

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi có một trang)

Bài I. (5,0 điểm)

- Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$.
- Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a^2 + ab = c^2 + bc$ và $a^2 + ac = b^2 + bc$.
Tính giá trị biểu thức $K = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Bài II. (5,0 điểm)

- Tìm tất cả các số tự nhiên m, n thỏa mãn $3^m + 2022 = n^2$.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p để phương trình $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = p$ có nghiệm nguyên dương.

Bài III. (2,0 điểm)

Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại trực tâm H. Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với hai đường thẳng AH, AO.

- Chứng minh $\angle AQE = 90^\circ$.
- Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh $IE^2 = IK \cdot ID$.
- Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF. Chứng minh JR vuông góc với QD.

Bài V. (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên tố a, b sao cho số $(a^3 + b)(b^3 + a)$ là lập phương của một số nguyên tố.
- Trên bảng ta viết số tự nhiên 222...2 gồm 2022 chữ số 2. Mỗi bước ta chọn 22 chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2, rồi biến đổi các chữ số được chọn theo quy tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2.
a) Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.
b) Giả sử sau khi thực hiện được n bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh n là số lẻ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a^2 + ab = c^2 + bc$ và $a^2 + ac = b^2 + bc$.

Tính giá trị biểu thức $K = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Lời giải

1. Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho $\sqrt{x+3}; \sqrt{3x+1}$, ta được

$$VT = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x+3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3x+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4+(x+3)}{2} + \frac{4+(3x+1)}{2} \right) = x+3 = VP.$$

$$\text{Vậy PT} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

2. Trừ theo vế hai đẳng thức $a^2 + ab = c^2 + bc$ và $a^2 + ac = b^2 + bc$ ta thu được $(b-c)(a+b+c) = 0$.

Ta xét hai trường hợp sau

* $a+b+c=0$, thay vào ta được $K=-1$.

* $b-c=0$. Khi đó $a^2 + ab = 2b^2$, dẫn tới $\begin{cases} a=b=c \\ a=-2b=-2c \end{cases}$

Nếu $a=-2b=-2c$ thì $a+b+c=0$ và do đó $K=-1$. Nếu $a=b=c$ thì ta thu được $K=8$.

Bài II. (5,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên m, n thỏa mãn $3^m + 2022 = n^2$.

2. Tìm tất cả các số nguyên tố p để phương trình $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = p$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

1. Giả sử m là một số tự nhiên thỏa mãn $3^m + 2022 = n^2$.

Nếu $m \geq 2$ ta có $n^2 - 2022 = 3^m : 9$. Điều này dẫn đến $n^2 + 3 : 9$.

Ta thấy, một số khi chia cho 9 có thể có các số dư sau: $\{0; 1; 2; \dots; 8\}$, từ đó dẫn tới một số chính phương khi chia cho 9 chỉ có thể dư 0; 1; 4; 7.

Khi đó $n^2 + 3$ không thể chia hết cho 9.

Vậy $m < 2$, thử trực tiếp ta có được $m=1, n=45$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó $m=1, n=45$.

2. Sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc ta có

$$x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x+y+1)(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy).$$

Khi đó phương trình tương đương với $(x+y+1)(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy) = p$.

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương là $x; y$. Khi đó $x+y+1 \geq 3$, nên chỉ có trường hợp sau

$$\begin{cases} x + y + 1 = p \\ x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy = 1 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai tương đương với $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Mà

$2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2$. x, y là các số nguyên dương, ta suy ra $(x; y) \in \{(2; 2), (2; 1), (1; 2)\}$. Chú ý $p = x + y + 1$ là số nguyên tố nên chỉ có cặp $(x; y) = (2; 2)$ thỏa mãn, khi đó $p = 5$.

Bài III. (2,0 điểm)

Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất

và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$.

Lời giải

* Tìm giá trị lớn nhất của P .

$$\begin{aligned} P &= 3 - \left(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \right) \\ &\leq 3 - \frac{9}{3+ab+bc+ca} \leq 3 - \frac{9}{3 + \frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{12}{13} \end{aligned}$$

Vậy $\max P = \frac{12}{13}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

* Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Cách 1: Không mất tính tổng quát giả sử $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$, suy ra $ab, bc, ca \geq 0$. Vì $0 \leq a, b \leq 1$ nên $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow ab + 1 \geq a + b$. Do đó

$$\frac{a+b}{ab+1} \leq 1.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng được

$$\frac{b+c}{bc+1} \leq 1; \quad \frac{c+a}{ca+1} \leq 1.$$

$$\text{Đặt } Q = \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 2Q &= \frac{a+b+c}{ab+1} + \frac{a+b+c}{bc+1} + \frac{a+b+c}{ca+1} \\ &= \frac{a+b}{ab+1} + \frac{c}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{a}{bc+1} + \frac{a+c}{ca+1} + \frac{b}{ca+1} \leq 1 + c + 1 + a + 1 + b = 5 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P = 3 - Q \geq 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\min P = \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1, c = 0$.

