2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30–4 LẦN VI, NĂM 2000

1. Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} n_o = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \end{cases} ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n^3}{n}$

Giải

Ta có:
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}, \ \forall n \ge 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 = u_n^3 + \frac{1}{u_n^6} + 3 + \frac{3}{u_n^3} \qquad (1)$$

$$> u_n^3 + 3, \forall n \ge 0 \text{ (Do } u_n > 0, \ \forall n \ge 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1^3 > u_o^3 + 3 \\ u_2^3 > u_1^3 + 3, \qquad \forall n \ge 1 \\ u_n^{-3} > u_{n-1}^3 + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n^3 > 3n + u_o^3, \quad \forall n \ge 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_o^3 + 3n} + \frac{1}{\left(u_o^3 + 3n\right)^2} < u_n^3 + 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{9n^2}, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{k^2}, \quad \forall n \ge 2 \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\le 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2, \ \forall n \ge 1 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n,\ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \sqrt{2n},\quad \forall n \ge 1 \qquad (5)$$

Từ (2), (3), (4) và (5) suy ra:

$$3+\frac{u_o^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} < \frac{u_1^3}{n}+3+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{2}{gn}},\quad \forall n \ge 2$$

Vì $$\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{u_o^3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1^3}{n}+3+\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{gn}}\right) = 3$$

Vậy $$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^3}{n} = 3.$$

---

2 Cho dãy số $\{u_n\}$ được định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \quad n \in N^* \end{cases}$$

Đặt $a = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Tính a

---

Giải

- Với n = 1, ta có:

$$u_2^2 - u_1u_3 = 4 - 1.5 = (-1)^1$$

- Với $n = k + N$, giả sử:

$$u_{k+1}^2 - u_k.u_{k+2} = (-1)^k$$

- Với n = k + 1, ta có

$$u_{k+2}^2 - u_{k+1}.u_{k+3} = u_{k+2}\left(u_k + 2u_{k+1}\right) - u_{k+1}\left(u_{k+1} + 2u_{k+2}\right)$$

$$= u_{h+2}.u_k - u_{h+1}^2 = -(-1)^h = (-1)^{k+1}$$

Như vậy: $u_{n+1}^2 - u_n.u_{n+2} = (-1)^n,\ \forall n \in N$

Để ý rằng: $u_n \geq 1,\ \forall n \in N$, nên:

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_n + 2u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - 2\frac{u_{n-1}}{u_n} - 1 = \frac{(-1)^n}{u_n^2} \quad (*)$$

Hơn nữa, cũng từ: $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1},\ \forall n \in N$

$$\Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_n + u_{n+1} > 0,\ \forall n \in N$$

$$\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1},\quad \forall n \in N$$

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy tăng

Do đó, nên $\{u_n\}$ bị chặn thì $\{u_n\}$ hội tụ về $b \in R$

Lúc đó, từ: $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1},\ \forall n \in N$

$$\Rightarrow b = b + 2b$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$\Rightarrow$ vô lý (vì $u_n \geq 1,\ \forall n \in N \Rightarrow b \geq 1$)

$\Rightarrow \{u_n\}$ không bị chặn trên

Như vậy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên, nên: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Cùng với (*), suy ra : $a^2 - 2a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{2}$ (vì $a \geq 1$))

Vậy $\qquad a = 1 + \sqrt{2}$

3 Cho f: $N \mapsto Z$

$n \mapsto f(n)$ thỏa

$$\begin{cases} f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}, \forall m,n \in N \\ f(n) \geq 0,\ \forall n \in N \\ f(2) = 0 < f(3),\ f(9999) = 3333 \end{cases}$$

Tính f(2000)?

Giải

Do $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}, \quad \forall m,n \in N$

$$\Rightarrow f(m+n) = f(m) + f(n) \ \forall m,n \in N$$

- Lấy m = n = 1, ta có: $0 = f(2) \geq 2f(1)$

$$\Rightarrow f(1) \leq 0$$

Mà $f(1) \geq 0$ (do giả thiết)

$$\Rightarrow f(1) = 0$$

- Lấy m = 2, n = 1, ta có:

