

ĐỀ SỐ 4: ĐỀ LUYỆN THI HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Cho hai hàm số $y = x + 4$ và $y = -x + 4$ có đồ thị là hai đường thẳng d_1 và d_2 . Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

- A. (0;4) B. (0;-4) C. (4;0) D. (-4;0)

Câu 2. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a, b, c \neq 0$. Giá trị biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$ là:

- A. 3 B. 1 C. 8 D. Một kết quả khác

Câu 3. Rút gọn biểu thức $E = (x - y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 + 6(x - y)^2$ ta được kết quả là:

- A. 2 B. $6(x - y)^2$ C. 1 D. - 2

Câu 4. Đồ thị của hàm $y = 3x + 6$ và hàm số $y = ax + 5$ là hai đường thẳng cắt nhau, khi đó hệ số a nhận những giá trị nào sau đây?

- A. $a \neq 3$ B. $a = 3$ C. $a = 6$ D. $a \neq 0$

Câu 5. Lớp 8A có 40 học sinh, trong đó có 22 nam và 18 nữ. Gặp ngẫu nhiên một học sinh của lớp, xác suất thực nghiệm của biến cố “Học sinh đó nam” là:

- A. 0,55 B. 0,56 C. 0,57 D. 0,58

Câu 6. Đa thức $f(x)$ biết rằng với mọi x biết $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ là:

- A. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ B. $f(x) = x^2 - 5x - 6$ C. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ D. $f(x) = x^2 - 3x - 2$

Câu 7. Cho $\frac{m}{x+1} + \frac{n}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$; Ta có tích $m.n$ bằng:

- A. 251 B. 150 C. 255 D. Một số khác

Câu 8. Đa thức bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn $f(1) = 5$; $f(2) = 11$; $f(3) = 21$. Giá trị của $f(-1) + f(5)$ là:

- A. 102 B. 202 C. 37 D. Một số khác

Câu 9. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a = 12\text{cm}$, $BC = b = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD. Diện tích tam giác AHB là:

- A. $34,56(\text{cm}^2)$ B. $34,54(\text{cm}^2)$ C. $34,45(\text{cm}^2)$ D. $34,56(\text{cm}^2)$

Câu 10. Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7cm là:

- A. 121cm^2 B. 136cm^2 C. 144cm^2 D. 225cm^2

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và góc $A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Số đo góc AMC là:

- A. 150° ; B. 120° C. 100° ; D. 90°

Câu 12. Tam giác ABC có $BC = 40\text{cm}$, phân giác AD dài 45cm, đường cao AH dài 36cm. Độ dài BD là:

- A. 10cm B. 15cm C. 25cm D. 30cm

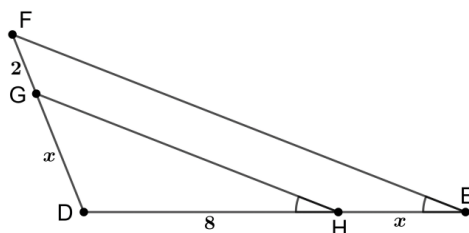
Câu 13. Cho hình thang cân ABCD, có đáy lớn $CD = 2\sqrt{5}\text{cm}$, đáy nhỏ AB bằng đường cao AH (H thuộc CD), đường chéo vuông góc với cạnh bên. Độ dài đường cao của hình thang đó là:

- A. 2 cm B. $2\sqrt{5}\text{cm}$
C. 3 cm D. 4 cm

Câu 14. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho AN=CM. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Ta có

- A. KD là tia phân giác của $\angle AKC$. B. $\triangle DMK = \triangle DNK$ C. $\angle NKD = \angle MKD$ D. $\triangle DAK = \triangle DBK$

Câu 15. Cho hình vẽ:



Độ dài x là:

- A. 4 B. -4 C. 2 D. 8

Câu 16. Ba bạn Toán, Tuổi và Thơ có một số vở. Nếu lấy 40% số vở của Toán chia đều cho Tuổi và Thơ thì số vở của ba bạn bằng nhau. Nhưng nếu Toán bớt đi 5 quyển thì số vở của Toán bằng tổng số vở của Tuổi và Thơ. Số vở của Thơ là:

- A. 5 B. 10 C. 12 D. 15

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm):

- a. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $3x^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 27$
b. Chứng minh $n^5 - 5n^3 + 4n : 120$ Với $\forall n \in \mathbb{N}$

