

Câu 1.(5 điểm)

- a) Cho hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$ (với O là gốc tọa độ).
- b) Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, biết $4a + c > 2b + 8$ và $2a + 4b + 8c + 1 < 0$. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$.

Câu 2. (5 điểm)

- a) Một hộp đựng 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên cùng lúc 3 tấm thẻ. Tính xác suất để bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2(x^2 - x)\sqrt{3-2y} = (2y-3)x^2 - 1 \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}} = \frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3+x+2}}{2x+1} \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$

Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tính $M + m$

Câu 4 (6 điểm) a. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB=a$; $AC=a\sqrt{2}$ và $CAB=135^\circ$, tam giác SAB vuông tại B và tam giác SAC vuông tại A . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $BC, C'D', DD'$. Tính thể tích khối tứ diện $AMNP$?

Câu 5: (2 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD song song với BC $AD = 2BC$. Gọi E, F là hai điểm lần lượt nằm trên AB và AD sao cho $\frac{3AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = 5$ (E, F không trùng với A). Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỉ số thể tích hai khối chóp $S.BCDFE$ và $S.ABCD$?

Câu 7. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ với m là tham số thực. Tìm m để phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt. **(bài tập về nhà)**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$. Tìm m để bất phương trình

$$(x-m)f(x-m) + \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f(1+\sqrt{1-x^2})} \leq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1;1]. \text{ (bài tập về nhà)}$$

II. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1 (2.5 đ)	Pt hoành độ giao điểm của d và (C) $\frac{-2x+1}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m+4)x + m-1 = 0(*) \\ x \neq -1 \end{cases} \quad \Delta = m^2 + 24 > 0, \forall m \in R.$	0.5
	$ x_A - x_B = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } = \frac{\sqrt{m^2 + 24}}{2}; y_A - y_B = 2x_A - 2x_B $ $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{5} x_A - x_B = \frac{\sqrt{5(m^2 + 24)}}{2}$	0.5
	$d(O, AB) = \frac{ m }{\sqrt{5}}$	0.5
	$S_{\Delta OAB} = \sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(O, AB).AB = \sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{ m }{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5(m^2 + 24)}}{2} = \sqrt{7}$	0.5
	$\Leftrightarrow m^4 + 24m^2 - 112 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$	0.5
Câu 2 (2.5đ)	Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140.$	1.0
	Gọi A là biến cố rút được ba tấm thẻ sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị. Biến cố $\bar{A}$ xảy ra khi có các trường hợp sau: TH 1. Chọn ra 3 tấm thẻ ghi số liên tiếp có 18 cách.	0.5
	TH2. Chọn ra 3 tấm thẻ trong đó có đúng 2 tấm thẻ ghi số liên tiếp: Nếu hai tấm thẻ liên tiếp đó đánh số 1,2 và 19,20 thì có 17 cách chọn tấm thẻ còn lại. Nếu hai tấm thẻ đó bắt đầu từ cặp số 2,3 đến cặp số 18,19 thì mỗi cặp số sẽ có 16 cách chọn tấm thẻ còn lại. Vậy TH 2 có $2.17 + 17.16 = 306$ cách. Suy ra $n(\bar{A}) = 18 + 306 = 324$	0.5
	Suy ra $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{324}{1140} = \frac{27}{95}$, suy ra $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{68}{95}$	0.5
Câu 3 (2.5 đ)	Ta có $4a - 2b + c - 8 > 0 \Rightarrow f(-2) > 0$ $2a + 4b + 8c + 1 < 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	0.5
	Ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, nên tồn tại số $p > \frac{1}{2}$ sao cho $f(p) > 0$	0.5