$$f(3) - \underbrace{f(2)}_{0} - \underbrace{f(1)}_{1} \in \{0,1\}$$

Mà $f(3) > 0$

$$\Rightarrow f(3) = 1$$

$$\Rightarrow f(2.3) = f(3+3) \geq f(3) + f(3) = 2$$

$$\Rightarrow f(2.3) \geq 2.$$

Giả sử $f(k.3) \geq k \quad (k \in N)$

khi đó $f((k+1)3) = f(k_3 + 3) \geq f(k_3) + f(3) \geq k+1$

Như thế ta có: $f(3.n) \geq n,\ \forall n \in N$

Hơn nữa, nếu $\begin{cases} n \in N \\ f(3n) < n \end{cases}$ thì

$$f(3(n+1)) = f(3n+3) \geq f(3n) + f(3) > n+1$$

Như thế ta có $f(3m) > m, \quad \forall m \geq n$

Nhưng vì $f(9999) = f(3.3333) = 3333$

$$\Rightarrow f(3.n) = n, \forall n \in \{1, 2, ..., 3333\}$$

$$\Rightarrow f(3.2000) = 2000$$

$$= f(3.2000)$$

$$\geq f(2.2000) + f(2000)$$

$$\geq 3.f(2000)$$

$$\Rightarrow f(2000) \leq \frac{2000}{3} < 667$$

Mặt khác:

$$f(2000) \geq f(1998) + f(2)$$

$$\geq f(3.666) = 666$$

$$\Rightarrow f(2000) \geq 666$$

Nhưng $666 \leq f(2000) < 667$

$$\Rightarrow f(2000) = 666 \text{ (vì } f(2000) \in Z)$$

---

4 Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_o > 0, u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \left(u_{n+1} - u_n^2\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \forall n \in N \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của u_n

Giải

+ Bằng quy nạp, ta có: $u_n > 0, \quad \forall n \in N$

+ $u_{n+2} = \left(u_{n+1}.u_n^2\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \ln u_{n+2} = \frac{1}{3}\ln u_{n+u} + \frac{2}{3}\ln u_n$$

Đặt: $V_n = \ln u_n, \quad \forall n \geq 0$

$$\Rightarrow V_{n+2} = \frac{1}{3}V_{n+1} + \frac{2}{3}V_n$$

....

$$x - x_n = (-1)^n \frac{x - x_o}{(1+x)^n(1+x_o)(1+x_1)\ldots(1+x_n)}, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow |x - x_n| \le \frac{|x - x_o|}{(1+x)^n} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n} \to 0$$

(khi $n \to +\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

25 Cho dãy $\{y_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y_{n-1}^2}{2}, \ n \ge 2 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng: $-\frac{1}{8} < y_n \le \frac{1}{2}, \ \forall n \ge 2$

b. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

Giải

- $n = 1$: $y_n = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8} < y_1 \le \frac{1}{8}$

a.
- $n = 2$: $y_2 = \frac{1}{2} - \frac{y_1^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

  $\Rightarrow -\frac{1}{8} < y_2 \le \frac{1}{2}$

- $n = k \ge 2$: Giả sử $-\frac{1}{8} < y_k \le \frac{1}{2}$

- $n = k + 1$: Ta có: $y_{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{y_k^2}{2}$

  $\Rightarrow -\frac{1}{8} < y_{k+1} \le \frac{1}{2}$

$$\left(\text{vì } -\frac{1}{8} < y_k \le \frac{1}{2}\right)$$

Vậy: $-\frac{1}{8} < y_n \le \frac{1}{2}, \ \forall n \ge 1$

b. Gọi y là nghiệm phương trình: $y = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}, \ -\frac{1}{8} \le y \le \frac{1}{2}$

Ta có:

$$y - y_1 = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{y^2}{2}$$

$$y - y_2 = -\frac{1}{2}\left(y^2 - y_1^2\right) = -\frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_1) = \frac{(-1)^2}{2^2}y^2$$

....

$$y - y_n = \frac{(-1)^n}{2^n}y^2(y + y_1)(y + 2)\ldots(y + y_{n-1}), \ \forall n \ge 2$$

Cụ thể, ta có $y = \sqrt{2} - 1$. Khi đó

$$|y + y_n| \le |y| + |y_n|$$

$$\le \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2} < 1, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow |y - y_n| \le \frac{1}{2^n}, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} y_n = y = \sqrt{2} - 1.$$

26 Cho dãy số dương $\{u_n\}$ thỏa: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 0$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$

Giải

Do $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 0$

Nên $\forall \varepsilon \in (0, q)$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \geq N \text{ thì } q - \varepsilon \frac{u_{n+p'}}{u_{np'-1}} < q + \varepsilon, \ \forall p' \geq 0$$

Cho p' = 1, 2,... $p(p \in N)$, ta có:

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$$

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q + \varepsilon$$

....