Cách 2: Vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $(b-1)(c-1) \geq 0$ hay $bc+1 \geq b+c$.

Mặt khác, $b+c=2-a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{b+c} \leq 1$ nên $\frac{1}{bc+1} \leq \frac{1}{b+c} \leq \frac{1+a}{b+c+a}$.

Chứng minh tương tự, ta được

$$Q \leq \frac{1+c}{a+b+c} + \frac{1+b}{a+b+c} + \frac{1+b}{a+b+c} = \frac{3+a+b+c}{a+b+c} = \frac{5}{2}.$$

Dẫn đến $P \geq 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó.

Cách 3: Do $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$. Điều này tương đương với $ab+bc+ca+1-abc-(a+b+c) \geq 0$.

Hay $ab+bc+ca \geq 1+abc \geq 1$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca} \\ &\geq \frac{ab}{1+ab+bc+ca} + \frac{bc}{1+ab+bc+ca} + \frac{ca}{1+ab+bc+ca} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{1+ab+bc+ca} = 1 - \frac{1}{1+ab+bc+ca} \geq 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại trực tâm H. Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với hai đường thẳng AH, AO.

1. Chứng minh $\angle AQE = 90^\circ$.

2. Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh $IE^2 = IK \cdot ID$.

3. Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF. Chứng minh JR vuông góc với QD.

Lời giải

1. Chứng minh $\angle AQE = 90^\circ$.

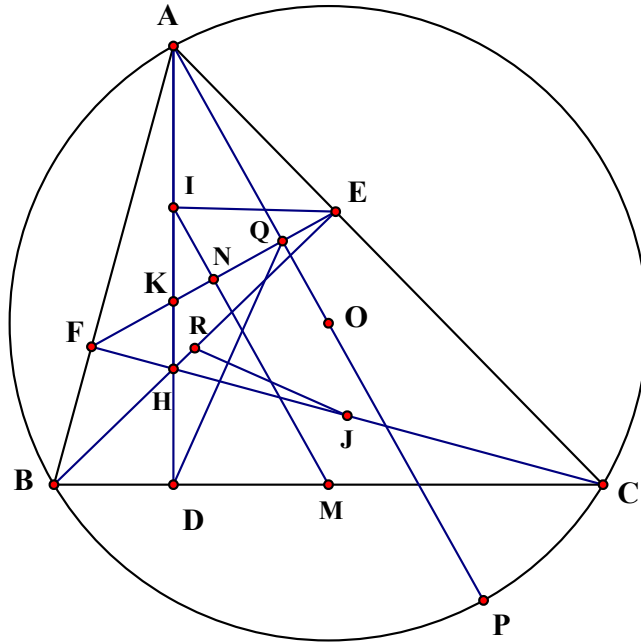
Để chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$.

Kẻ đường kính AP của (O). Để chứng minh tứ giác BHCP là hình bình hành, nên $BH = CP$.

Ta có $\triangle BHD \sim \triangle ACD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BH}{AC} = \frac{CP}{AC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle APC$ (c.g.c)

Điều này chứng tỏ $\angle BAD = \angle CAP$.

$\angle AEF + \angle CAP = \angle ABC + \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \angle AQE = 90^\circ$.