Câu 2 (3,0 điểm): a. Giải phương trình sau: $(x^2+1)^3 + (1-3x)^3 = (x^2-3x+2)^3$ (1).

b. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}$ Cho biết $x+y+z = 0$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM , đường phân giác góc A , cắt đường trung trực BC tại D , Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

- a) Chứng minh rằng AD là phân giác HAM
b) Chứng minh rằng 3 điểm E, M, F thẳng hàng
c) Tam giác BCD là tam giác vuông cân.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho biểu thức: $y = \frac{x}{(x+2004)^2}$; ($x > 0$). Tìm x để biểu thức đạt giá trị lớn nhất. Tìm

giá trị đó

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	C	D	A	A	A	C	B	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	B	A	A	A	B				

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1. Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$ với

$x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq 3$. Rút gọn biểu thức A

$$A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right) = \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} =$$

$$\frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} = \frac{4x(x+2)x(2-x)}{(2-x)(2+x)(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3}$$

Vậy với $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq 3$ thì $A = \frac{4x^2}{x-3}$.

Câu 2 : Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a, b, c \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{a} \right)$.

Biến đổi giả thiết về dạng :

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$$

. Với $a + b + c = 0$. Tính được $P = \left(\frac{-c}{b} \right) \left(\frac{-a}{c} \right) \left(\frac{-b}{a} \right) = -1$

. Với $a = b = c$. Tính được $P = 2.2.2 = 8$

Câu 3. Rút gọn biểu thức $E = (x-y-1)^3 - (x-y+1)^3 + 6(x-y)^2$ ta được kết quả là: -2

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình :

$$\frac{x+2}{89} + \frac{x+5}{86} > \frac{x+8}{83} + \frac{x+11}{80}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{89}+1\right)+\left(\frac{x+5}{86}+1\right)>\left(\frac{x+8}{83}+1\right)+\left(\frac{x+11}{80}+1\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{x+91}{89}+\frac{x+91}{86}>\frac{x+91}{83}+\frac{x+91}{80} \\
&\Leftrightarrow (x+91)\left(\frac{1}{89}+\frac{1}{86}-\frac{1}{83}-\frac{1}{80}\right)>0 \\
&\Leftrightarrow x+91<0 \\
&\Leftrightarrow x<-91
\end{aligned}$$

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $||x|-3|=x+1$ là:

* Nếu $x \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với $|x-3|=x+1$

Với $x \geq 0$ rõ ràng $x+1 > 0$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
&|x-3|=x+1 \\
&\Leftrightarrow x-3=x+1 \text{ hoặc } x-3=-x-1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-3=x+1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-3=-x-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -3=1 \end{cases} \text{ vô lý} \quad \Leftrightarrow x=1 \\
&\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

* Nếu $x < 0$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned}
&|-x-3|=x+1 \Leftrightarrow |x+3|=x+1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x+3=x+1 \end{cases} \\
&\quad \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x+3=-x-1 \end{cases} \\
&|-x-3|=x+1 \Leftrightarrow |x+3|=x+1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x+3=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 2=0 \end{cases} \text{ (Vô lý)} \\
&\quad \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x+3=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2 \text{ (Không thoả mãn)}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \{ 1 \}$.

Câu 6: Xác định đa thức $f(x)$ biết rằng với mọi x thì $f(x+1)=x^2-3x+2$

Giải

C1: Đặt $y=x+1$ thì $x=y-1$ thay vào đẳng thức trên ta có

$$f(y)=y^2-5y+6. \text{ Vậy } f(x)=x^2-5x+6$$

Câu 7. Cho $\frac{m}{x+1} + \frac{n}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$; Ta có tích $m.n$ bằng:

A) - 300

B) 150

C. 200

D.255

Câu 8. Đa thức bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn $f(1) = 5$; $f(2) = 11$; $f(3) = 21$.

Tính $f(-1) + f(5)$.

Nhận xét: $g(x) = 2x^2 + 3$ thoả mãn $g(1) = 5$; $g(2) = 11$; $g(3) = 21$.

$Q(x) = f(x) - g(x)$ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm $x = 1, x = 2, x = 3$

Vậy $Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - a)$; ta có:

$$f(-1) = Q(-1) + 2(-1)^2 + 3 = 29 + 24a.$$

$$f(5) = Q(5) + 2.5^2 + 3 = 173 - 24a.$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(5) = 202$$

Câu 9. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a = 12\text{cm}$, $BC = b = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD.

a. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

b. Tính diện tích tam giác AHB.