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < q + \varepsilon$$

Nhân các bất đẳng thức này vế với vế với nhau, ta có:

$$(q - \varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (q + \varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow u_n^{\frac{1}{n+p}} (q - \varepsilon)^{\frac{p}{n+p}} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}} (q + \varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}$$

$n \geq N$, cho $p \to +\infty$, ta được:

$$q - \varepsilon \leq \lim_{p \to +\infty} \sqrt[n+p]{u_{n+p}} \leq q + \varepsilon$$

$$\Rightarrow q - \varepsilon \leq \lim_{p \to +\infty} \sqrt[N+p]{u_{N+p}} \leq q + \varepsilon$$

27 a. Chứng minh rằng: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \ \forall x \geq 0$

b. Đặt $S_n = \sum_{k=2}^{n} k.\cos\frac{\pi}{2}$

Tính giới hạn của $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Giải

a. Xét

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \ x \geq 0$$

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0, \ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \ f' \text{ tăng trên } [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0, \ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \ f \text{ tăng trên } [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0, \ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \ \forall x \geq 0$$

b. Theo câu a), ta có:

$$\sum_{k=2}^{n} k \geq S_n \geq \sum_{k=2}^{n} k\left(1 - \frac{\pi^2}{2k^2}\right)$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n} k - \frac{\pi^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\geq \frac{(n+2)(n-1)}{2} - \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+2)(n-1)}{2} \geq S_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2} - \frac{\pi^2(n-1)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{S_n}{n^2} \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Vậy: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

Nhận xét: Qua phép chứng minh trên, ta dễ thấy rằng:

- $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}, \quad \forall x \in R$
- $|\sin x| \leq |x|, \ \forall x \in R$

(28) Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_o = 2006 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2},\ n \ge 0 \end{cases}$$

Tìm giới hạn dãy số $\left\{\dfrac{u_n^3}{n}\right\}$

Giải

Ta có $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2},\ \forall x \ge 0$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 = u_n^3 + \frac{1}{u_n^6} + 3 + \frac{3}{u_n^3}$$

$$> u_n^3 + 3,\ \forall x \ge 0\quad (\text{Do } u_n > 0,\ \forall x \ge 0)$$

$$\Rightarrow u_n^3 > u_{n-1}^3 + 3,\ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow u_n^3 > u_o^3 + 3n,\ \forall n \ge 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_o^3 + 3n} + \frac{1}{\left(u_o^3 + 3n\right)^2}$$

$$< u_n^3 + 3 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2},\ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{9k^2},\ \forall n \ge 2 \qquad (2)$$

Mặt khác, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^n}.$$

$$\le 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2,\ \forall n \ge 1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \sqrt{n}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}} < \sqrt{2n},\ \forall n \ge 1\ (\text{Do BĐT B.C.S}) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4 suy ra:

$$3n + u_o^3 < u_n^3 < u_1^3 + 3n + \sqrt{2n} + 2,\ \forall n \ge 2$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{u_o^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} > \frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{2}{n},\ \forall n \ge 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3$$

29 Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)$

Giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ \forall x > 0$$

Xét $\begin{cases} f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \\ g(x) = x - \ln(1+x) \end{cases} \quad (x > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} > 0 \\ g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0 \end{cases} \quad (\forall x > 0)$$

$\Rightarrow f, g$ đều tăng trên $(0, +\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(0) = 0 \\ g(x) > g(0) = 0 \end{cases} \quad (\forall x > 0)$$

Vậy $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ \forall x > 0$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)$

Ta có: $\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right) + ..., \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right) < \frac{i}{n^2},\ \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}(1+2+...+n) - \frac{1}{2n^4}\left(1^2+2^2+...+n^2\right)$$

$$< \ln x_n < \frac{1}{2n^2}(1+2+...+n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{v_n} < \underbrace{\ln x_n}_{u_n} < \underbrace{\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}}_{w_n}$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$

30 Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2005}{2006} \\ b_1 = \frac{2007}{2006} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

(n = 1, 2, 3,...)

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1001}{a_n + b_n}$

Giải

Ta có: $a_2b_2 = \left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right)\left(b_1 + \frac{1}{a_1}\right)$

$$= a_1b_1 + \frac{1}{a_1b_1} + 2 > 4$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 \ge 2\sqrt{a_2b_2} > 2\sqrt{2.2}$$

Giả sử $a_k + b_k > 2\sqrt{2.k} \quad (k \in N)$

Khi đó:

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + \frac{1}{b_k^2} + \frac{2a_k}{b_k}$$

$+$

$$b_{k+1}^2 = b_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2\frac{b_k}{a_k}$$

$$2a_{k+1}b_{k+1} = 2a_kb_k + \frac{2}{a_kb_k} + 4$$

$$\Rightarrow (a_{k+1} + b_{k+1})^2 = (a_k + b_k)^2 + \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right)^2 + 2\left(\frac{a_k}{b_k} + \frac{b_k}{a_k}\right) + 4$$

$$> 8k + 8$$

$$\ge 8(k+1)$$

$$\Rightarrow a_{k+1} + b_{k+1} > 2\sqrt{2(k+1)}$$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lý quy nạp, ta co: $a_n + b_n > 2\sqrt{2n}, \ \forall n \ge 2$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1001}{a_n + b_n} = 0$