2. Chứng minh $IE^2 = IK.ID$.

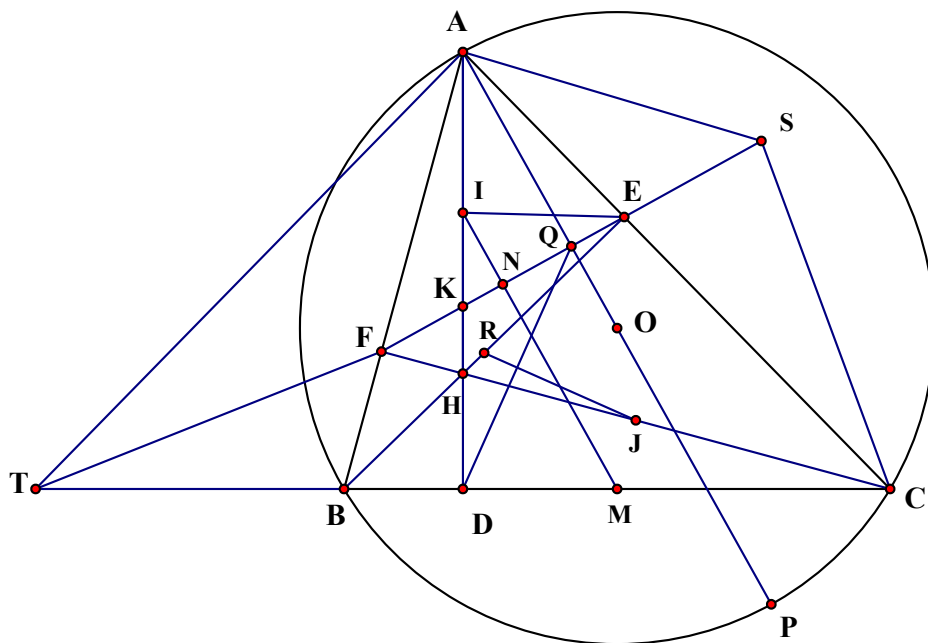
Xét tam giác AEH vuông tại E có $IE=IA=IH$ nên tam giác AIE cân tại I, suy ra $\angle IEA = \angle IAE$. Tương tự $\angle MEC = \angle MCE$.

Suy ra $\angle IEA + \angle MEC = \angle IAE + \angle MCE = 90^\circ \Rightarrow \angle IEM = 90^\circ$.

Từ $IE = IF, ME = MF$ suy ra MI là đường trung trực của EF, dẫn đến $MI \perp EF$. N là giao điểm của EF và MI suy ra $IE^2 = IN.IM$.

Mặt khác: $\triangle INK \sim \triangle IDM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IK}{IM}$.

Suy ra $IN.IM = IK.ID \Rightarrow IE^2 = IK.ID$.



3. Chứng minh $JR \perp QD$.

Gọi S là điểm đối xứng với F qua Q. Gọi T là điểm đối xứng với C qua D. Chứng minh được $\widehat{AF} = \widehat{AS} \Rightarrow \Delta TAF \sim \Delta CAS \Rightarrow FT = CS$.

Mặt khác, theo tính chất đường trung bình: $JQ = \frac{1}{2}SC$; $JD = \frac{1}{2}FT \Rightarrow JD = JQ$.

Chứng minh tương tự ta có $RD = RQ$, suy ra JR là đường trung trực của DQ, dẫn tới JR vuông góc với QD.

Bài V. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố a, b sao cho số $(a^3 + b)(b^3 + a)$ là lập phương của một số nguyên tố.

2. Trên bảng ta viết số tự nhiên 222...2 gồm 2022 chữ số 2. Mỗi bước ta chọn 22 chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2, rồi biến đổi các chữ số được chọn theo quy tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2.

a) Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.

b) Giả sử sau khi thực hiện được n bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh n là số lẻ.

Lời giải

1. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $(a^3 + b)(b^3 + a) = p^3$.

Rõ ràng $a \neq b$ vì nếu $a = b$ thì $p^3 = (a^3 + a)^2$. Điều này vô lý do p là số nguyên tố.

Giả sử $a > b$. Với chú ý $UC(p^3) = \{1; p; p^2; p^3\}$ ta suy ra

$$\begin{cases} a^3 + b = p^2 \\ a^3 + b = p \\ p > ab \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b^3 + a = 1 \\ a^3 + b = p^3 \end{cases}$$

Khả năng $\begin{cases} b^3 + a = 1 \\ a^3 + b = p^3 \end{cases}$ không thể xảy ra do $b^3 + a \geq 2$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Ta có $a = p - b^3 \Rightarrow (p - b^3)^3 + b = p^2$. Do đó $(p - b^3)^3 + b = p^2$ hay

$b^9 - b^3 \vdots p$. Vì vậy $b(b - 1)(b + 1)(b^2 + 1)(b^4 + 1) \vdots p$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} b - 1 = 0 \\ b^4 + 1 \vdots p \end{cases}$

Ta xét hai trường hợp như sau

* $b = 1 \Rightarrow a^3 + 1 = (a + 1)^2 \Rightarrow p = 3, a = 2 \Rightarrow a^3 - a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a - 2)(a + 1) = 0$.

