

ĐỀ 29

Câu I. (6 điểm)

a). Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y = mx^9 + (m^2 - 3m + 2)x^6 + (2m^3 - m^2 - m)x^4 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-2)\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x+1}(\sqrt{y}+1) = (y-3)(1+\sqrt{x^2+y-3x}) \end{cases}$$

Bài II. (5 điểm)

a) Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ (các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

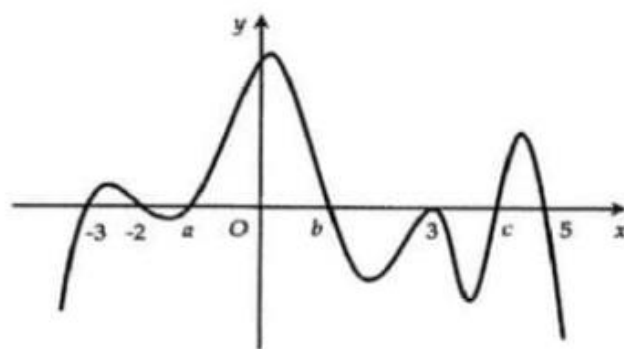
b) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị

hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với

$-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$ (có dạng như

hình vẽ bên dưới). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có

7 điểm cực trị?



Bài III. (2 điểm)

Cho hai tia Ax và By tạo với nhau góc α , đường thẳng AB vuông góc với cả Ax và By ; $AB = d$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai tia Ax và By , $AM = m$, $BN = n$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và MN .

Bài IV. (5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $CA = CB = \sqrt{2}$, $AB = 2$, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là chân đường phân giác trong góc C của tam giác SBC .

a. Tính thể tích khối chóp $D.ABC$.

b. Gọi M là điểm sao cho các góc tạo bởi các mặt phẳng (MAB) , (MBC) , (MCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$.

Bài V. (2 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}.$$

----- HẾT -----

Ghi chú: Giám thị không giải thích gì thêm!

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN CHI TIẾT VÀ HƯỚNG DẪN
CHẤM

$$1a) \text{ Ta có: } y' = 9mx^8 + 6(m^2 - 3m + 2)x^5 + 4(2m^3 - m^2 - m)x^3 \\ = x^3(9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m))$$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y' = 0$ có nghiệm bội lẻ $x = 0$, do đó để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$$9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m) = 0 \text{ có nghiệm } x = 0$$

$$\Rightarrow 2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $m = 0 \Rightarrow y' = 12x^5$ (không thỏa mãn).

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Với $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = -\frac{9}{2}x^8 + \frac{45}{2}x^5$ (không thỏa mãn).

Vậy có 1 giá trị của m .

Số cực trị cần tìm của hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ là 7 khi và chỉ khi hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 nghiệm dương khi và chỉ khi $f'(2x + m - 3) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy:

$$f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + m - 3 = -3 \\ 2x + m - 3 = -2 \\ 2x + m - 3 = a \\ 2x + m - 3 = b \\ 2x + m - 3 = 3 \\ 2x + m - 3 = c \\ 2x + m - 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-m}{2}; \frac{1-m}{2}; \frac{a+3-m}{2}; \frac{b+3-m}{2}; \frac{6-m}{2}; \frac{c+3-m}{2}; \frac{8-m}{2} \right\}$$

Trong đó chỉ có các nghiệm bậc lẻ được sắp thứ tự từ bé đến lớn là

$$x \in \left\{ \frac{-m}{2}; \frac{1-m}{2}; \frac{a+3-m}{2}; \frac{b+3-m}{2}; \frac{c+3-m}{2}; \frac{8-m}{2} \right\}.$$

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán tương đương với: } \begin{cases} \frac{b+3-m}{2} > 0 \\ \frac{a+3-m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < b+3 \\ m \geq a+3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 2, 3, 4.

1 b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-2)\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x+1}(\sqrt{y}+1) = (y-3)(1+\sqrt{x^2+y-3x}) & (2) \end{cases}$$

Lời giải

ĐK:
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+2} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$, ($a \geq 1, b \geq 0$), ta được $\begin{cases} x = a^2 - 2 \\ y = b^2 \end{cases}$.

Khi đó phương trình (1) trở thành $(b^2 - 2)a - b(a^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow ab(b - a) + 2(b - a) = 0$
 $\Leftrightarrow (b - a)(ab + 2) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(do $ab + 2 > 0$) nên PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x + 2 = y$.

Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) &= (x-1)(1+\sqrt{x^2-2x+2}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(1+\sqrt{(x+1)+1}) &= (x-1)(1+\sqrt{(x-1)^2+1}) \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t(1 + \sqrt{1+t^2})$ trên $\mathbb{R}$,

Ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có (3) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 5$, ta thấy $x = 3, y = 5$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; 5)$.

Nhận xét: Ta có thể biến đổi phương trình (1) đi theo hướng khác như sau:

Từ PT(2), ta có $y \geq 3$, nên PT(1) $\Leftrightarrow \frac{y-2}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ (4), ta có đặt $y - 2 = a$,

$a \geq 1$ thay vào (4), ta được $\frac{a}{\sqrt{a+2}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$, từ đây suy ra $x > 0$. Xét hàm số $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t+2}}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, ta được $a = x$ hay $y = x + 2$.

Câu II. Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ (các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Lời giải

Lấy ba thẻ từ 6 thẻ có số cách lấy là C_6^3 , nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_6^3 = 20$.

Gọi biến cố A : “rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù”.

Giả sử rút được bộ ba số là $(a; b; c)$, với $a < b < c$, do đó $4 \leq c$, nên $c \in \{4; 6; 8\}$.

a, b, c là ba cạnh của tam giác $\triangle ABC$, với $BC = a, CA = b, AB = c$ có góc C tù

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \\ 4 \leq c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 < c^2 \\ 4 \leq c < a + b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < c < a + b, \text{ với } c \in \{4; 6; 8\}.$$

+Xét $c = 4$ thì có bộ $(a; b) = (2; 3)$ thỏa mãn.

+Xét $c = 6$, do $a < b < c$, $6 = c < a + b < 2b$, nên $b = 4$ và $a = 3$. Suy ra có bộ $(a; b) = (3; 4)$ thỏa mãn.

+Xét $c = 8$, do $a < b < c$, $8 = c < a + b < 2b$, nên $b = 6$ và $a = 3$ hoặc $a = 4$. Suy ra có hai bộ $(a; b) = (3; 6)$ hoặc $(a; b) = (4; 6)$ thỏa mãn.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 4$.

$$\text{Nên xác suất cần tìm là } p = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Bài III. (2 điểm)

Cho hai tia Ax và By tạo với nhau góc α , đường thẳng AB vuông góc với cả Ax và By ; $AB = d$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai tia Ax và By , $AM = m, BN = n$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và MN .

Hướng dẫn giải

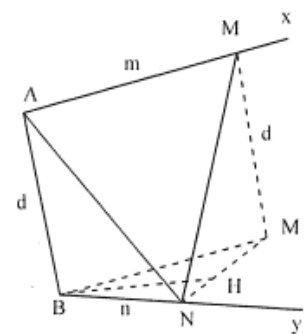
Vẽ $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AM}$ thì $ABM'M$ là hình chữ nhật có $AB // (MN)$

Khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và MN bằng

khoảng cách từ AB tới $mp(MNM')$ hay bằng khoảng cách từ B

tới mặt phẳng đó. Hạ $BHNM'$ thì $BH \perp mp(MNM')$, vậy $h = BH$.

$$\text{Ta có } S_{BMN} = \frac{1}{2} NM' \cdot BH \text{ nên } h = \frac{mn \sin \alpha}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha}}$$



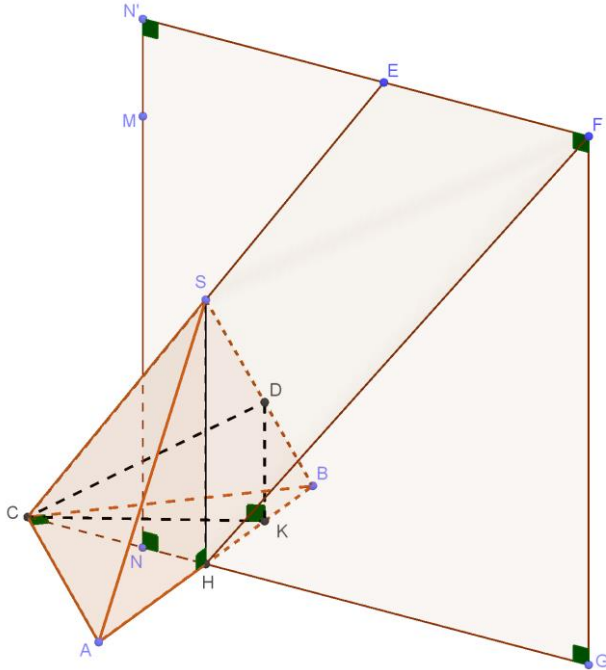
Bài IV. (5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $CA = CB = \sqrt{2}$, $AB = 2$, mặt bên ABC là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là chân đường phân giác trong góc C của tam giác SBC .

a. Tính thể tích khối chóp $D.ABC$.

b. Gọi M là điểm sao cho các góc tạo bởi các mặt phẳng (MAB) , (MBC) , (MCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB . Ta lần lượt có những điều như sau:

+ $SH \perp (ABC)$.