31 Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$

Giải

Theo kết quả bài 3, ta có:

$$\ln(1+x) < x, \ \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ \forall x \in N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > \ln(1+n) - \ln n,\ \forall x \in N$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$\geq \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow a_n > \ln(n+1),\ \forall x \in N$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} = 0$

(32) Cho $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = a^{x_n},\ n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ

Giải

- $n = 1$: $x_2 = a^{x_1} = a^a > a = x_1$
- $n = k$: Giả sử $x_{k+1} > x_k$
- $n = k + 1$: $x_{k+2} = a^{x_{k+1}} > a^{x_k} = x_{k+1}$

Vậy : $x_{n+1} > x_n,\ \forall x \in N$

Xét $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \ln a,\ x > 1$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = c$$

Bảng biến thiên:

x	1		e		$+\infty$
f'		+	0	−	
f	$-\ln a$	↗	f(e)	↘	$-\ln a$

Do: $1 < a \le e^{\frac{1}{e}}$

$$\Rightarrow 0 < \ln a \le \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\ln a < 0 \\ f(e) = \dfrac{1}{e} - \ln a \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tồn tại $x_o > 1$ sao cho: $f(x_o) = \dfrac{\ln x_o}{x_o} - \ln a = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x_o}{x_o} = \ln a$$

$$\Leftrightarrow x_o = a^{x_o}$$

Bây giờ, ta chứng minh $x_n < x_o,\ \forall n \in N$

Quả vậy:

- $n = 1$: $x_1 = a < a^{x_o} = x_o$
- $n = k$: Giả sử $x_k < x_o$
- $n = k + 1$: Ta có: $x_{k+1} = a^{x_k} < a^{x_o} = x_o$

$\Rightarrow x_n < x_o,\ \forall n \in N$

$\Rightarrow$ Dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

---

33 Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa: $\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1 - x_n) \ge \dfrac{1}{4},\ \forall n \in N \end{cases}$

Chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

b. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} < x_n \le \dfrac{1}{2},\ \forall n \in N$

Giải

a. Ta có:

$$x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4} \geq x_n(1-x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n1}(1-x_n) \geq x_n(1-x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad (\text{vì } 0 < x_n < 1)$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn nên hội tụ

Đặt $x = \lim\limits_{x \to +\infty}$

$$\Rightarrow x(1-x) \geq \frac{1}{4} \quad \left(\text{vì } x_{n+1}(1-x_n)\frac{1}{4}, \forall\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} = \frac{1}{2}$

b. • Ta có: $x_n \leq x_{n+m}, \ \forall n, m \in N$

Cố dịch n, cho $n \to +\infty$, ta có ngay:

$$x_n \leq \frac{1}{2}$$

• Hơn nữa:

+ $n = 1$: $a_1 > 0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2}$

+ $n = k$: Giả sử: $x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

+ $n = k + 1$: Theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow 1 - x_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \le x_{k+1}(1 - x_k) < x_{k+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$\Rightarrow x_{k+1} > \frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$\Rightarrow$ (Đpcm)

34 Cho f: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ giảm và liên tục

Giải sử hệ $\begin{cases} f(\alpha) = \beta \\ f(\beta) = \alpha \\ \alpha, \beta \ge 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\alpha = \beta = a$

Chứng minh rằng: Dãy $\{x_{n+1} = f(x_i)\}$ (với $x_o > 0$) hội tụ về a.

Giải

Ta chia ra hai trường hợp

* Nếu $x_2 > x_o$:

Khi đó: $f(x_2) \le f(x_o)$

$\Leftrightarrow x_3 \le x_1$

$\Rightarrow f(x_3) \ge f(x_1)$

$\Leftrightarrow x_4 \ge x_2$

....

Bằng quy nạp, ta có được $x_{2n} \le x_{2n+2}$, $\forall n \in N$

(Để ý: $x_{2n} = f(x_{2n-1}) \le f(0)$, $\forall n \in N$)

Quả vậy, giả sử $x_{2k} \le x_{2k+2}$

Khi đó: $f(x_{2k}) \ge f(x_{2k+2})$

$\Leftrightarrow x_{2k+1} \ge x_{2k+3}$

$\Leftrightarrow f(x_{2k+1}) \le f(x_{2k+3})$

$\Leftrightarrow x_{2k+2} \le x_{2k+4}$

$\Rightarrow (1)$ đúng

Chứng minh tương tự: $x_{2n-1} > x_{2n+1}$, $\forall n \in N$

$\left(\text{Để ý}: x_n > 0,\ \forall n \in N\right)$

Như vậy: • $\{x_{2n}\}$ tăng k bị chặn trên nên $\{x_{2n}\}$ hội tụ. Giả sử

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \alpha \geq 0$$

• $\{x_{2n+1}\}$ giảm và bị chặn dưới nên $\{x_{2n+1}\}$ hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \beta \geq 0$

