

HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CẦN THƠ 2023-2024

Bài 1: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2$ với $x > 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $\frac{Q}{\sqrt{x}} > 3$.

Bài 2:

a) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{-16}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Giải phương trình $4x - 2 - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8}$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ -5x^2 - 4xy + 16x - 8y + y^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

Bài 3. Một cửa hàng chi ra số tiền 47 000000 đồng để nhập về 150 bao bột gạo và bao bột bắp. Mỗi bao bột gạo nặng 10kg và được bán ra với giá 300000 đồng, mỗi bao bột bắp nặng 20 kg và được bán ra với giá 400000 đồng. Do khâu bảo quản không tốt nên 5% số bao bột gạo và 10% số bao bột bắp bị hỏng và không thể bán được. Vì vậy, tổng số khối lượng bột gạo và bột bắp bán được là 1850kg. Hỏi sau khi bán 1850kg bột gạo và bột bắp, cửa hàng lãi được bao nhiêu tiền?

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB, gọi M là điểm đối xứng với H qua AB. Tia MC cắt đường tròn (O) tại P (P khác M). Vẽ đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác APC. Tia HP cắt đường tròn (O') tại điểm N (N khác P), E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AB với đường tròn (O')

a) Chứng minh rằng EN song song với BC.

b) Chứng minh rằng $MC = HN$.

c) Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O'). Chứng minh rằng H là trung điểm của đoạn thẳng BK.

Bài 5. Để khuyến khích người dân sử dụng tiết kiệm điện, Công ty điện lực đưa ra bảng giá bán cho thấy nếu sử dụng điện càng nhiều thì giá tiền phải trả cho 1 kWh

càng cao. Giá bán điện sinh hoạt năm 2021 được cho theo bảng sau (chưa tính thuế VAT).

Mức tiêu thụ (kWh)	Giá bán điện (đồng/kWh)
Bậc 1: 0 – 50	1678
Bậc 2: 51 – 100	1734
Bậc 3: 101 – 200	2014
Bậc 4: 201 – 300	2536
Bậc 5: 301 – 400	2834
Bậc 6; từ 401 trở lên	2927

Trong tháng 3 năm 2021, gia đình thầy Thiện đã trả tổng số tiền sử dụng điện là 1 064 294 đồng (bao gồm 10% thuế VAT). Hỏi gia đình thầy Thiện đã sử dụng bao nhiêu kWh điện trong tháng 3 năm 2021?

Bài 6: Cho các số thực $x, y, z > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (x-1)(y-1)(z-1)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2$ với $x > 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $\frac{Q}{\sqrt{x}} > 3$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức Q.

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{2x}}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{-\sqrt{x}(1-\sqrt{2x})^2}{2(x-1)}$$

b) Tìm các giá trị của x sao cho $\frac{Q}{\sqrt{x}} > 3$.

$$\frac{Q}{\sqrt{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x}(1-\sqrt{2x})^2}{2\sqrt{x}(x-1)} > 3 \Leftrightarrow \frac{-(1-\sqrt{2x})^2}{2(x-1)} > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-1) + (1-\sqrt{2x})^2}{2(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{8x - 2\sqrt{2x} - 5}{2(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 2\sqrt{2x} - 5 > 0 & (1) \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\sqrt{2} + \sqrt{42}}{8} \\ x < \frac{\sqrt{2} - \sqrt{42}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} + \sqrt{42}}{8} < x < 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{42}}{8} < x < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{42}}{8} \\ x > 1 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy để $\frac{Q}{\sqrt{x}} > 3$ thì $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{42}}{8} < x < 1$.

Bài 2:

a) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{-16}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Giải phương trình $4x - 2 - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = (5x + 4)(4 - x) \\ -5x^2 - 4xy + 16x - 8y + y^2 + 16 = 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{-16}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có:

$$\Delta' = m^2 - (m - 2) = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lý Vi-et:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases} \quad (1)$$

Lại có:
$$P = \frac{-16}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} = \frac{-16}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$P = \frac{-16}{(2m)^2 - 8(m - 2)} = \frac{-16}{4m^2 - 8m + 16} = \frac{-16}{4(m^2 - 2m + 1) + 12} = \frac{-4}{(m - 1)^2 + 3}$$

Vì $-4 < 0$ và $(m - 1)^2 + 3 \geq 3, \forall m$

Nên $(m - 1)^2 + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 $\Leftrightarrow (m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Khi đó: $P = \frac{-4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{-4}{3}$ khi $m = 1$.

b) Giải phương trình $4x - 2 - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8}$.