Khi đó $a = 1$ hoặc $a = 2$. Thay vào ta được $(a; b) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$.

* $b^4 + 1 \vdots p$: Rõ ràng $b(b^3 + a) - (b^4 + 1) \vdots p \Rightarrow a \cdot b - 1 \vdots p$ (Vô lý vì $p > ab > 0$).

Vậy $(a; b) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$.

2. Cách 1:

a) Ta tổng quát bài toán như sau: Với mọi số có k chữ số 0 hoặc 2 ($k \in \mathbb{Z}^+$), ta chỉ có thể thực hiện hữu hạn phép biến đổi như đề bài. Ta chứng minh bài toán tổng quát bằng quy nạp theo k . Hiển nhiên với $k \in \{1, \dots, 21\}$ thì ta không thể thực hiện biến đổi nào (kết thúc sau 0 bước) còn với $k=22$ thì ta thực hiện được đúng 1 lần biến đổi (kết thúc sau 1 bước)

Giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn k (ở đây $k > 22$). Ta chứng minh khẳng định đúng với k .

Phản chứng, giả sử tồn tại một số có k chữ số 0 hoặc 2 mà ta có thể thực hiện được vô hạn lần phép biến đổi trên số đó. Có hai trường hợp:

- * Trong suốt quá trình biến đổi, ta không bao giờ biến đổi chữ số đầu tiên. Điều này tức là ta chỉ thực hiện biến đổi trên $k-1$ chữ số đằng sau, khi đó bài toán quy về thực hiện biến đổi trên số có $k-1$ chữ số. Theo giả thiết quy nạp thì ta không thể biến đổi vô hạn lần, mâu thuẫn với giả sử.

- * Tồn tại thời điểm ta biến đổi chữ số thứ nhất. Khi đó chữ số thứ nhất trở thành 0 và không còn tác dụng gì trong các phép biến đổi sau nữa, nói cách khác từ các phép biến đổi sau ta chỉ thực hiện với $k-1$ chữ số đằng sau. Tương tự như trên ta cũng không thể biến đổi vô hạn lần, mâu thuẫn với giả sử.

Như vậy giả sử trên là không đúng, suy ra với mọi số có k chữ số bằng 0 hoặc bằng 2 thì ta chỉ có thể thực hiện hữu hạn phép biến đổi như đề bài trên số đó.

b) Đánh số các chữ số từ trái sang phải là $1, 2, \dots, 2022$. Ta phát biểu một khẳng định như sau: Ta có thể thực hiện biến đổi với 22 chữ số bắt đầu từ chữ số thứ $22k+1$ (với $0 \leq k \leq 90$) một số lẻ lần, với 22 chữ số bắt đầu từ các chữ số còn lại là một số chẵn lần.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo t với t là vị trí của chữ số đó.

Với $t=1$ thì ta có thể thực hiện biến đổi với 22 chữ số bắt đầu từ chữ số thứ nhất chính xác 1 lần, điều này phù hợp với khẳng định trên.

Với $t \in \{2002, \dots, 2022\}$ thì ta chỉ có thể thực hiện biến đổi 0 lần do không có dãy 22 chữ số nào bắt đầu từ những chữ số ở vị trí này, điều này cũng phù hợp với khẳng định trên.

Giả sử khẳng định trên đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn ($1 < t < 2022$). Ta sẽ chứng minh khẳng định trên đúng với t .

- * Nếu $t=22k+1$ thì chữ số thứ t có thể bị biến đổi bởi các dãy bắt đầu từ các chữ số thuộc $\{22k-20, 22k-19, \dots, 22k\}$. Các dãy số được liệt kê trên đều có thể biến đổi chẵn lần theo giả thiết quy nạp, do đó dãy số bắt đầu từ chữ số thứ t chắc chắn phải được biến đổi ít nhất 1 lần (do nếu sau khi biến đổi kết thúc mà ta không thể thực hiện biến đổi trên dãy này, điều đó có nghĩa là chữ số thứ t đã bị biến đổi thành 0 bởi biến đổi trên các dãy số vừa liệt kê trên, tuy nhiên điều này là vô lý do chữ số thứ t bị biến đổi chẵn lần nên phải giữ nguyên bằng 2). Như vậy tại thời điểm ta bắt đầu biến đổi với dãy số bắt đầu từ vị trí thứ t thì chữ số thứ t đã được biến đổi số chẵn lần. Hơn nữa sau khi biến đổi xong ta cũng còn một số chẵn lần để biến đổi chữ số t trở về 2 sử dụng các dãy số đứng trước, điều đó có nghĩa ta còn một số

chẵn lần biến đổi với dãy số bắt đầu từ vị trí thứ t . Cộng thêm lần biến đổi đầu tiên, suy ra ta có thể biến đổi với dãy số bắt đầu từ vị trí thứ t một số lẻ lần.