Do f liên tục trên $[0,+\infty)$, nên:

$$\begin{cases} \beta = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n+1}) = f(\alpha) \\ \alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n+1}) = f(\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = f(\alpha) \\ \alpha = f(\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = a$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

* Nếu: $x_2 \leq x_o$: chứng minh tương tự: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

(Bạn đọc tự làm)

35 Cho phương trình: $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$
Chứng tỏ rằng với mỗi n nguyên dương thì phương trình có duy nhất một nghiệm dương x_n và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Giải

Xét $f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$ $(n \in N\setminus\{1\})$

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 1 > 0,\ \forall x > 0$$

Hơn nữa: $f(0).f(1) = 1 - n < 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất x_n

Khi đó $\begin{cases} 1 = x_n = x_n^2 + ... + x_n^n \\ 1 = x_{n+1} + x_{n+1}^2 + ... + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} \end{cases}$

$\Rightarrow x_n > x_{n+1} > 0$

(vì ngược lại: $0 < x_n \le x_{n+1}$)

$\Rightarrow 1 = x_n + x_n^2 + ... + x_n^n < x_{n+1} + x_{n+1}^2 + ... + x_{n+1}^n < 1$

$\Rightarrow 1 < 1$ (vô lý)

$\Rightarrow$ Tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_o$, $0 \le x_o \le x_1$

Mặt khác, từ $\begin{cases} 1 = x_n \dfrac{1 - x_n^n}{1 - x_n} \\ 0 < x_n < x_1 < 1 \end{cases}$ $(\forall n \ge 2)$

Cho $n \to +\infty$, ta được $1 = \dfrac{x_o}{1 - x_o}$

$\Leftrightarrow x_o = \dfrac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

36 Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$u_2 = C_{2n}^n \sqrt{n}.4^{-n}, \ n \in N$$

Chứng minh rằng: $\{u_n\}$ là dãy hội tụ

Giải

Ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}.\sqrt{n+1}.4^{-n-1}}{C_{2n}^2\sqrt{n}.4^{-n}}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{\left[(n+1)!\right]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot 4^{-1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2}{(n+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} > 1$$

$$\Rightarrow \{u_n\} \text{ là dãy dương tăng } (1)$$

Hơn nữa:

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \ln\frac{n^2+n+\frac{1}{4}}{n^2+n}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{4(n^2+n)}\right)$$

$$< \frac{1}{4(n^2+n)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

(Do $\ln(1 + x) < x, \ \forall x > 0$)

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln u_{n+1} - \ln u_n < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln u_{n+1} - \ln u_1 < \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u_{n+1}}{u_1} < \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_1.e^{\frac{1}{8}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy hội.

37 Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\alpha}\left(a_{n-1} + \dfrac{2005}{a_{n-1}}\right), \ n \geq 2 \\ a_1 = 2006 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2005}$

Giải

Ta có $\quad a_n > 0, \ \forall x \geq 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2005}{a_{n-1}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}2\sqrt{a_{n-1}.\frac{2005}{a_{n-1}}}$$

$$\geq \sqrt{2005}, \ \forall n \geq 2 \ (1)$$

Mặt khác:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{2005}{2a_{n-1}^2}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_n \leq a_{n-1}, \ \forall n \geq 2$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2005}$ nên hội tụ.

Đặt $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \geq \sqrt{2005}$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2 + 2005}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{2005}{a}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2005}$$

Vậy: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2005}$

(37) Cho dãy số $\{x_n\}$ bị chặn và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_n + x_n \geq 2x_{n+2}, \ \forall n \geq 1 \\ x_1 = 2007 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Gọi A là một chặn dưới của $\{x_n\}$ khi đó:

$$A_n = \text{Max}\{x_n, x_{n-1}\} \geq A, \ \forall n \in N$$

Do:

$$A_n = \text{Max}\{x_n, x_{n+1}\} = \text{Max}\left\{x_n, x_{n+1}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right\}$$

$$\geq \text{Max}\left\{x_{n+1}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right\} \geq \text{Max}\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = A_{n+1}$$

$\Rightarrow \{A_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn B.