+ Tam giác CAB vuông cân ở C .

+ Tam giác SCA , SCB cân ở S .

+ $CH = 1$, $SH = \sqrt{3}$.

+ (SCH) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp $S.ABC$.

a. Ta có $\frac{V_{D.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{DB}{SB}$ do đó $\frac{V_{D.ABC}}{V_{S.ABC} - V_{D.ABC}} = \frac{DB}{DS} = \frac{CB}{CS} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tức $V_{D.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \right) \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

b. Gọi N là hình chiếu của M trên (ABC) . Do tính đối xứng của hình chóp $S.ABC$ qua (SCH) nên $M \in (SCH)$, tức $N \in CH$.

Do góc tạo bởi (MAB) , (MBC) , (MCA) với (ABC) bằng nhau nên khoảng cách từ N đến các cạnh của tam giác ABC bằng nhau, gọi khoảng cách này là x ta được $1 - x = x\sqrt{2}$. Tìm được

$$x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Gọi E là đối xứng của C qua S , dựng hình bình hành $CHFE$ ta được

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{CS}| = 2MF.$$

Dựng hình chữ nhật $NN'FG$ với N', G lần lượt thuộc MN , CH . Ta thấy MF nhỏ nhất khi và

$$\text{chỉ khi } MF = NG = 3 - CN = 3 - (1 - x) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$ là $\frac{6+4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

V) (2 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}.$$

Lời giải

+ Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$ và $a + b + c = 3 \Rightarrow a \geq 1$, $b + c = 3 - a \leq 2$ mà $b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow bc \leq 1$.

+ Xét $P = f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}$ ta chứng minh: $f(a, b, c) \leq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c} \leq a^3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 - \frac{3}{a} - \frac{6}{b+c} - \frac{6}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 - \frac{3}{b} - \frac{3}{c} \leq 2 \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 - \frac{12}{b+c} \Leftrightarrow \frac{4b^3 + 4c^3 - b + c^3}{4} + \frac{12bc - 3b + c^2}{bc(b+c)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4b + c}{4} \frac{b^2 - bc + c^2}{b+c} - \frac{b + c^3}{bc(b+c)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3b + c}{4} \frac{b - c^2}{bc(b+c)} - \frac{3b - c^2}{bc(b+c)} \leq 0 \Leftrightarrow b - c^2 \left[\frac{b+c}{4} - \frac{1}{bc(b+c)} \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b - c^2 \left[bc(b+c)^2 - 4 \right] \leq 0 \Leftrightarrow bc(b+c)^2 - 4 \leq 0 \text{ (đúng do } b+c \leq 2; bc \leq 1)$$

$$+ \text{Đặt } t = \frac{b+c}{2} \Rightarrow b+c = 2t \Rightarrow a = 3-2t$$

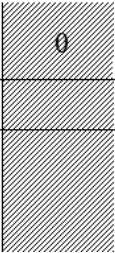
$$\Rightarrow f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = g(t) = 3-2t^3 + 2t^3 - \frac{3}{3-2t} - \frac{6}{t}, 0 < t \leq 1.$$

$$\Rightarrow g'(t) = -6 \frac{3-2t^2}{(3-2t)^2} + 6t^2 - \frac{6}{t^2} = 6 \left[-\frac{3-2t^2}{(3-2t)^2} + t^2 \right] \left[1 - \frac{1}{t^2(3-2t)^2} \right]$$

$$\Rightarrow g'(t) = 6 \frac{t-1^2-2t+1}{t^2(3-2t)^2} \frac{t-3}{-2t^2+3t+1}$$

$$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3-2t^2+t^2=0 \\ 1-\frac{1}{t^2(3-2t)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

BBT:

t		$\frac{1}{2}$	1
$g'(t)$		0	
$g(t)$		$-\frac{21}{4}$	

$+$ $-$




$$\Rightarrow \max_{(0;1]} g(t) = -\frac{21}{4} \Rightarrow P = f(a; b; c) \leq g(t) \leq -\frac{21}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2; b = c = \frac{1}{2}$ và các hoán vị $\Rightarrow \max P = \max f(a; b; c) = -\frac{21}{4}.$

----- HẾT -----