Tam giác AHB đồng dạng với tam giác BCD

$$\frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AH = \frac{a.b}{BD}$$

Áp dụng định lý Py – ta – go, được : $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{225} = 15(\text{cm})$

Từ đó tính được $AH = \frac{12.9}{15} = 7.2(\text{cm})$

Tam giác AHB đồng dạng với tam giác BCD theo tỉ số $k = \frac{AH}{BC} = \frac{7.2}{9}$

Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác BCD và AHB

Ta có $S = 54(\text{cm}^2)$.

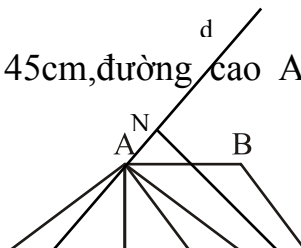
$$\frac{S'}{S} = k^2 = \left(\frac{7.2}{9}\right)^2 \Rightarrow S' = \left(\frac{7.2}{9}\right)^2 .54 = 34.56(\text{cm}^2)$$

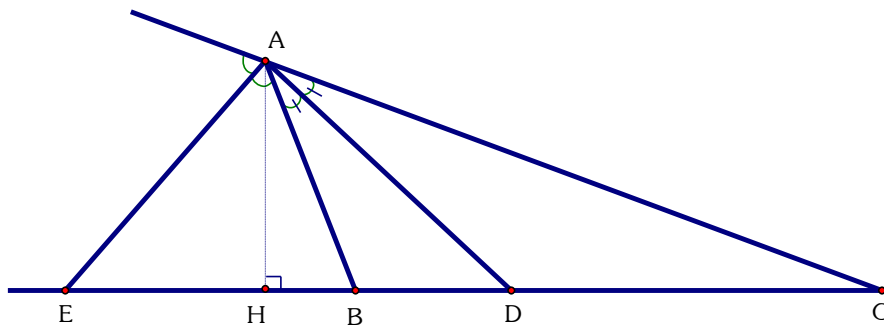
Vậy diện tích tam giác AHB bằng $34.56(\text{cm}^2)$

Câu 10. Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72cm , hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7cm là: 144cm^2 (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 133)

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB=AC$ và góc $A=20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM=BC$. Số đo góc AMC là: 150° (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 126)

Câu 12. Tam giác ABC có $BC = 40\text{cm}$, phân giác AD dài 45cm , đường cao AH dài 36cm . Tính độ dài BD, DC.





Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$. Pitago trong tam giác vuông AHD ta tính được $HD = 27\text{cm}$. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$. Suy ra

$$DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75\text{cm}$$

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75 - x}{75 + y} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác} \quad x + y = 40 \quad (2)$$

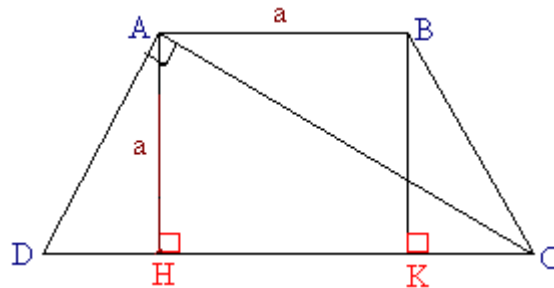
Thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x - 100) = 0$$

Do $x < 40$ nên $x = 15$, từ đó $y = 25$.

Vậy $DB = 15\text{cm}$, $DC = 25\text{cm}$

Câu 13. Cho hình thang cân ABCD, có đáy lớn $CD = 2\sqrt{5}$ cm, đáy nhỏ AB bằng đường cao AH (H thuộc CD), đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của



hình thang đó.

C/m:

Kẻ $BK \perp CD$ ($K \in CD$). Đặt $AB = AH = BK = HK = a > 0$

Do ABCD là hình thang cân nên $DH = CK = \frac{2\sqrt{5} - a}{2}$

$$\text{Suy ra: } CH = HK + CK = a + \frac{2\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a + 2\sqrt{5}}{2}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ADC vuông tại A

Ta có: $AH^2 = DH \cdot CH$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{2\sqrt{5}-a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}+a}{2}$$

Giải ta tìm được: $a = 2$ (do $a > 0$)

Vậy độ dài đường cao hình thang là: 2.

Câu 14. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho $AN=CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của $\angle AKC$.

Kẻ DI, DJ lần lượt vuông góc với AK, CK.