	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, nên tồn tại số $q < -2$ sao cho $f(q) < 0$																
	Ta có $f(q).f(-2) < 0$; $f(-2).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)f(p) < 0$ Suy ra $f(x) = 0$ có 3 nghiệm thuộc các khoảng $(q; -2)$; $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; p\right)$	0,5															
	Nên hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị	0,5															
	Suy ra $g(x) = f(x) $ có 5 điểm cực trị.	0,5															
Câu 7 (2.0đ)	Điều kiện: $x \geq 0$. Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, suy ra $x > 0$, ta có $x^2 + (m + 2)x + 4 = (m - 1)\sqrt{x^3 + 4x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} - (m - 1)\sqrt{x + \frac{4}{x}} + m + 2 = 0 \quad (1)$	0.5															
	Đặt $\sqrt{x + \frac{4}{x}} = t$ xét $t(x) = \sqrt{x + \frac{4}{x}}$ ta có $t'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$, <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>t'</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$t = \sqrt{x + \frac{4}{x}}$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	2	$+\infty$	t'		-	0	+	$t = \sqrt{x + \frac{4}{x}}$	$+\infty$		2		$+\infty$	0.5
	x	0	2	$+\infty$													
	t'		-	0	+												
$t = \sqrt{x + \frac{4}{x}}$	$+\infty$		2		$+\infty$												
Với $t \geq 2$ phương trình (1) trở thành $t^2 - (m - 1)t + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 2}{t - 1} \quad (2)$																	
Xét hàm số $m(t) = \frac{t^2 + t + 2}{t - 1}$ với $t \geq 2$ ta có $m'(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t - 1)^2}$ <table><tr><td>t</td><td>2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$m'(t)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$m(t) = \frac{t^2 + t + 2}{t - 1}$</td><td>8</td><td></td><td>7</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	t	2	3	$+\infty$	$m'(t)$		-	0	+	$m(t) = \frac{t^2 + t + 2}{t - 1}$	8		7		$+\infty$	0.5	
t	2	3	$+\infty$														
$m'(t)$		-	0	+													
$m(t) = \frac{t^2 + t + 2}{t - 1}$	8		7		$+\infty$												
Dựa vào hai bảng biến thiên ta có: Phương trình đã cho có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm $t > 2$. Suy ra $7 < m < 8$.		0.5															
Câu 8.	Ta xét $f(-x) = \sqrt{1 + (-x)^2} + (-x) = \sqrt{1 + x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \frac{1}{f(x)}$ Vậy $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$	0,5															

(2.0đ)	Suy ra $(x-m)f(x-m) + \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f(1+\sqrt{1-x^2})} \leq 0 \Leftrightarrow (x-m)f(x-m) \leq -\frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{f(1+\sqrt{1-x^2})}$ $\Leftrightarrow (x-m)f(x-m) \leq (-1-\sqrt{1-x^2})f(-1-\sqrt{1-x^2})$ (1)	0,5
	Xét $g(t) = t.f(t) = t(\sqrt{1+t^2} + t) = t\sqrt{t^2+1} + t^2$	
	$g'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 2t \geq 2\sqrt{\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}} + 2t = 2\sqrt{t^2} + 2t$ (BĐT Cauchy) $\Rightarrow g'(t) \geq 2 t + 2t \geq 0$, Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$	0,5
	(1) $\Leftrightarrow g(x-m) \leq g(-1-\sqrt{1-x^2}) \Leftrightarrow x-m \leq -1-\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow m \geq x+1+\sqrt{1-x^2}$ Để (1) luôn đúng ta phải có $m \geq \underset{[-1;1]}{\text{Max}}(x+1+\sqrt{1-x^2})$ Đặt $h(x) = x+1+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow h'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Từ đó suy ra $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}(x+1+\sqrt{1-x^2}) = 1+\sqrt{2}$. Vậy $m \geq 1+\sqrt{2}$.	0,5

Câu 49: [2H1-3.5-4] (THPT Quế Võ 2- Bắc Ninh - Năm 2019 - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB=a$; $AC=a\sqrt{2}$ và $CAB=135^\circ$, tam giác SAB vuông tại B và tam giác SAC vuông tại A . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{6}$.

