

ĐỀ 67

HSG TOÁN 9 LẠNG SƠN NĂM 2023-2024

Câu 1 (4,0 điểm). Cho $A = \left(\frac{x-2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ với $x > 0, \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để A là số nguyên.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho phương trình ẩn x , tham số m :

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$

Câu 3. (4,0 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB < AC$. Đường tròn (B; BA) cắt đường tròn (C; CA) tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với $E \in (B; BA), F \in (C; CA)$, biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và $\widehat{EAF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$

b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại (B; BA), (C; CA) lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng $BL \parallel AC$ và $SD^2 = SL \cdot SK$

c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $\widehat{XAY} = 90^\circ$

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

b) Cho số tự nhiên $n \geq 0$ và cho trước $7n + 1$ đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có $n + 1$ đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (4,0 điểm). Cho $A = \left(\frac{x-2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ với $x > 0, \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để A là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a/ } A &= \left(\frac{x-2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3x} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3x}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{3x}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{3x(x-2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b/ Chú ý rằng $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} < 3 \Leftrightarrow 3x < 3x+3\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 0 < 3\sqrt{x}+3$ (luôn đúng).

Do đó, $0 < \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} < 3$ với mọi $x > 0$

Vậy $A = \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ là số nguyên thì chỉ có thể có các trường hợp sau đây

$$\text{TH1: } \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 3x = x+\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\frac{-1}{2}(L) \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{TH2: } \frac{3x}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 3x = 2x+2\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1+\sqrt{3} \\ \sqrt{x}=1-\sqrt{3}<0(L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = (1 + \sqrt{3})^2. \text{ Vậ y các giá trị cần tìm là } x = 1 \text{ hoặc } x = (1 + \sqrt{3})^2$$

Câu 2 (4,0 điểm). Cho phương trình ẩn x, tham số m :

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$

Lời giải

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết: } x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - (m^2 + 4) \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 8m \leq 16 \Leftrightarrow m \leq 2$$

$$\text{Vậy } \frac{3}{2} < m \leq 2$$

Câu 3. (4,0 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 = 0 \quad (1) \\ (x+y-5)^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = y = -1$ hoặc $x - y = -2$

Từ (2) suy ra $x + y = 5$

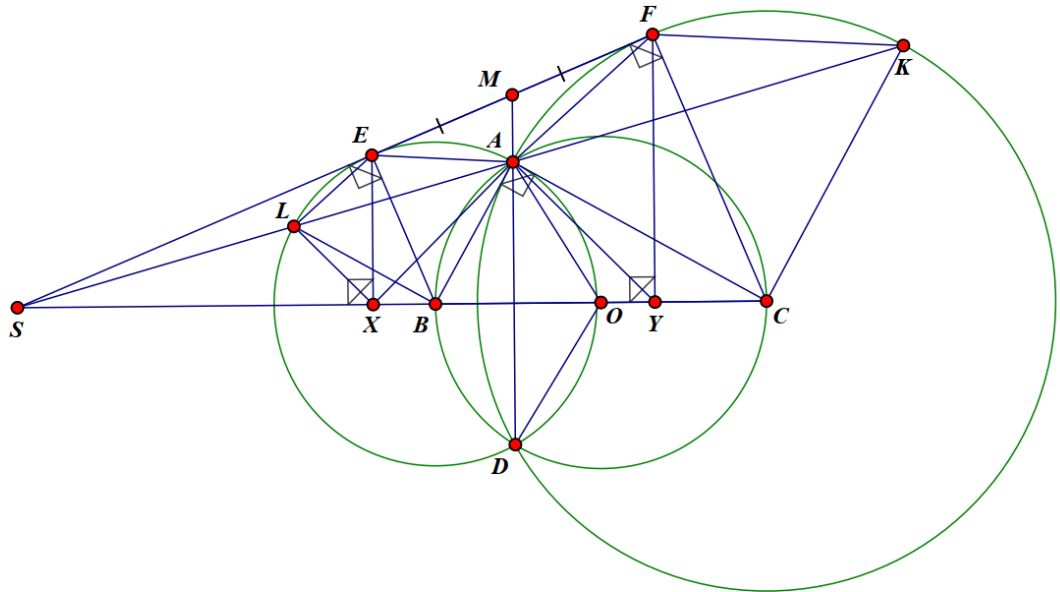
$$\text{Với } \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB < AC$. Đường tròn $(B; BA)$ cắt đường tròn $(C; CA)$ tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với $E \in (B; BA)$, $F \in (C; CA)$, biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC.