ĐKXD: $x \geq \frac{8}{3}$

Ta có: $4x - 2 - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8} \Rightarrow 4x - 2 = 3\sqrt{5x - 6} + \sqrt{3x - 8}$

$$\Rightarrow 4x - 12 = (3\sqrt{5x - 6} - 9) + (\sqrt{3x - 8} - 1)$$

$$\Rightarrow 4(x - 3) = 3(\sqrt{5x - 6} - 3) + (\sqrt{3x - 8} - 1)$$

$$\Rightarrow 4(x - 3) = 3 \cdot \frac{5x - 15}{\sqrt{5x - 6} + 3} + \frac{3x - 9}{\sqrt{3x - 8} + 1}$$

$$\Rightarrow 4(x - 3) = \frac{15(x - 3)}{\sqrt{5x - 6} + 3} + \frac{3(x - 3)}{\sqrt{3x - 8} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0(1) \\ 4 = \frac{15}{\sqrt{5x - 6} + 3} + \frac{3}{\sqrt{3x - 8} + 1} \end{cases} \quad (2)$$

TH1: (1) $\Rightarrow x = 3$ (tmđkxd)

TH2:

$$+ \text{ Nếu } x > 3 \Rightarrow 4 < \frac{15}{\sqrt{5.3-6+3}} + \frac{3}{\sqrt{3.3-8+1}} = \frac{15}{6} + \frac{3}{2} = 4 \quad (\text{vô lý})$$

$$+ \text{ Nếu } x = 3 \Rightarrow 4 = \frac{15}{\sqrt{5.3-6+3}} + \frac{3}{\sqrt{3.3-8+1}} = \frac{15}{6} + \frac{3}{2} = 4 \quad (\text{luôn đúng})$$

$$+ \text{ Nếu } x < 3 \Rightarrow \frac{8}{3} < x < 3 \Rightarrow 4 > \frac{15}{\sqrt{5.3-6+3}} + \frac{3}{\sqrt{3.3-8+1}} = \frac{15}{6} + \frac{3}{2} = 4 \quad (\text{vô lý})$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 3$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ -5x^2 - 4xy + 16x - 8y + y^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ -5x^2 - 4xy + 16x - 8y + y^2 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -5x^2 + 16x + 16 \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -5x^2 + 16x + 16 \\ y^2 + y^2 - 4xy - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -5x^2 + 16x + 16 \\ 2y^2 - 4xy - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -5x^2 + 16x + 16(1) \\ 2y(y - 2x - 4) = 0(2) \end{cases}$$

Từ (2)
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (5x+4)(4-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{5} \\ x = 4 \end{cases}$$

+ Với $y = 0$, thay vào (1)

+ Với $y = 2x + 4$, thay vào (1) ta được:

$$\Rightarrow (2x+4)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 = -5x^2 + 16x + 16$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\left(\frac{-4}{5}; 0\right); (4; 0); (0; 4)$

Bài 3. Một cửa hàng chi ra số tiền 47 000 000 đồng để nhập về 150 bao bột gạo và bao bột bắp. Mỗi bao bột gạo nặng 10kg và được bán ra với giá 300 000 đồng, mỗi bao bột bắp nặng 20 kg và được bán ra với giá 400 000 đồng. Do khâu bảo quản

không tốt nên 5% số bao bột gạo và 10% số bao bột bắp bị hỏng và không thể bán được. Vì vậy, tổng số khối lượng bột gạo và bột bắp bán được là 1850kg. Hỏi sau khi bán 1850kg bột gạo và bột bắp, cửa hàng lãi được bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*$) lần lượt là số bao bột gạo và số bao bột bắp mà cửa hàng nhập về.