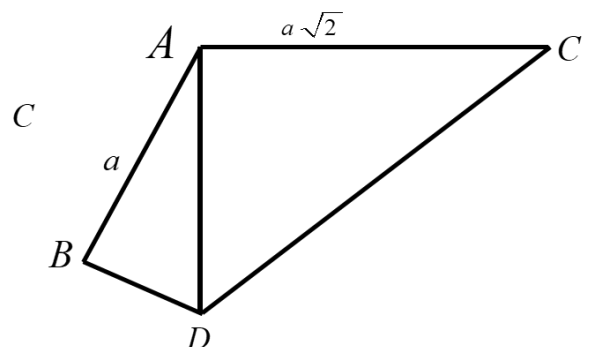
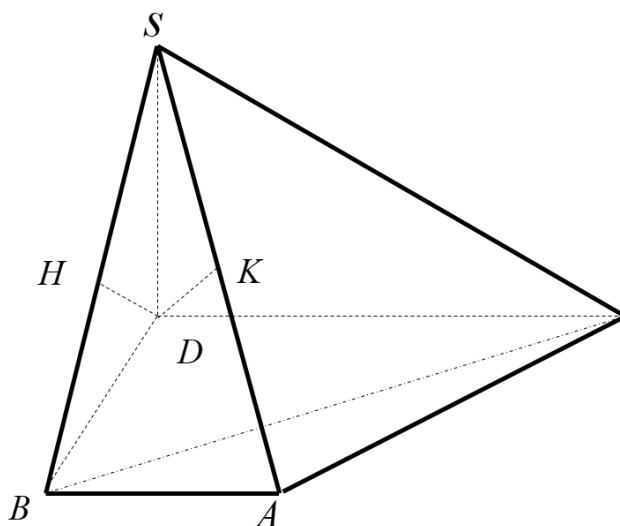
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) .

$$\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD.$$

$$\begin{cases} AC \perp SA \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAD) \Rightarrow AC \perp AD.$$

Tam giác ABC có $CAB=135^\circ \Rightarrow BAD=45^\circ$.

Tam giác ABD vuông tại B có $BAD=45^\circ$ suy ra tam giác ABD cân và $AD=a\sqrt{2}$.

Từ đó có tam giác ACD vuông cân tại $A \Rightarrow$ tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông tại B và D .

Trong mặt phẳng (SBD) , hạ $DH \perp SB (H \in SB)$. Dễ chứng minh $DH \perp (SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAD) , hạ $DK \perp SA (K \in SA)$. Dễ chứng minh $DK \perp (SAC)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) ta có $\alpha = (DH, DK) = HDK = 30^\circ$ do đó tam

giác DHK vuông tại H . Đặt $SD=x, (x>0)$.

Tam giác DHK vuông tại H có

$$\cos HDK = \frac{HD}{DK} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2a^2+x^2}}{\sqrt{2} \cdot ax} \Leftrightarrow \sqrt{6} \sqrt{a^2+x^2} = 2\sqrt{2a^2+x^2} \Leftrightarrow 6a^2+6x^2=8a^2+4x^2$$

$$\Leftrightarrow x=a. V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot SD \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{a^3}{6}. \text{ Vậy thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } \frac{a^3}{6}$$

Câu 47: [2H1-3.5-4] (SGD Tiền Giang - Năm 2019 - 2020) Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $BC, C'D', DD'$. Thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng

A. $\frac{1}{48}$.

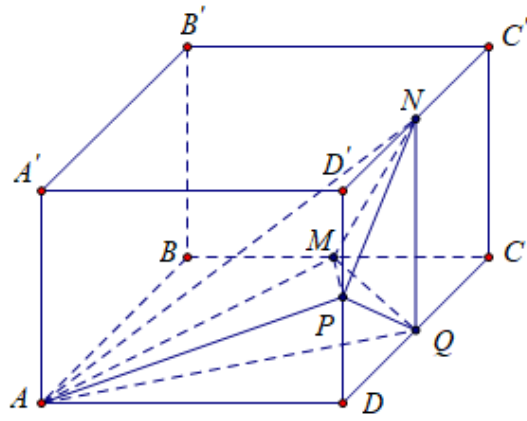
B. $\frac{5}{48}$.

C. $\frac{5}{16}$.

D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Q là trung điểm của CD. Ta có $V_{AMNP} = V_{AMNQ} - V_{AMPQ} - V_{MNPQ}$.

$$V_{AMNQ} = \frac{1}{3} S_{AMQ} \cdot NQ = \frac{1}{3} CC' \cdot \frac{3}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{8} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

$$V_{AMPQ} = \frac{1}{3} S_{AMP} \cdot DQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} DD' \cdot \frac{3}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{16} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{3} S_{NPQ} \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot NQ = \frac{1}{24} BC \cdot CD \cdot CC' = \frac{1}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

$$\text{Suy ra } V_{AMNP} = \frac{1}{48} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{48}.$$

Câu 42: [2H1-3.6-4] (THPT Kim Liên-Hà Nội -Năm 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD song song với BC , $AD = 2BC$. Gọi E, F là hai điểm lần lượt nằm trên AB và AD sao cho $\frac{3AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = 5$ (E, F không trùng với A).

