

Bài 1: (6,0 điểm)

1) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$

a/ Tìm điều kiện của Q và rút gọn Q

b/ Tính giá trị của Q khi

$$x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$$

2) Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Bài 2: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x - 2013} + \sqrt{4x - 8052} = 3$

2) Cho $abc = 1$. Tính $S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$

Bài 3: (3,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$

2) Biết rằng a, b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a.b = 1$ Chứng minh :

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$$

Bài 3: (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$, tâm O cố định. Điểm A di động trên nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Chứng minh: $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

c) Xác định tam giác ABC sao cho tứ giác AEHD có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

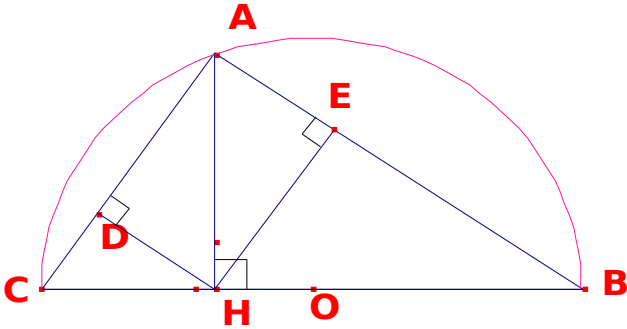
Bài 5: (1,0 điểm)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2(x + y) + 16 = 3xy$

HƯỚNG DẪN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Bài	Tóm tắt lời giải	Điểm
Bài 1 Câu 1a (2đ)	1.a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \sqrt{3}$	0,5
	$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$	0,5
	$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right)$	0,5
	$= \left(\frac{(x - \sqrt{3})\sqrt{3} + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right)$ $= \frac{1}{x - \sqrt{3}}$	0,5
Bài 1 Câu 1b (2 đ)	1.b) Ta có: $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$	0,5
	$x = \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{7}}{2}}$	0,5
	$x = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{7})^2}{2}} - \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{7})^2}{2}}$	0,5
	$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$ $x = \sqrt{2}$ Thay $x = \sqrt{2}$ vào Q ta có: $Q = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$	0,5
Bài 1 Câu 2 (2 đ)	2. Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50$ Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101 Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$ $= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2 \cdot 99 + 99^2) + \dots +$ $(50 + 51)(50^2 + 50 \cdot 51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2 \cdot 99 +$ $99^2 + \dots + 50^2 + 50 \cdot 51 + 51^2)$ chia hết cho 101 (1)	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25

	Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (50^3 + 100^3)$ Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2) Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B	0,25 0,25 0,25
Bài 2 (1,5 đ) (2,5 đ)	$\sqrt{x-2013} + \sqrt{4x-8052} = 3; DK: x \geq 2013$ 1. $\Rightarrow 3\sqrt{x-2013} = 3 \Leftrightarrow x = 2014 (TMĐK)$	0,5 1,0
	2. Cho $abc = 1$. $\Rightarrow ab = \frac{1}{c}$	0,5
	$S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$	
	$= \frac{1}{1+a+\frac{1}{c}} + \frac{1}{abc+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$	0,5
	$= \frac{c}{c+ac+1} + \frac{1}{b(ac+1+c)} + \frac{1}{1+c+ac}$	0,5
	$= \frac{bc+1+b}{b(1+c+ac)}$	0,5
Bài 3 (1,5đ)	1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0 \quad (1)$	
	$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 3y - 4) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (y-1)(y+4) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (y-1)(y+4) = -(x+y)^2 \quad (2)$	0,25
	Vì $-(x+y)^2 \leq 0$ với mọi x, y nên: $(y-1)(y+4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 1$	0,25
	Vì y nguyên nên $y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$	0,25
	Thay các giá trị nguyên của y vào (2) ta tìm được các cặp nghiệm nguyên (x; y) của PT đã cho là: (4; -4), (1; -3), (5; -3), (-2; 0), (-1; 1).	0,25

(1,5 đ)	2. - Vì $a.b = 1$ nên $\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b}$ $= \frac{(a - b)^2 + 2}{a - b} = (a - b) + \frac{2}{a - b}$ - Do $a > b > 0$ nên áp dụng BĐT Cô Si cho 2 số dương Ta có : $(a - b) + \frac{2}{a - b} \geq 2\sqrt{(a - b) \cdot \frac{2}{a - b}}$ Vậy $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$	0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
Bài 4 6đ		0,5
	a) Chứng minh tam giác ABC vuông Ta có: $OA = OB = OC = R$ $\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A (theo đl đảo)	0,25 0,25
	b) Chứng minh: $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$ Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật $AB \cdot EB = HB^2$ $AC \cdot EH = AC \cdot AD = AH^2$ Ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2$ (định lý Pi ta go) $\Rightarrow$ Đpcm	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
	b) $S_{(ADHE)} = AD \cdot AE \leq \frac{AD^2 + AE^2}{2} = \frac{DE^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$ $\Rightarrow S_{(ADHE)} \leq \frac{AH^2}{2} \leq \frac{AO^2}{2} = \frac{R^2}{2}$ Vậy $\text{Max } S_{(ADHE)} = \frac{R^2}{2}$ Khi $AD = AE$ hay $AB = AC$	1,0 0,5 0,5 0,5

	<=> Tam giác ABC vuông cân tại A	
Bài 5 (1,0đ)	Ta có $2(x+y)+16=3xy \Leftrightarrow 3xy-2x-2y=16$	
	$\Leftrightarrow y(3x-2)-\frac{2}{3}(3x-2)=16+\frac{4}{3} \Leftrightarrow (3x-2)(3y-2)=52$	0,25
	Giả sử: $x \leq y$ khi đó $1 \leq 3x-2 \leq 3y-2$ và $52 = 1.52 = 2.26 = 4.13$ ta có các trường hợp sau:	0,25
	$\begin{cases} 3x-2=1 \\ 3y-2=52 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x-2=2 \\ 3y-2=26 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x-2=4 \\ 3y-2=13 \end{cases};$ (loại)	0,25
	=> nghiệm nguyên dương của PT là: (1; 18); (18; 1); (2; 5); (5; 2)	
		0,25