Ta chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = B$

Từ chứng minh trên: $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = B$ nên:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in N: \ n \geq N \Rightarrow B - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < B + \frac{\varepsilon}{3}$$

Do đó: $\forall m > N$ thì $x_{2n-1} \leq A_{m-1} < B + \frac{\varepsilon}{3}$

• Nếu $x_m > B - \frac{\varepsilon}{3}$ thì

$$B - \frac{\varepsilon}{3} < x_m \leq A_m < B + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

• Nếu $x_m \leq B - \frac{\varepsilon}{3}$ thì do định nghĩa của A_n ta có ngay:

$$x_{m+1} > B - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow x_m \geq 2x_{m+1} - x_{m-1} > 2\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(B + \frac{\varepsilon}{3}\right) = B - \varepsilon$$

$$\Rightarrow B - \varepsilon < x_m \le B - \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$B - \varepsilon < x_m < B + \varepsilon,\ \forall m > N$$

Vậy: $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m = B.$

39. Cho $\{C_{n,k} / 1 \le k \le n; k, n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn:

a. $C_{n,k} \to 0$, khi $n \to +\infty$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

b. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1$, khi $n \to +\infty$

c. $\sum\limits_{k=1}^{n} |C_{n,k}| \le C = \text{const}, \forall n \in \mathbb{R}$

Khi đó : Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì $\left\{b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k\right\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ (Định lý Taeplitz)

Giải:

Giải sử $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Khi đó :

- Tồn tại hằng số $D > 0$: $|a_n - a| \le 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c}, \forall n > n_\varepsilon$

$$\le \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \varepsilon |C_{n_1 k}| |a_k - a| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |C_{n,k}| |a_k - a|$$

$$\le D \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |C_{n,k}|$$

$$< D \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C$$

$$\le D \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| = 0$

Nên tồn tại $m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| < \dfrac{\varepsilon}{2D}, \forall n > m_2$ (2)

(với ε được xét ở trên)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) < D\sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$< D\frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon + n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) + a\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}\right]$$

$$= 0 + a.1 = a$$

---

40. Cho $\{C_{n,k} / 1 \le k \le n; k, n \in \mathbb{Z}\} \subset [0, +\infty)$ thỏa mãn :

a. $C_{n,k} \to 0$, khi $n \to +\infty$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

b. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1$, khi $n \to +\infty$

Khi đó : Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì $\left\{b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k\right\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

(Hệ quả định lý Toeplitz)

Giải

Do $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1 \Rightarrow$ Dãy $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}\right\}$ bị chặn

$\Rightarrow$ Dãy $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |C_{n,k}|\right\}$ bị chặn (c)

$\left(\text{Do } C_{n,k} \geq 0, \forall n, k \in \mathbb{N}\right)$

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow$ (ĐPCM)

(Do định lý Toeplitz)

41. Chứng minh rằng : Nếu

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ thì } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

Giải

Sử dụng định lý Toeplitz với $C_{n,k} = \frac{1}{n}; k = 1, 2, \ldots, n.$

Khi đó : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a$

42. Chứng minh rằng : Nếu

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ thì } \lim_{n\to+\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1.a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$$

Giải

Đặt : $C_{n,k} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}; k = 1, 2, \ldots, n$

Khi đó :

- $0 < C_{n,k} \to 0, \forall k \in \mathbb{N}$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n^2}$

$$= 2\frac{n(n-1+1+n-n+1)}{2n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$$

$(\text{khi } n \to +\infty)$

Theo đó theo định lý Taeplitz:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}.a_k = a$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

(43.) Chứng minh rằng : Nếu day dương {an} hội tụ về a dương thì

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = a$$

Giải

Cách 1 :

Ta có : $\ln a_n \to \ln a$. Nên theo bài 41, ta có :

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}{n} \to \ln a$$

$$\Rightarrow \ln \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \to \ln a$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \to a$$

Cách 2 : Ta có : $\begin{cases} a_n \to a \\ \dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a} \end{cases}$

Do đó, theo bài 41, ta có :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to a$$

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{a}$$

Hơn nữa:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Vì vậy, theo tính chất kẹp:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = a$$

44. Cho dãy số $\{a_n\}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0 \text{ thì } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$$

Giải

Đặt $\quad b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, \ n \geq 2 \ (\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a)$

Theo bài 43, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = a$$

Vậy: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$

45. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là dãy số thỏa mãn:

a. $b_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a$

Giải

Đặt: $\quad C_{n,k} = \dfrac{b_k}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}, \ 1 \leq k \leq n; \ k, m \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$C_{n,k} > 0, \ \forall \ 1 \leq k \leq n; \ k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$$

Do đó theo định lý Toeplitz: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a$$

46. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy thỏa mãn:

a. $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = c$

Giải

Đặt $C_{n,k} = \dfrac{b_k}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n},\ 1 \le k \le n;\ k, n \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$C_{n,k} > 0,\ \forall\ 1 \le k \le n;\ k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n\to+\infty} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$$

Do đó theo định lý Toeplitz: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \dfrac{a_k}{b_k} = c$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = c$$