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỉ số thể tích hai khối chóp $S.BCDFE$ và $S.ABCD$ là

A. $\frac{5}{4}$.

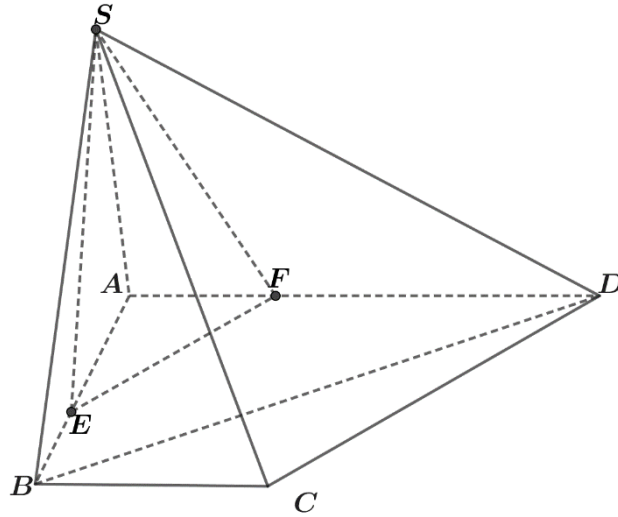
B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{17}{12}$.

D. $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $V = V_{S.ABCD}$, $V_1 = V_{S.BCDFE}$, $V_2 = V_{S.AEF}$. Khi đó $V_1 + V_2 = V$.

Vì đáy $ABCD$ là hình thang, AD song song với BC , $AD = 2BC$ nên $S_{ABCD} = \frac{3}{2} S_{\triangle ABD}$.

Ta có

$$\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{V_2}{V} = 1 - \frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{ABCD}} = 1 - \frac{S_{\triangle AEF}}{\frac{3}{2} S_{\triangle ABD}} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin \angle EAF}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle EAF} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AD}$$

$$\text{Đặt } \frac{AB}{AE} = x; \frac{AD}{AF} = y \quad (x, y \geq 1) \Rightarrow \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{2}{3xy}.$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } 3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3x. \text{ Vì } \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 3x \geq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x(5-3x)}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x(5-3x)}, \text{ với } x \in \left[1; \frac{4}{3}\right].$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5-6x}{(5x-3x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \notin \left[1; \frac{4}{3}\right]. \text{ Mà } f(1) = \frac{2}{3}; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \max \frac{V_1}{V} = \frac{2}{3} \text{ khi } x=1 \Leftrightarrow E \equiv B; \min \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \text{ khi } x=\frac{4}{3} \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow D \equiv F.$$

Do đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỉ số thể tích hai khối chóp $S.BCDFE$ và

$$S.ABCD \text{ là } \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

Câu 11: [2D1-3.12-4] (THPT Nguyễn Trãi - Thái Bình - Năm 2019 -2020) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$. Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

- A.** $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-2\sqrt{2}$. **D.** $-8-4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \cos \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos \varphi \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos \varphi \end{cases}, (\varphi \in [0; 2\pi]).$$

$$\text{Đặt } t = \frac{5x-y+2}{x+y+4} \text{ khi đó } t = \frac{5\left(\sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos \varphi\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\cos \varphi + 2}{\sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos \varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos \varphi + 4} = \frac{5\sin \varphi + \sqrt{3}\cos \varphi + 2}{\sin \varphi + \sqrt{3}\cos \varphi + 4}$$

$$\Leftrightarrow (t-5)\sin \varphi + \sqrt{3}(t-1)\cos \varphi = 2-4t (*).$$

Để tồn tại M, m của Q cần phương trình (*) có nghiệm, tức là

$$(t-5)^2 + 3(t-1)^2 \geq (2-4t)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $f'(t) = 6t^2 - 6t$

$$\text{Khi đó } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \\ t = 1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-\sqrt{2}) = -7-4\sqrt{2}, f(0) = -1, f(1) = -2, f(\sqrt{2}) = -7+4\sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } m = f(-\sqrt{2}) = -7-4\sqrt{2}, M = f(0) = -1$$

$$\text{Vậy } M+m = -8-4\sqrt{2}.$$

.....HẾT.....