* Nếu $t=22k+r$ với $1 < r \leq 22$ thì chữ số thứ t có thể bị biến đổi bởi các dãy số chứa t đứng trước, trong đó ngoại trừ dãy số $22k+1$ biến đổi một số lẻ lần thì các dãy số khác đều biến đổi một số chẵn lần, qua đó chữ số thứ t có thể bị biến đổi một số lẻ lần dựa vào các dãy số đứng trên. Như vậy hoặc dãy số bắt đầu từ chữ số thứ t không thể biến đổi lần nào (ta có thể biến đổi chữ số thứ t thành 0 qua một số lẻ lần biến đổi từ các dãy số đứng trên hoặc chữ số thứ t sẽ vẫn bằng 2 sau một số chẵn lần biến đổi với các dãy số đứng trên và rồi ta bắt đầu thực hiện biến đổi với dãy số bắt đầu từ chữ số thứ t này. Sau khi biến đổi xong ta lưu ý còn một số lẻ lần để biến đổi chữ số thứ t từ 0 thành 2, do đó ta còn một số lẻ lần có thể thực hiện các phép biến đổi với dãy số bắt đầu từ chữ số thứ t . Cộng thêm lần biến đổi đầu tiên, suy ra ta có thể biến đổi với dãy số bắt đầu từ vị trí thứ t một số chẵn lần.

Như vậy ta đã quy nạp hoàn tất, khẳng định đã được chứng minh. Bây giờ áp dụng khẳng định ta có số lần biến đổi bằng tổng của các số lần biến đổi với dãy 22 chữ số bắt đầu từ chữ số thứ t , với t chạy từ 1 đến 2022. Tổng trên có 2022 số hạng là các số tự nhiên với 91 số hạng lẻ (là các số lần biến đổi với dãy bắt đầu từ chữ số có dạng $t=22k+1$, với $0 \leq k \leq 90$). Suy ra tổng là lẻ, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2:

a) Xét $x = x_{2022}x_{2021} \dots x_1$ trong đó $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ nhận giá trị 0 hoặc 2. Ta xét hàm số

$$f(x) = x_{2022}.2022 + x_{2021}.2021 + \dots + x_1.2$$

Ta có nhận xét quan trọng là sau mỗi bước biến đổi x thành y thì $f(x) > f(y)$. Thật vậy, giả sử ta tác động vào các chữ số từ x_{n-21} tới x_n , thì ta có $y_m = 1 - x_m$ với $n \geq m \geq n - 21$.

$$\text{Khi đó } f(x) - f(y) = [x_n - (2 - x_n)].2^n + \dots + [x_{n-21} - (2 - x_{n-21})].2^{n-21}$$

Chú ý rằng có $x_n = 2$ nên

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= 2.2^n + (2x_{n-1} - 2).2^n + \dots + (2x_{n-21} - 2).2^{n-21} \geq 2.2^n + (-2).2^{n-1} + \dots + (-2).2^{n-21} \\ &= 2^{n+1} - 2^n - 2^{n-1} - \dots - 2^{n-20} = 2^{n-20} > 0 \end{aligned}$$

Đến đây chú ý $f(x) \geq 0$ với mọi x trên bảng, do đó quá trình sẽ phải dừng lại.

b) Xét x là số trên bảng. Đặt a_i là chữ số thứ 22_i (xét từ phải qua trái) của x , với $i=1,2,\dots,91$. Sau mỗi bước có một và chỉ một trong các a_i được tác động, do trong 22 số tự nhiên liên tiếp luôn có một số là bội của 22. Mà quá trình chỉ kết thúc khi các chữ số từ chữ số thứ 22 trở đi đều là 0, tức mọi $a_i=0$, kéo theo mỗi a_i được tác động lẻ lần. Do i nhận 91 giá trị nên số bước thực hiện sẽ là lẻ.