47. Cho 2 dãy số $\{a_n\}$ và $[b_n\}$ thỏa mãn:

a. $\{b_n\}$ tăng thực sự tới $+\infty$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = c$

Khi đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ *(Định lý Stobz)*

Giải

Đặt: $\begin{cases} x_n = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, & n \geq 2 \\ y_n = b_n - b_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$

Như vậy:

$$y_n > 0,\ \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(y_2 + y_3 + \ldots + y_n) = \lim_{n\to+\infty}(b - b_1) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c$$

Do đó theo định lý bài 45, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n}{y_2 + y_3 + \ldots + y_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_1}{b_n - b_1} = c$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_1}{b_n}}{1 - \dfrac{b_1}{b_n}} = c \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Vậy: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

48. Tính $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Giải

Đặt: $\begin{cases} x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} & (n \geq 1) \\ y_n = \sqrt{n} \end{cases}$

Khi đó:

$\{y_n\}$ tăng thật sự tới $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2$$

Do đó, theo định lý Stobz: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = 2$

49. Chứng minh rằng: Nếu dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = a \text{ thì } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} \doteq a$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} x_n = a_n \\ y_n = n \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó:

$\{y_n\}$ là dãy tăng thực sự tới $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) = a$$

Do đó, theo định lý Stolz: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = a$

Vậy: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} = a$$

50. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right), a > 1$

Giải

Đặt: $\begin{cases} x_n = a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n} \\ y_n = \frac{a^{n+1}}{n} \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó

$\{y_n\}$ tăng thực sự tới $+\infty$

(vì: + $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{na}{n+1} > 1,\ \forall n \geq \left[\dfrac{1}{a-1}\right] + 1$

(với $\left[\dfrac{1}{a-1}\right]$ là phần nguyên của $\dfrac{1}{a-1}$)

+ $y_n > \dfrac{a^n}{n} = \dfrac{[1+(a-1)]^n}{n}$

$$> \frac{C_n^2(a-1)^2}{n} = \frac{(n-1)(a-1)^2}{2} \to +\infty \text{ (khi } n \to +\infty))$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{a_n}{n}}{\dfrac{a^{n+1}}{n} - \dfrac{a^n}{n-1}} = \frac{1}{a-1}$$

Do đó, theo stobz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{a-1}$$

51. Cho $\{C_{n,k} / 1 \leq k \leq n;\ k, n \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng:

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a$, $\forall$ dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a\ (a \in \mathbb{R})$

thì

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$

(iii) Tồn tại hằng số c > 0 sao cho:

$$\sum_{k=1}^{w} \left|c_{n,k}\right| \leq c,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(Điều ngược lại của định lý Toeplitz)

Giải

Lấy $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k = a = 1$

$\Rightarrow$ (ii) đúng

Lấy $a_n^{\ell} = \begin{cases} 1, & n = \ell \\ 0, & n \neq \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{(\ell)} = 0, \ \forall \ell \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k^{(\ell)} = 0, \ \forall \ell \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty} C_{n,\ell}$$

$\Rightarrow$ (i) đúng

Giả sử (iii) sai, tức là:

\+ $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n_1}\left|c_{n_1,k}\right| > 10^2$

Ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ có n_1 số hạng đầu tiên như sau:

$$\begin{cases} \operatorname{sign}C_{n_1,k} = \operatorname{sign}a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10} \end{cases} \quad (k = \overline{1,n_1})$$

Khi đó: $$\sum_{k=1}^{n_1} C_{n_1,k}a_k = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n_1}\left|C_{n_1,k}\right| > 10$$

Theo (i) $\exists n_1 < n_o \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n_1}\left|C_{n,k}\right| < 1, \ \forall n > n_o \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=1}^{n_1} C_{n,k}.q_k < \dfrac{1}{10}\right|,$ $\forall n > n_o$

\+ Cũng do (iii) giả sử sai, nên $\exists n_o < n_2 \in \mathbb{N}:$

$$\sum_{k=1}^{n_2}\left|C_{n_2,k}\right| > 10^1 + 10 + 1$$

Ta xây dựng n_2 số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$\begin{cases} \operatorname{sign}C_{n_2,k} = \operatorname{sign}a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^2} \end{cases} \quad (k = \overline{n_1 + 1, n_2})$$

Khi đó: $$\sum_{k=1}^{n_2} C_{n_2,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_1} C_{n_2,k}a_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} C_{n_2,k}a_k$$

$$> -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\left|C_{n_2,k}\right|$$

$$> -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}(10^4 + 10 + 1 - 1) = 10^2$$

+ Giả sử ta xây dựng được n_ℓ $(n_1 < n_2 < ... < n_\ell)$ số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ thỏa:

$$\begin{cases} \text{sign}C_{n_\ell,k} = \text{sign}a_k & (k = \overline{n_{\ell-1} + 1,\ n_\ell}) \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^\ell} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n_\ell} C_{n_\ell}a_k > 10^\ell \end{cases}$$

