạnh AC tại E , CN cắt cạnh AB tại F . Tính diện tích tứ giác $AFNE$ theo S là:

A. $2S$

B. $\frac{1}{2}S$

C. $\frac{1}{3}S$

D. $\frac{1}{6}S$

Câu 10. Cho hình thang $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I , hai cạnh đáy $AB = \sqrt{2}$ (cm); $DC = 4\sqrt{2}$ (cm); cạnh bên $AD = 3\sqrt{2}$ (cm). Độ dài cạnh bên BC là:

A. 4

B. 5

C. 6

D. Một số khác

Câu 11. Biết tỉ số các cạnh góc vuông của một tam giác vuông là $3 : 4$, cạnh huyền là 125 cm. tính độ dài hình chiếu của mỗi cạnh lên cạnh huyền là:

A. 45cm và 80cm

B. 50cm và 75cm

C. 40cm và 80cm

D. 55cm và 70cm

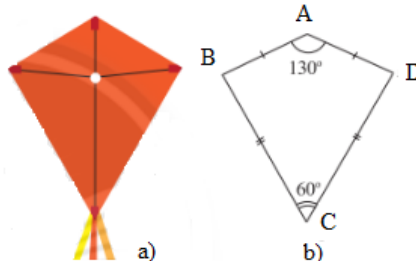
Câu 12. Phần thân của cái diều ở hình a được vẽ lại như hình b. Tìm số đo góc B và góc D ở hình b.

A. $B = D = 85^\circ$

B. $B = D = 90^\circ$

C. $B = D = 80^\circ$

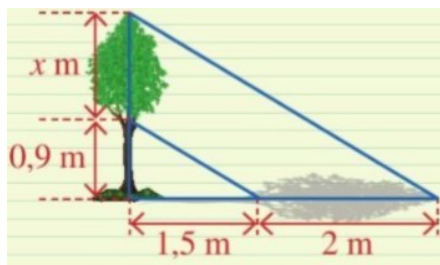
D. $B = D = 75^\circ$



Câu 13. Trong một tam giác vuông. Đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng 54cm^2 và 96cm^2 . Độ dài cạnh huyền là:

- A. 16cm B. 25cm C. 36cm D. Một số khác

Câu 14. Người ta đo bóng của một cây và được các số đo như hình vẽ. Giả sử rằng các tia nắng song song với nhau.



Khi đó, độ cao x là:

- A. 1,2 m B. 3,3 m. C. 0,7 m D. 2 m

Câu 15. Bạn An gieo một con xúc xắc 50 lần và thống kê kết quả các lần gieo ở bảng sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	10	8	6	12	4	10

Kết quả thuận lợi của biến cố “Gieo được mặt có số chấm lẻ” là:

- A. 0,4 B. 0,5 C. 0,6 D. 0,7

Câu 16. Một người mang ra chợ 5 giỏ táo gồm hai loại. Số táo trong mỗi giỏ lần lượt là : 20 ; 25 ; 30 ; 35 và 40. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại táo. Sau khi bán hết một giỏ táo nào đó, người ấy thấy rằng : Số táo loại 2 còn lại đúng bằng nửa số táo loại 1. Hỏi số táo loại 2 còn lại là bao nhiêu ?

- A. 30 B. 35 C. 40 D. Một kết quả khác

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm). a. Chứng minh rằng $n(n+1)(2n+1) : 6$

b. Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng:

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

Câu 2 (3,0 điểm): a. Đơn giản biểu thức sau :

$$A = (x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3.$$

b. Tìm các đa thức $f(x)$ bậc nhỏ nhất hơn 4 thỏa mãn hệ thức sau với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x , biết 3. $f(x) - f(1-x) = x^2 + 1$ (1)

Câu 3 (4,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM , đường phân giác góc A , cắt đường trung trực BC tại D , Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

a) Chứng minh rằng AD là phân giác HAM b) 3 điểm E, M, F thẳng hàng

c) Tam giác BCD là tam giác vuông cân.

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$ với

$a, b, c > 0$.

