SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2023 – 2024**

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH **KHÓA NGÀY 06 THÁNG 6 NĂM 2023**

**Môn thi chuyên: Toán**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Ngày thi: 07 tháng 06 năm 2023**

***(****Đề thi gồm 01 trang)* **Thời gian làm bài:** **150 phút** *(không kể thời gian phát đề)*

**Bài 1. *(1,0 điểm)*** Cho là các số thực, thỏa mãn điều kiện

Tính giá trị của biểu thức .

**Bài 2. *(2,5 điểm)***

1. Giải phương trình: .
2. Giải hệ phương trình:

**Bài 3. *(2,5 điểm)*** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB < AC*), có đường cao *AH*. Đường tròn tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F.* Gọi J là giao điểm của Ai và *DE*; *K* là trung điểm của *AB*.

1. Chứng minh tứ giác *BIJD* nội tiếp.
2. Gọi *M* là giao điểm của *KI* và *AC*, *N* là giao điểm của *AH* và *ED*. Chứng minh
3. Gọi *Q* là giao điểm của *DI* và *EF*, *P* là trung điểm của *BC*. Chứng minh ba điểm *A, P, Q* thẳng hàng.

**Bài 4. *(2,0 điểm)*** Cho các số thực dương thỏa mãn

1. Chứng minh
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P* =

**Bài 5. *(1,0 điểm)*** Cho đường tròn tâm *O* nội tiếp hình thoi *ABCD*. Gọi *E, F, G, H* là các điểm lần lượt thuộc các cạnh *AB, BC, CD, DA* sao cho *EF, GH* cùng tiếp xúc với (*O*).

1. Chứng minh
2. Chứng minh *EH* song song *FG*.

**Bài 6. *(1,0 điểm)*** Xét các số nguyên thỏa mãn là số nguyên tố.

1. Chứng minh
2. Tìm tất cả các số nguyên sao cho *n* là một ước của 2023.

\_**HẾT**\_

|  |
| --- |
| **Bài 1. *(1,0 điểm)*** Cho là các số thực, thỏa mãn điều kiện  Tính giá trị của biểu thức . |

**Lời giải.**

Vì nên từ giả thiết, ta có:

, hay

Một cách tương đương, ta có:

Vì nên từ kết quả trên, ta suy ra , tức

|  |
| --- |
| **Bài 2. *(2,5 điểm)***  a) Giải phương trình: .  b) Giải hệ phương trình: |

**Lời giải.**

a) Điều kiện: . Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

,

Hay

.

Một cách tương đương, ta có

Vì nên . Kết hợp với phương trình trên, ta được , hay . Từ đây, ta suy ra và .

Giải ra, ta được (thỏa mãn). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

b) Điều kiện: và . Với chú ý

Và , phương trình thứ hai của hệ có thể được viết lại thành

(1)

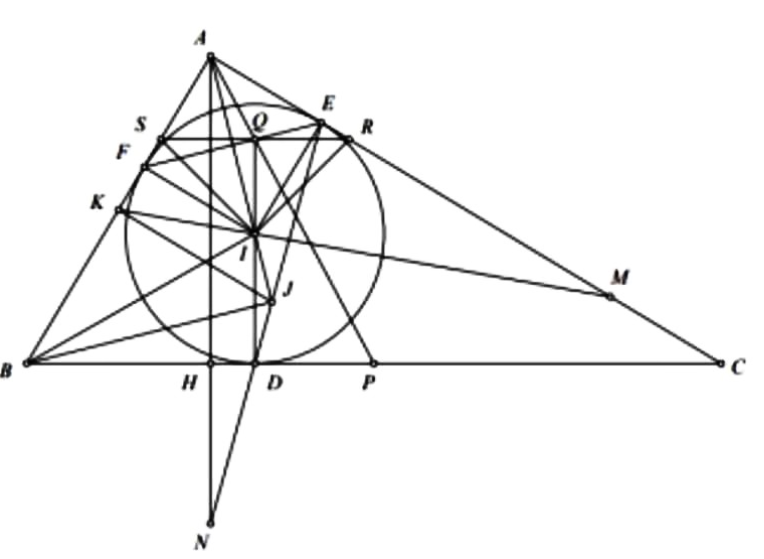
Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành , hay

.