+ Theo (i) $\exists n_\ell < n_* \in \mathbb{N}: \displaystyle\sum_{k=1}^{n_\ell}\left|C_{n,k}\right| < 1,\ \forall n > n_*$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n_\ell} C_{n,k}a_k\right| < \frac{1}{10^\ell},\ \forall n > n_*$$

Cũng do (iii) giả sử sai, nên $\exists n_* < n_{\ell+1} \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n_{\ell+1}}\left|C_{n_{\ell+1},k}\right| > 10^{2\ell+2} + 10 + 1$$

Ta xây dựng $n_{\ell+1}$ số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$\begin{cases} \text{sign}C_{n_{\ell+1},k} = \text{sign}a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^{\ell+1}} \end{cases} (k = \overline{n_\ell + 1,\ n_{\ell+1}})$$

Khi đó $$\sum_{k=1}^{n_{\ell+1}} C_{n_{\ell+1},k}.a_k = \sum_{k=1}^{n_\ell} C_{n_{\ell+1},k}.a_k + \sum_{k=n_\ell+1}^{n_{\ell+1}} C_{n_{\ell+1},k}.q_k$$

$$> -\frac{1}{10^\ell} + \frac{1}{10^{\ell+1}} \sum_{k=n+1}^{n_{\ell+1}} \left|C_{n_{\ell+1},k}\right|$$

$$> -\frac{1}{10^\ell} + \frac{1}{10^{\ell+1}} (10^{2\ell+2} + 10 + 1 - 1) = 10^{\ell+1}$$

Như vậy theo giả thiết quy nạp, ta xây dựng 2 dãy $\{a_n\}$ và

$$\left\{\sum_{a=1}^{n} C_{n,k} a_k\right\} \text{ thỏa:}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{\ell=1}^{n_k} C_{n_k,\ell} q_\ell = +\infty \end{cases}$$

(Trong đó: $\left\{\sum\limits_{\ell=1}^{n_k} C_{n_k,\ell} q_\ell\right\}$ là một dãy con của $\left\{\sum\limits_{\ell=1}^{n} C_{n,\ell} q_\ell\right\}$)

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy (iii) đúng

52. Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Chứng minh rằng:

a. Nếu $q < 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

b. Nếu $q > 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$

Giải

a. $\forall \varepsilon \in (0, 1-q)$. Ta có: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < q + \varepsilon < 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q + \varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n| < (q+\varepsilon)^{n-n_o} \left|q_{n_o}\right|, \ \forall n > n_o$$

Do: $\lim\limits_{n \to +\infty} (q+\varepsilon)^{n-n_o} \left|a_{n_o}\right| = 0$

Nên $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

b. $\forall \varepsilon \in (o, q-1)$. Ta có: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > q-\varepsilon > 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q-\varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n| > (q-\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|, \ \forall n > n_o$$

Do: $\lim_{n\to+\infty}(q-\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}| = +\infty$

Nên $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$

53. Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$. Chứng minh rằng:

a. Nếu $q < 1$ thì $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

b. Nên $q > 1$ thì $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$

Giải

a. $\forall \varepsilon \in (0, 1-q)$, ta có $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q < q+\varepsilon < 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} < q+\varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n| < (q+\varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_o$$

Mà: $\lim_{n\to+\infty}(q+\varepsilon)^n = 0$ nên $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

b. $\forall \varepsilon \in (0, q-1)$. Ta có: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q > q-\varepsilon > 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} > q-\varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n > (q-\varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_o|$$

Do $\lim_{n\to+\infty}(q-\varepsilon)^n = +\infty$ nên $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$

54. Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$

Giải

Giả sử giới hạn dãy số $\{a_n\}$ tồn tại. Khi đó:

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\left[\sin(n+2) - \sin n\right] = 2\sin 1 \lim_{n\to+\infty}\cos(n+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\cos n = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\cos(n+2) - \cos n\right] = -2\sin 1.\lim_{n\to+\infty}\sin(n+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sin n = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin^2 n + \cos^2 n)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sin^2 n + \lim_{n\to+\infty}\cos^2 n = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy, giới hạn của $\{\sin n\}$ không tồn tại.

55. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$

Giải

Ta có: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{m+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(Bạn đọc kiểm tra bất đẳng thức kép này)

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 < n(\sqrt[n]{e} - 1) < n\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right]$$

Hơn nữa: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1 + \dfrac{1}{n^2}$ (Do BĐT Bernoulli)

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-1\right] \le 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow 1 < n(\sqrt[n]{e}-1) \le 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)=1$