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi đáp án đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	A	B	A	A	D	D	C	D	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	A	B	A	A	C				

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1: Cho biểu thức $C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

Rút gọn biểu thức C

Giải

$$\text{ĐKXD: } x \neq \pm 1. C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} = \left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)} \right] \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1-2x} = \frac{-2}{2x-1}$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{7^2}{2.9} + \frac{7^2}{9.16} + \frac{7^2}{16.23} + \dots + \frac{7^2}{65.72}$

Nhận xét: Ta thấy: $9 - 2 = 7 \neq 7^2$ ở tử nên ta không thể áp dụng cách làm của các bài trên (ở tử đều chứa 7^2), nếu giữ nguyên các phân số đó thì ta không thể tách đ-ợc thành hiệu các phân số khác để rút gọn tổng trên đ-ợc. Mặt khác ta thấy: $\frac{7}{2.9} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9}$, vì vậy để giải quyết đ-ợc vấn đề ta phải đặt 7 làm thừa số chung ra ngoài dấu ngoặc, khi đó thực hiện bên trong ngoặc sẽ đơn giản.

Vậy ta có thể biến đổi:

$$\begin{aligned} C &= 7 \cdot \left(\frac{7}{2.9} + \frac{7}{9.16} + \frac{7}{16.23} + \dots + \frac{7}{65.72} \right) = 7 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{65} - \frac{1}{72} \right) = \\ &= 7 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{72} \right) = 7 \cdot \frac{35}{72} = 3 \frac{29}{72} \end{aligned}$$

Câu 3. Cho $3a^2 + b^2 = 4ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$

Điều kiện : $a \neq -b$

$$\text{Từ g/t : } 3a^2 + b^2 = 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - b)^2 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a - b)(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b/3 \text{ hoặc } a = b \text{ (tm)}$$

+) Nếu $a = b/3$ thì $P = -1/2$

+) Nếu $a = b$ thì $P = 0$

Câu 4. Giải bất phương trình sau :

$$\frac{x+1}{99} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+5}{95} \geq -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{99} + 1 + \frac{x+4}{96} + 1 + \frac{x+5}{95} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+99}{99} + \frac{x+4+96}{96} + \frac{x+5+95}{95} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+100}{99} + \frac{x+100}{96} + \frac{x+100}{95} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{96} + \frac{1}{95} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+100 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -100$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $S = \{x/x \geq -100\}$

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình

$$\left| x + \frac{4}{15} \right| - |-3,75| = -|-2,15| \Rightarrow \left| x + \frac{4}{15} \right| - 3,75 = -2,15 \Rightarrow \left| x + \frac{4}{15} \right| = -2,15 + 3,75$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{4}{15} \right| = 1,6 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{4}{15} = 1,6 \\ x + \frac{4}{15} = -1,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{28}{15} \end{cases}$$

Câu 6. Xác định các hệ số a và b sao cho đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư -6, chia cho $x - 2$ dư 21

Đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư -6 $\Rightarrow -a + b = -4$ ⁽¹⁾

Đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x - 2$ dư 21 $\Rightarrow 2a + b = 5$ ⁽²⁾

Từ (1) và (2), suy ra $a = 3$; $b = -1$

Câu 7. Xác định các hằng số a và b sao cho đa thức $x^4 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 4$

$x^4 + ax + b$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $x^2 + 4$ dư $ax + (b + 16)$

Vậy $x^4 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 4$ khi $ax + (b + 16) = 0x + 0$

Suy ra $a = 0$ và $b = -16$

Câu 8. Biết đa thức $f(x)$ chia cho $x - 2013$ thì dư 2012, chia cho $x - 2014$ thì dư 2013 và chia cho $(x - 2013)(x - 2014)$ thì được thương là $x^2 - 1$ và còn dư.

Tìm dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 2013)(x - 2014)$

Gọi thương của các phép chia $f(x)$ cho $x - 2013$ và $x - 2014$ lần lượt là P và Q

Ta có: $f(x) = (x - 2013).P + 2012 \Rightarrow f(2013) = 2012$

Và $f(x) = (x - 2014).Q + 2013 \Rightarrow f(2014) = 2013$

Vì đa thức chia $(x - 2013)(x - 2014)$ có bậc là 2 nên dư có bậc < 2 , do đó dư có dạng $ax + b$. Ta có:

$$f(x) = (x - 2013)(x - 2014)(x^2 - 1) + ax + b$$

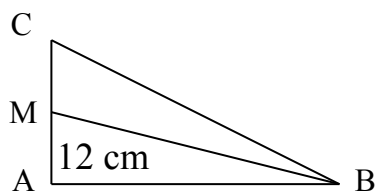
$$\Rightarrow f(2013) = 2013a + b = 2012$$

$$f(2014) = 2014a + b = 2013$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -1$$

Vậy dư của $f(x)$: $(x - 2013)(x - 2014)$ là $x - 1$

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = 12$ (cm); $AC = 5$ (cm). Kẻ đường phân giác trong BM (M nằm trên AC). Độ dài đoạn MA là:



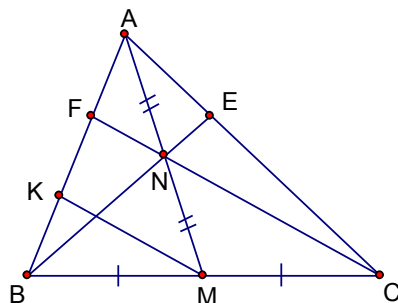
17cm

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{MA}{MC + MA} = \frac{AB}{AB + BC}$$

$$\Rightarrow MA = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC} = \frac{5 \cdot 12}{12 + \sqrt{12^2 + 5^2}} = 2,4$$

Câu 10. Cho tam giác ABC có diện tích S, trung tuyến AM. Gọi N là trung điểm của AM, BN cắt cạnh AC tại E, CN cắt cạnh AB tại F. Tính diện tích tứ giác AFNE theo S.



Vẽ $MK \parallel CF$

$$\Rightarrow BK = KF = FA$$

$$S_{AKM} = 4S_{AFN}; S_{BKM} = 2S_{AFN}$$

$$\Rightarrow S_{ABM} = 6S_{AFN} \text{ mà } S_{ABM} = \frac{S}{2} \Rightarrow S_{AFN} = \frac{S}{12}$$

$$\text{Tương tự có: } S_{ANE} = \frac{S}{12} \Rightarrow S_{AFNE} = \frac{S}{6}$$

Câu 11. Biết tỉ số các cạnh góc vuông của một tam giác vuông là $3 : 4$, cạnh huyền là 125 cm. tính độ dài hình chiếu của mỗi cạnh lên cạnh huyền.

- Hãy tìm độ dài 2 cạnh góc vuông biết

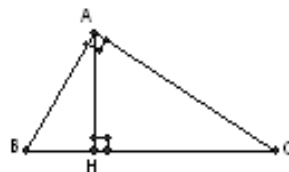
$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} ?$$

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC có :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$BC = 125 \text{ cm}$$



$$\Rightarrow BC = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 125 \Rightarrow a = 25$$

Do đó $BH = 45 \text{ cm}$, $HC = 80 \text{ cm}$

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. đường cao AH. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, AH.

CMR:

a. Tam giác ABH và Tam giác CAH đồng dạng

b. $\triangle ABP$ đồng dạng $\triangle CAQ$

c. $AP \perp CQ$

d. xét $\triangle HBA$ và $\triangle HAC$ có

góc AHB = góc AHC = 90° (gt)

góc ABH = góc HAC (cùng phụ với góc A_1)

e. vì $\triangle HBA$ đồng dạng $\triangle HAC$ (cmt)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{AC} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{2BP}{2AQ} \\ \text{vì } BP = PH \text{ (gt)} \\ AQ = QH \text{ (gt)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AQ}$$

Mà góc ABP = góc QAC (cmt)

$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AQ} \\ \text{Mà góc ABP} = \text{góc QAC (cmt)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABP \text{ đồng dạng } \triangle ACQ \text{ (c.g.c)}$

c) giả sử: CQ cắt QP tại O

$\triangle CHQ$ đồng dạng $\triangle COP$ (g.g)

$\Rightarrow$ góc QHC = góc POC

Mà góc CHQ = 90° (gt)

KL $CQ \perp AP$

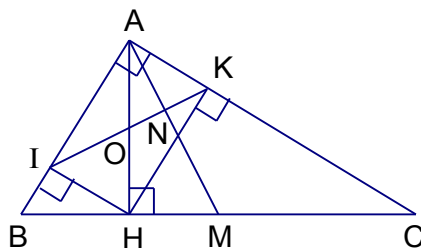
Câu 13. Trong một tam giác vuông. Đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng 54 cm^2 và 96 cm^2 . Độ dài cạnh huyền là: 25 cm (Bồi dưỡng HSG hình học 9 Trang 8)

Câu 14. Cho tứ giác ABCD có $\angle ADC + \angle DCB = 90^\circ$. $AD = BC$, $CD = a$, $AB = b$. Gọi I, N, J, M là trung điểm lần lượt của AB, AC, CD và BD, S là diện tích tứ giác INJM. Tứ giác INJM là hình gì?.

Ta có $IM = NJ = IN = MJ$ (cùng bằng $1/2 AD$ mà $AD = BC$), $CB \perp CB$ (gt)

$\Rightarrow \angle MIN = 90^\circ \Rightarrow MINJ$ là hình vuông

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC, gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với IK. Vẽ hình đúng



Tứ giác AIHK là hình chữ nhật (có 3 góc vuông)

Gọi O là giao điểm của AH và IK. N là giao điểm AM và IK.

$AM = MC = \frac{BC}{2}$ (Tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông)

$\Rightarrow MAK = MCK$

$OKA = OAK$ (Tính chất đường chéo hình chữ nhật)

$\Rightarrow MAK + OKA = MCK + OAK = 90^\circ$

$\Rightarrow AM \perp IK$.

Câu 16: Một người mang ra chợ 5 giỏ táo gồm hai loại. Số táo trong mỗi giỏ lần lượt là : 20 ; 25 ; 30 ; 35 và 40. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại táo. Sau khi bán hết một giỏ táo nào đó, người ấy thấy rằng : Số táo loại 2 còn lại đúng bằng nửa số táo loại 1. Hỏi số táo loại 2 còn lại là bao nhiêu ?

Bài giải:

Số táo người đó mang ra chợ là :

$20 + 25 + 30 + 35 + 40 = 150$ (quả)

Vì số táo loại 2 còn lại đúng bằng nửa số táo loại 1 nên sau khi bán, số táo còn lại phải chia hết cho 3.

Vì tổng số táo mang ra chợ là 150 quả chia hết cho 3 nên số táo đã bán phải chia hết cho 3.

Trong các số 20, 25, 30, 35, 40 chỉ có 30 chia hết cho 3. Do vậy người ấy đã bán giỏ táo đựng 30 quả.

Tổng số táo còn lại là :

$150 - 30 = 120$ (quả)

Ta có sơ đồ biểu diễn số táo của loại 1 và loại 2 còn lại :

Số táo loại 2 
 Số táo loại 1  } 120 quả

Số táo loại 2 còn lại là :

$120 : (2 + 1) = 40$ (quả)

Vậy người ấy còn lại giỏ đựng 40 quả chính là số táo loại 2 còn lại.

Đáp số : 40 quả

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. $n(n + 1)(2n + 1) : 6$

$$\begin{aligned} a. n(n + 1)(2n + 1) &= n(n + 1)[(n + 1) + (n + 2)] \\ &= n(n + 1)(n - 1) + n(n + 1)(n + 2) : 6 \end{aligned}$$

b. Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng: $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$.

Giải

Đặt $A = (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4)$, ta có $2^x \cdot A$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên $2^x \cdot A$ chia hết cho 5. Nhưng 2^x không chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5.

Nếu $y \geq 1$, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y \geq 1$ không thỏa mãn, suy ra $y = 0$.

Khi đó, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 1 = 11879$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 11880$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3; y = 0$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 2 (3,0 điểm): a) Đơn giản biểu thức sau :

$$A = (x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= [(x + y) + z]^3 - [(x + y) - z]^3 - [z - (x - y)]^3 - [z + (x - y)]^3 \\ &= [(x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3] - [(x + y)^3 - 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 - z^3] - \\ &\quad - [z^3 - 3z^2(x - y) + 3z(x - y)^2 - (x - y)^3] - [z^3 + 3z^2(x - y) + 3z(x - y)^2 + (x - y)^3] \\ &= 6(x + y)^2z - 6z(x - y)^2 = 24xyz \end{aligned}$$

b. Tìm các đa thức $f(x)$ bậc nhỏ nhất hơn 4 thỏa mãn hệ thức sau với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x , biết $3. f(x) - f(1 - x) = x^2 + 1$ (1)

Hướng dẫn

Giả sử $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + x_0$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định (đồng nhất hệ số) ta có:

$$4a_3x^3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow 2a_2x^2 = x^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

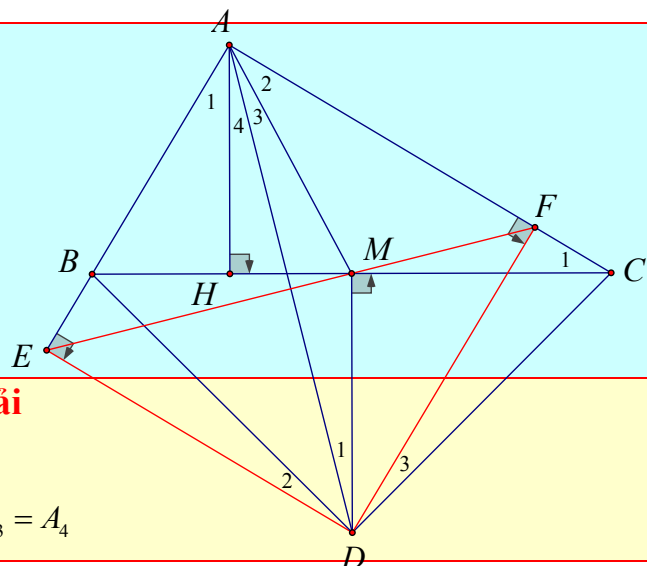
$$\text{Từ đó có: } (4a_1 + 1)x = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4} \text{ và } \Rightarrow 2a_0 = \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}$$

Câu 3 (4,5 điểm):

Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM , đường phân giác góc A , cắt đường trung trực BC tại D , Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

- a) Chứng minh rằng AD là phân giác HAM b) 3 điểm E, M, F thẳng hàng
c) Tam giác BCD là tam giác vuông cân.



Lời giải

a) Ta có: $C_1 = A_1$ (cùng phụ góc B)

$$\text{Mà } AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = MC \Rightarrow A_2 = C_1 \Rightarrow A_1 = A_2, A_3 = A_4$$

$\Rightarrow AD$ là tia phân giác.

b) $AH // DM \Rightarrow D_1 = A_4$,

mà $A_4 = A_3 \Rightarrow D_1 = A_3 \Rightarrow \triangle ADM$ cân

$\Rightarrow AM = MD$

Chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình vuông

$\Rightarrow EA = ED \Rightarrow FA = FD$

Ta có M, E, F đều nằm trên đường trung trực của AD

$\Rightarrow M, E, F$ thẳng hàng

c) $\triangle BED = \triangle CFD \Rightarrow D_2 = D_3$

$BDC = BDF + D_3 = BDF + D_2 = EDF = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân.

Câu 4 (1,0 điểm): Chứng minh các bất đẳng $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$
với $a, b, c > 0$

Giải

Ta có: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \Rightarrow a^3+b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a^2-2ab+b^2) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $a^3+b^3+abc \geq ab(a+b)+abc = ab(a+b+c)$

Suy ra: $\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$. Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Hết