Sau khi thu gọn, ta được Từ đó hoặc . Kết hợp với (1), ta tìm được các nghiệm của hệ phương trình đã cho là (0, 7), \*1, 9) và (4, 9).

|  |
| --- |
| **Bài 3. *(2,5 điểm)*** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB < AC*), có đường cao *AH*. Đường tròn tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F.* Gọi J là giao điểm của Ai và *DE*; *K* là trung điểm của *AB*.   1. Chứng minh tứ giác *BIJD* nội tiếp. 2. Gọi *M* là giao điểm của *KI* và *AC*, *N* là giao điểm của *AH* và *ED*. Chứng minh 3. Gọi *Q* là giao điểm của *DI* và *EF*, *P* là trung điểm của *BC*. Chứng minh ba điểm *A, P, Q* thẳng hàng. |

**Lời giải.**



a) Ta có nên tam giác cân tại *C*. Suy ra .

Áp dụng tính chất góc ngoài trong tam giác *AJE*, ta thấy

= . Suy ra tứ giác *BIJD* nội tiếp.

b) Do tứ giác *BIJD* nội tiếp nên

Vì và nên tam giác *JAB* vuông cân tại *J*. Theo giả thiết *K* là trung điểm của *AB*, ta có

Chú ý rằng (cùng vuông góc với *AB*) và (cùng vuông góc với B*C*), ta có

Vì nên

c) Đường thẳng qua *Q* vuông góc với *ID* cắt *AC*, *AB* lần lượt lại *R*, *S*.

Vì nên các tứ giác *IQER*, I*QSR* nội tiếp. Chú ý rằng tam giác *IEF* cân tại *I*, ta có Suy ra, tam giác *IRS* cân tại *I*. Do nên *Q* là trung điểm của *RS*.

Ta có (cùng vuông góc với *ID*) và *P, Q* lần lượt là trung điểm của *BC*, *RS* nên *A, P, Q* thẳng hàng (theo bồ đề hình thang).

|  |
| --- |
| **Bài 4. *(2,0 điểm)*** Cho các số thực dương thỏa mãn   1. Chứng minh 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P* = |

**Lời giải.**

a) Từ giả thiết ta có

Từ đó kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwwarz, ta được:

Dấu bằng xảy ra khi chẳng hạn .

b) Ta thấy rằng

*P* =

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và sử dụng kết quả ở ý (a) ta được

P

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

|  |
| --- |
| **Bài 5. *(1,0 điểm)*** Cho đường tròn tâm *O* nội tiếp hình thoi *ABCD*. Gọi *E, F, G, H* là các điểm lần lượt thuộc các cạnh *AB, BC, CD, DA* sao cho *EF, GH* cùng tiếp xúc với (*O*).   1. Chứng minh 2. Chứng minh *EH* song song *FG*. |

**Lời giải.**



a) Đường tròn (*O*) tiếp xúc với các cạnh của hình thoi *ABCD* nên *O* là trung điểm của hai đường chéo *AC* và *BD*.

Ta thấy *O* là tâm đường tròn bàng tiếp góc *D* của tam giác *DGH*. Suy ra = = .

Do tam giác cân tại *D* nên = . Kết hợp hai điều trên, ta thấy

Từ đó

Suy ra hai tam giác *OAH* và *GCO* đồng dạng góc-góc. Vì thế,

Suy ra .

b) Chứng minh tương tự ý trên, ta có . Suy ra . Chú ý rằng , ta thu được hai tam giác *AEH* và *CGF* đồng dạng cạnh-góc-cạnh. Suy ra Lại có (do ). Suy ra

Vậy (đpcm).

|  |
| --- |
| **Bài 6. *(1,0 điểm)*** Xét các số nguyên thỏa mãn là số nguyên tố.   1. Chứng minh 2. Tìm tất cả các số nguyên sao cho *n* là một ước của 2023. |

**Lời giải.**

a) Giả sử , khi đó và . Ta có

là số nguyên tố, mà

Nên , hay

Vì nên . Từ mâu thuẫn nhận được, ta suy ra .

b) Nếu , thì ta có , suy ra , mâu thuẩn. Do đó . Như vậy

.

Vì *n* là số nguyên tố và là ước của 2023 = nên .

**Trường hợp 1**: . Theo chứng minh ở trên, ta phải có

và . Từ đó, ta dễ dàng tính được

.

Mâu thuẩn vì 35 không chia hết cho 3

**Trường hợp 2:** . Theo chứng minh ở trên, ta phải có

và . Từ đó , suy ra và .

Do nên . Mà nên .

* Nếu , thì ta có . Suy ra , tức . Mà nên và . Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
* Nếu , thì ta có . Suy ra , tức . Mà nên . Thử trực tiếp, ta được và . Tuy nhiên, các số và không thỏa mãn .

Vậy, có duy nhất một bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài là