

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm có: 01 trang

Câu 1: (6 điểm)

$$M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x+6}}\right)$$

a) Cho

1. Rút gọn M

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

b) Tính giá trị của biểu thức P

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt[3]{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{2+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}-\sqrt{3}}}}}$$

Câu 2: (4 điểm) Giải phương trình

$$a) (x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 24$$

$$b) |2x - x^2 - 1| = 2x - x^2 - 1$$

Câu 3: (4 điểm)a/ Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$b/ \text{ Cho } x, y, z \text{ là các số dương thỏa mãn } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6.$$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 4: (5 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

2. Gọi α là số đo của góc BFE. Hai đường kính AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$. Đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

$$3. \text{ Chứng minh các hệ thức sau: } CE \cdot DF \cdot EF = CD^3 \text{ và } \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}.$$

Câu 5: (1 điểm)Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

- Hết -

Lưu ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

**PHÒNG GD&ĐT THANH
OAI**

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Môn: **Toán**

Câu 1: (6 điểm)

a) (4,5đ)

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M : Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

(0,5đ)

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \left[\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \left[\frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{x-9 - (x-4) + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*)

(2,5đ)

2)

$$M = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$$

(0,75đ)

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3; \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \in U(3)$

$U(3) \in \{\pm 1; \pm 3\}$ Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$

Nên $\sqrt{x+1} \in \{1; 3\}$ Xây ra các trường hợp sau:

(0,5đ)

$\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (TMĐK (*))

$\sqrt{x+1}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (không TMDK (*) loại)
(0,25đ)

Vậy $x = 0$ thì M nhận giá trị nguyên.

b_

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

Có $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = |4-\sqrt{2}| = 4-\sqrt{2}$
(0,5đ)

$$\sqrt{\sqrt{2+2\sqrt{3}+4}-\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}+4} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1|$$

(0,25đ)

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}-1}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3}+1| - \sqrt{3} = \sqrt{3}+1 - \sqrt{3} = 1$$

(0,75đ)

Với $x = 1$. Ta có $P = 3 \cdot 1^{2013} + 5 \cdot 1^{2011} + 2006 = 3 + 5 + 2006 = 2014$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2014$

Câu 2: (4 điểm)

a. $(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)=24$ 0,25 đ

$\Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)=24$ (1) 0,25 đ

Đặt $x^2+9x+19=y$ đ

(1) $\Leftrightarrow (y+1)(y-1)-24=0$ 0,5 đ

$\Leftrightarrow y^2-25=0$ 0,25 đ

$\Leftrightarrow (x^2+9x+24)(x^2+9x+14)=0$ 0,5 đ

$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$ 0,5 đ

Chứng tỏ $x^2+9x+24 > 0$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=-2; x=-7$

b. Ta có $2x-x^2-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2 < 0$ 0,25 đ

pt trở thành : $2x-x^2-1=x^2-2x+1$ 0,5 đ

$\Leftrightarrow x=1$ 0,25 đ

Câu 3: (4 điểm)a Cho hai số dương thỏa mãn: $x + y = 1$.**2đ**Tìm GTNN của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 y^2 + 1 + 1 + \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{x^4 y^4 + 2x^2 y^2 + 1}{x^2 y^2}$$

$$= \frac{(x^2 y^2 + 1)^2}{x^2 y^2} = \left(\frac{x^2 y^2 + 1}{xy}\right)^2 = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$$

0,5

Ta có: $xy + \frac{1}{xy} = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy}$

$$* \text{ Ta có: } xy + \frac{1}{16xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{16xy}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (1) *$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{16xy} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{16xy} \geq \frac{15}{4} \quad (2)$$

0,5

$$\Rightarrow \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$$

Từ (1) và (2)

0,25

$$\text{Vậy } M = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{16xy} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

0,25

Dấu “=” xảy ra (Với $x, y > 0$)

$$\text{Vậy min } M = \frac{289}{16} \text{ tại } x = y = \frac{1}{2}$$

0,5

b Cho x, y là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$ **2đ**

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Áp dụng BĐT } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (\text{với } a, b > 0)$$

0,5

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) \end{aligned}$$

0,5

Tương tự:
$$\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

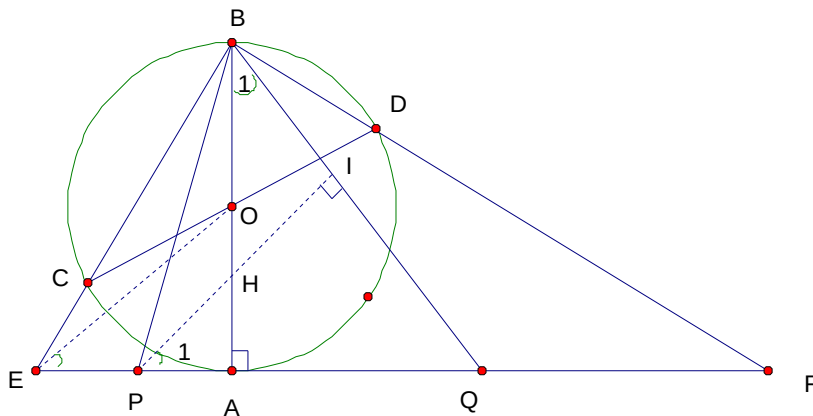
0,5

cộng vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z} + \frac{4}{y+z} \right) \\ &\leq \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

0,5

Caai 4: (5 điểm)



0,25

BA là đường cao của tam giác BPQ suy ra H thuộc BA

Nối OE, ΔBEF vuông tại B; $BA \perp EF$ nên $AB^2 = AE \cdot AF$ 0,75đ.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{\frac{1}{2}AB} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AF} \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AQ}$$

$\Rightarrow$ Vậy $\Delta AEO \sim \Delta ABQ$ (c.g.c). Suy ra $\angle ABQ = \angle AEO$ mà $\angle ABQ = \angle P_1$ (góc có các 0,75đ.

cạnh tương ứng vuông góc) nên $\angle AEO = \angle P_1$, mà hai góc đồng vị $\Rightarrow PH \parallel OE$. 0,25đ

Trong ΔAEO có $PE = PA$ (giả thiết); $PH \parallel OE$ suy ra H là trung điểm của OA.

2. Ta cần:

$$P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) [\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha] \quad 0,75đ.$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

Ta cần: 0,5đ

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 \geq 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 1 \geq 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4}$$

$$P = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Suy ra:

Do $\textcircled{A}$: $P_{\min} = \frac{1}{4}$ khi và chỉ khi: $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$ ($\forall \alpha$ lư

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \quad 0,25đ$$

gốc nhân)

Khi đó CD vuông góc với AB

0,25đ

3. Ta có ΔACB và ΔADB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$ ADBC là hình chữ nhật. 0,25đ

Ta có: $CD^2 = AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow CD^4 = AB^4 = AE^2 \cdot AF^2$ 0,25đ

$$= (EC \cdot EB)(DF \cdot BF) = (EC \cdot DF)(EB \cdot BF) = EC \cdot DF \cdot AB \cdot EF$$

$$\Rightarrow AB^3 = CE \cdot DF \cdot EF. \text{ Vậy } CD^3 = CE \cdot DF \cdot EF \quad 0,25đ$$

Ta có:

$$\frac{BE^2}{BF^2} = \frac{EA \cdot EF}{FA \cdot EF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{CE \cdot BE}{DF \cdot BF} \Rightarrow \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$$

Câu 5: Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$

$$\rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + K)^2 = n^4 + 2Kn^2 + K^2 \quad (K \in \mathbb{N}^+)$$

$$\rightarrow n^3 - 2Kn^2 = K^2 - 1 \rightarrow n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$$

$$\text{Mà } K^2 - 1 \leq n^2 \rightarrow K^2 = 1 \text{ hoặc } n^2 \leq K^2 - 1$$

Nếu $K^2=1 \rightarrow K=1 \rightarrow n^2(n-2)=0 \rightarrow n=2$

Thử lại $2^4+2^3+1=5^2$ (thỏa mãn)

Khi $K \neq 1 \rightarrow K^2 > K^2 - 1 \geq n^2 \rightarrow K > n$

$\rightarrow n - 2K < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$ **(1đ)**

Vậy $n = 2$