Ta có $S_{\triangle AND} = \frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (do chung đáy AD, cùng chiều cao hạ từ N) (1)

$S_{\triangle CDM} = \frac{1}{2} CM \cdot DJ = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (do chung đáy CD, cùng chiều cao hạ từ M) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} CM \cdot DJ \Leftrightarrow DI = DJ$ (do $AN = CM$)

$\Rightarrow \triangle DIK = \triangle DJK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle IKD = \angle JKD$

$\Rightarrow KD$ là tia phân giác $\angle AKC$.

Câu 15. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Một đường thẳng d qua O song song với 2 đáy cắt 2 cạnh bên AD, BC lần lượt tại E và F.

Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

Xét $\triangle ABD$ có $OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (Hệ quả của định lý Ta lét) (1)

Xét $\triangle ABC$ có $OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD}$ (Hệ quả của định lý Ta lét) (2)

Xét $\triangle ABC$ có $OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC}$ (Hệ quả của định lý Ta lét) (3)

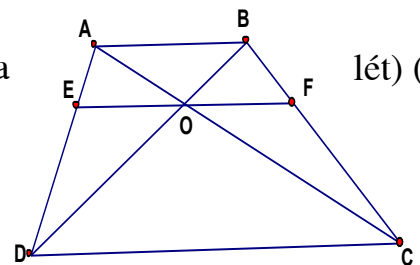
Xét $\triangle ABD$ có $OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC}$ (Hệ quả của định lý Ta lét) (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra :

$$\Rightarrow \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} \Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} = \frac{2}{EF}$$



Câu 16: Ba bạn Toán, Tuổi và Thơ có một số vở. Nếu lấy 40% số vở của Toán chia đều

cho Tuổi và Thơ thì số vợ của ba bạn bằng nhau. Nhưng nếu Toán bớt đi 5 quyền thì số vợ của Toán bằng tổng số vợ của Tuổi và Thơ. Hỏi mỗi bạn có bao nhiêu quyền vợ?

Bài giải:

Đôi $40\% = 2/5$.

Nếu lấy $2/5$ số vợ của Toán chia đều cho Tuổi và Thơ thì mỗi bạn Tuổi hay Thơ đều được thêm $2/5$: $2 = 1/5$ (số vợ của Toán)

Số vợ còn lại của Toán sau khi cho là:

$$1 - 2/5 = 3/5 \text{ (số vợ của Toán)}$$

Do đó lúc đầu Tuổi hay Thơ có số vợ là:

$$3/5 - 1/5 = 2/5 \text{ (số vợ của Toán)}$$

Tổng số vợ của Tuổi và Thơ lúc đầu là:

$$2/5 \times 2 = 4/5 \text{ (số vợ của Toán)}$$

Mặt khác theo đề bài nếu Toán bớt đi 5 quyền thì số vợ của Toán bằng tổng số vợ của Tuổi và Thơ, do đó 5 quyền ứng với: $1 - 4/5 = 1/5$ (số vợ của Toán)

Số vợ của Toán là: $5 : 1/5 = 25$ (quyền)

Số vợ của Tuổi hay Thơ là: $25 \times 2/5 = 10$ (quyền)

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:

$$3x^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 27$$

$$\text{b. } n^5 - 5n^3 + 4n : 120 \text{ Với } \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $3x^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 27$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 3x^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 27 \Leftrightarrow 3(x-3)^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 54(1)$$

$$+) \text{ Lập luận để } z^2 : 3 \Rightarrow z : 3 \Rightarrow z^2 : 9 \Rightarrow z^2 \geq 9(*)$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2-6) = 54(2)$$

$$(2) \Rightarrow 54 = 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2-6) \geq 3(x-3)^2 + 2.9 + 3y^2.3$$

$$\text{hay } (x-3)^2 + 3y^2 \leq 12 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 = 1; y^2 = 4 \text{ vì } y \text{ nguyên dương}$$

$$\text{- Nếu } y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow (1): 3(x-3)^2 + 5z^2 = 72 \Rightarrow 5z^2 \leq 72 \Rightarrow z^2 \leq \frac{72}{5} \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3 \text{ (do *)}$$

Khi đó $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:

$$3(x-3)^2 + 14z^2 = 126 \Rightarrow 14z^2 \leq 126 \Rightarrow z^2 \leq 9 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3 \text{ (vì } z \text{ nguyên dương)}$$

$$\text{Suy ra } (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (vì } x \text{ nguyên dương)}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad (2,0 \text{ điểm})$$

$$\begin{aligned} \text{b. } n^5 - 5n^3 + 4n &= (n^4 - 5n^2 + 4)n \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \end{aligned}$$

$$= n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2) : 120 \quad (1,5 \text{ điểm})$$

Câu 2 (4,0 điểm): a) Giải phương trình sau $(x^2+1)^3 + (1-3x)^3 = (x^2-3x+2)^3$ (1).