Khối lượng bột gạo nhập về là: $10x$ (kg)

Khối lượng bột bắp nhập về là: $20y$ (kg)

Số bột gạo bị hỏng là: $5\% \cdot x \cdot 10 = 0,5x$ (kg)

Số bột bắp bị hỏng là: $10\% \cdot x \cdot 20 = 2y$ (kg)

Theo đề bài ta có: $x + y = 150$ (1)

$$10x + 20y = 1850 + 0,5x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 9,5x + 18y = 1850 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 9,5x + 18y = 1850 \end{cases} (*)$$

Giải (*) ta được:
$$\begin{cases} x = 100 \\ y = 50 \end{cases}$$

Tổng số tiền bán 1850kg bột gạo và bột bắp mà cửa hàng thu được là:

$$100 \cdot (1 - 5\%) \cdot 300000 + 50 \cdot (1 - 10\%) \cdot 400000 = 28500000 + 18000000 = 46500000 \text{ (đồng)}$$

Vậy, sau khi bán 1850kg bột gạo và bột bắp, cửa hàng lãi số tiền là:

$$46500000 - 47\,000\,000 = -500000 \text{ (đồng)}$$

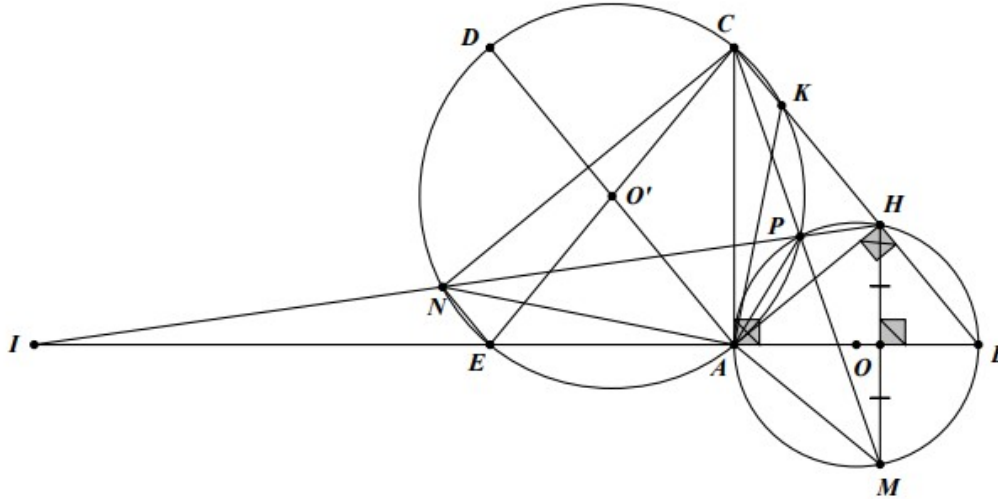
Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB, gọi M là điểm đối xứng với H qua AB. Tia MC cắt đường tròn (O) tại P (P khác M). Vẽ đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác APC. Tia HP cắt đường tròn (O') tại điểm N (N khác P), E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AB với đường tròn (O')

a) Chứng minh rằng EN song song với BC.

b) Chứng minh rằng $MC = HN$.

c) Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O') . Chứng minh rằng H là trung điểm của đoạn thẳng BK.

Lời giải



a) Chứng minh rằng EN song song với BC.

Gọi I là giao điểm của HP và AB.

Tứ giác ABHP nội tiếp đường tròn (O) nên $\angle ABH = \angle APN$ (1)

Tứ giác APNE nội tiếp đường tròn (O') nên $\angle APN = \angle ENA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle ABH = \angle ENA \Rightarrow EN \parallel HB \Rightarrow EN \parallel BC$ (đpcm)

b) Chứng minh rằng $MC = HN$.

Vì M là điểm đối xứng với H qua AB $\Rightarrow M \in (O)$ và $AM = AH$ (3)

Lại có: $\angle AMP = \angle AHP$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung AP) $\Rightarrow \angle AMC = \angle AHN$ (4)

$\angle ANP = \angle ACP$ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung AP) $\Rightarrow \angle ANH = \angle ACM$

$\Rightarrow \angle MAC = 180^\circ - \angle AMC - \angle ACM = 180^\circ - \angle AHN - \angle ANH = \angle NAH$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra:

$\triangle AMC = \triangle AHN$ (g.c.g) $\Rightarrow MC = HN$ (đpcm)

c) Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O'). Chứng minh rằng H là trung điểm của đoạn thẳng BK.