- a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và $\widehat{EAF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$
b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại $(B; BA)$, $(C; CA)$ lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng $BL \parallel AC$ và $SD^2 = SL \cdot SK$
c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $\widehat{XAY} = 90^\circ$

Lời giải



a/ Vì ME là tiếp tuyến của $(B; BA)$ nên theo tính chất tiếp tuyến thì $ME^2 = MA \cdot MD$

Tương tự thì $MF^2 = MA \cdot MD$. Do $ME^2 = MF^2 \Rightarrow ME = MF$

Ta có $\widehat{EDA} = \widehat{FEA}$ và $\widehat{FDA} = \widehat{EFA}$ (góc tiếp tuyến và dây cung)

Do đó, $\widehat{EDF} = \widehat{EDA} + \widehat{FDA} = \widehat{FEA} + \widehat{EFA} = 180^\circ - \widehat{EAF}$ suy ra

$$\widehat{EAF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$$

b/ Vì $BE \parallel CF$ nên theo Thales thì $\frac{SL}{SA} \cdot \frac{SB}{SC} \cdot \frac{SA}{SK} \Rightarrow SA^2 = SL \cdot SK$

Để thấy BC là trung trực của AD nên $SD = SA$. Do đó, $SD^2 = SL \cdot SK$

c/ Theo hệ thức lượng tam giác SEB thì $SX \cdot SB = SE^2$

Theo tính chất tiếp tuyến thì $SE^2 = SL \cdot SA$

Do đó, $SX \cdot SB = SL \cdot SA$ suy ra XBAL nội tiếp nên $\widehat{XAB} = \widehat{XLB}$ (2)

Vì $EX // FY$ nên $\frac{SX}{SY} \hat{=} \frac{SE}{SF}$ (3), Vì $BL // CA$ nên $\frac{SL}{SA} \hat{=} \frac{SB}{SC}$ (4)

Từ (1), (3) và (4) suy ra $\frac{SX}{SY} \hat{=} \frac{SL}{SA}$ nên $XL // AY$. Do đó, từ $BL // CA$ và

$XL // AY$ suy ra $\widehat{XLB} = \widehat{YAC}$ (góc có cạnh tương ứng song song) (5)

Từ (2) và (5) suy ra $\widehat{XAB} = \widehat{YAC}$ tức là $\widehat{XAY} = \widehat{BAC} \hat{=} 90^\circ$

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

b) Cho số tự nhiên $n \geq 0$ và cho trước $7n + 1$ đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có $n + 1$ đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

Lời giải

$$\begin{aligned} a/ P &= \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} (x+y+z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}, \text{ có dấu bằng khi } y = 2x$$

$$\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}, \text{ có dấu bằng khi } z = 4x$$

$$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1, \text{ có dấu bằng khi } z = 2y$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{21}{16} \right)$$

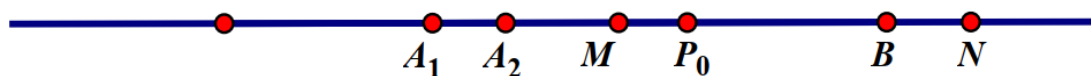
$$\text{Suy ra min } P = \frac{49}{48}, \text{ khi } x = \frac{3}{7}; y = \frac{6}{7}; z = \frac{12}{7}$$

b/ Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp

Bước 1: Với $n = 0$ thì đề bài cho 1 đoạn thẳng, hiển nhiên là đúng.

Bước 2: Giả sử bài toán đúng cho $n = 1$

Bước 3: Xét bài toán với n



Ta gọi I_0 là đoạn thẳng có đầu mút bên trái P_0 là điểm xa nhất về bên phải so với tất cả các đoạn thẳng còn lại (cụ thể với hai đoạn MN , P_0B thì hai điểm bên trái là M , P_0 thì P_0 xa nhất phía bên phải).

Dễ thấy, mọi đoạn thẳng có giao với I_0 đều phải chứa P_0

TH1: Nếu ít nhất 7 đoạn có giao điểm với I_0 thì 7 đoạn này cùng với I_0 có điểm chung là P_0 .

TH2: Nếu không xảy ra TH 1, thì ít nhất có $7(n-1)+1$ đoạn thẳng không cắt I_0 .

+ Nếu có 8 đoạn trong chúng có điểm chung thì bài toán được giải quyết.

+ Nếu ngược lại thì theo giả thiết quy nạp sẽ có ít nhất n đoạn trong chúng phân biệt từng đôi một, thêm vào đoạn I_0 thì được $n + 1$ đoạn phân biệt từng đôi một.

Vậy trong cả hai trường hợp thì bài toán đều đúng, tức là quy nạp được thực hiện.

----- HẾT -----