Giải:

$$a = x^2+1; b = 1-3x \rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Leftrightarrow 3ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-b \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=0 \text{ (vô lý)} \\ x^2+1=3x-1 (*) \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \Rightarrow x \in \left\{1; 2; \frac{1}{3}\right\}$$

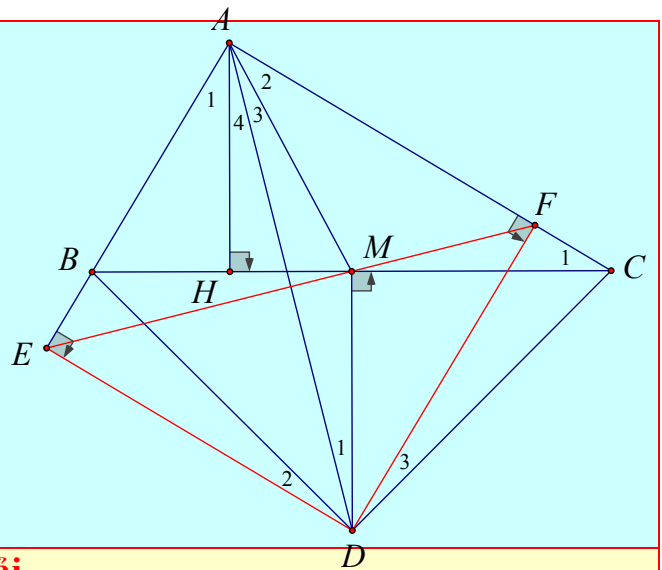
b. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}$ Cho biết: $x+y+z = 0$

HD: $(x+y+z) = 0 \Rightarrow (x+y+z)^2 = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = -2xy-2xz-2yz$.

Câu 3 (4,5 điểm):

Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM , đường phân giác góc A , cắt đường trung trực BC tại D , Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

- Chứng minh rằng AD là phân giác HAM
- 3 điểm E, M, F thẳng hàng
- Tam giác BCD là tam giác vuông cân.



Lời giải

a) Ta có: $C_1 = A_1$ (cùng phụ góc B)

$$\text{Mà } AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = MC \Rightarrow A_2 = C_1 \Rightarrow A_1 = A_2, A_3 = A_4$$

$\Rightarrow AD$ là tia phân giác.

b) $AH \parallel DM \Rightarrow D_1 = A_4$,

mà $A_4 = A_3 \Rightarrow D_1 = A_3 \Rightarrow \triangle ADM$ cân

$\Rightarrow AM = MD$

Chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình vuông

$$\Rightarrow EA = ED \Rightarrow FA = FD$$

Ta có M, E, F đều nằm trên đường trung trực của AD

$\Rightarrow M, E, F$ thẳng hàng

$$c) \triangle BED = \triangle CFD \Rightarrow D_2 = D_3$$

$$BDC = BDF + D_3 = BDF + D_2 = EDF = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho biểu thức: $y = \frac{x}{(x+2004)^2}$; ($x > 0$). Tìm x để biểu thức đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{2004y}$$

Bài toán đ- a về tìm x để t bé nhất

$$\begin{aligned} \text{Ta có } t &= \frac{(x+2004)^2}{2004x} = \frac{x^2 + 2 \cdot 2004x + 2004^2}{2004x} \\ &= \frac{x}{2004} + 2 + \frac{2004}{x} = \frac{x^2 + 2004^2}{2004x} + 2 \end{aligned} \quad (1)$$

Ta thấy: Theo bất đẳng thức Côsi cho 2 số d- ơng ta có:

$$x^2 + 2004^2 \geq 2 \cdot 2004 \cdot x \Rightarrow \frac{x^2 + 2004^2}{2004x} \geq 2 \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2004$

Từ (1) và (2) suy ra: $t \geq 4 \Rightarrow$ Vậy giá trị bé nhất của $t = 4$ khi $x = 2004$.

$$\text{Vậy } y_{\max} = \frac{1}{2004t} = \frac{1}{8016} \text{ Khi } x = 2004$$

-Hết-