Do $AB \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \angle EAC = 90^\circ \Rightarrow EC$ là đường kính của đường tròn (O')

$\Rightarrow \angle NE = 90^\circ$ hay $EN \perp CN$ (6)

Mặt khác: Do $\triangle AMC = \triangle AHN \Rightarrow AC = AN \Rightarrow \triangle ANC$ cân tại A

Kẻ đường kính AD của đường tròn (O') $\Rightarrow AD \perp CN$ (7)

Từ (6), (7) suy ra: $EN \parallel AD$

Mà $EN \parallel BC \Rightarrow AD \parallel BC$

Lại có: $BC \perp AH$ (gt) $\Rightarrow AD \perp AH$ hay AH là tiếp tuyến của đường tròn (O')

Xét đường tròn (O) ta có: $\angle ABH = \angle HAC \Rightarrow \angle ABK = \angle HAC$ (8)

Xét đường tròn (O') ta có: $\angle HAK = \angle ACK$

Lại có: $\angle KCB = \angle ACK + \angle ACK$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$\Rightarrow \angle KCB = \angle HAK + \angle ACK = \angle HAC$ (9)

Từ (8), (9) suy ra: $\angle ABK = \angle KCB \Rightarrow \triangle ABK$ cân tại A

Mà $AH \perp BK$ (gt) $\Rightarrow H$ là trung điểm của BK.

Bài 5. Để khuyến khích người dân sử dụng tiết kiệm điện, Công ty điện lực đưa ra bảng giá bán cho thấy nếu sử dụng điện càng nhiều thì giá tiền phải trả cho 1 kWh càng cao. Giá bán điện sinh hoạt năm 2021 được cho theo bảng sau (chưa tính thuế VAT).

Mức tiêu thụ (kWh)	Giá bán điện (đồng/kWh)
Bậc 1: 0 – 50	1678
Bậc 2: 51 – 100	1734
Bậc 3: 101 – 200	2014
Bậc 4: 201 – 300	2536
Bậc 5: 301 – 400	2834
Bậc 6; từ 401 trở lên	2927

Trong tháng 3 năm 2021, gia đình thầy Thiện đã trả tổng số tiền sử dụng điện là 1 064 294 đồng (bao gồm 10% thuế VAT). Hỏi gia đình thầy Thiện đã sử dụng bao nhiêu kWh điện trong tháng 3 năm 2021?

Lời giải

Nhà thầy Thiện phải trả tổng số tiền sử dụng điện không tính thuế VAT là:

$$1\,064\,294 : 110\% = 967\,540 \text{ (đồng)}$$

Theo bảng giá bán điện, nếu sử dụng điện đến hết số điện ở bậc 5 (không tính thuế VAT) thì số tiền phải trả là:

$$50.1678 + 50.1734 + 100.2014 + 100.2536 + 100.2834 = 909\,000 \text{ (đồng)}$$

Vì $967\,540 > 909\,000$ nên nhà thầy Thiện đã sử dụng đến số điện được tính giá ở bậc 6.

Gọi x (kWh) là số điện nhà thầy Thiện đã sử dụng ở bậc 6. Ta có:

$$909\,000 + 2927.x = 967\,540 \Leftrightarrow 2927.x = 58\,540 \Leftrightarrow x = 20 \text{ (kWh)}$$

Vậy trong tháng 3 năm 2021 nhà thầy Thiện đã sử dụng hết:

$$50 + 50 + 100 + 100 + 100 + 20 = 420 \text{ (kWh)}$$

Bài 6: Cho các số thực $x, y, z > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (x-1)(y-1)(z-1)$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 2 - \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{z} = \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{(y-1)(z-1)}{yz}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y-1)(z-1)} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2x} \quad (1)$$

Tương tự ta có:
$$\sqrt{(y-1)(x-1)} \leq \frac{\sqrt{yx}}{2z} \quad (2)$$

$$\sqrt{(x-1)(y-1)} \leq \frac{\sqrt{xz}}{2y} \quad (3)$$

Nhân vế với vế các BĐT (1), (2), (3) ta được:

$$M = (x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{\sqrt{yz}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{xz}}{2y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{2z} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x} = \frac{y-1}{y} = \frac{z-1}{z} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{2}$.