

Chuyên đề 18. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình, (tức là tìm giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức của phương trình khác 0). Viết tắt: ĐKXĐ.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: (Kết luận). Trong các giá trị tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

* **Chú ý.** Nếu $A(x) = 0$ tại $x = x_1$ hoặc $x = x_2$ thì

$$A(x) \neq 0 \text{ khi } x \neq x_1 \text{ và } x \neq x_2$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

$$\text{a) } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2x-6} - \frac{1}{2x-4} \quad (1)$$

$$\text{b) } \frac{25+4x}{25x^2-1} = \frac{4}{5x+1} - \frac{6}{1-5x} \quad (2)$$

* **Tìm cách giải.**

a) Do $2x-6=2(x-3)$; $2x-4=2(x-2)$ nên ĐKXĐ là $x-1 \neq 0$; $x-2 \neq 0$ và $x-3 \neq 0$. Thực hiện các bước giải.

b) Ta tìm ĐKXĐ tức là tìm giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức $25x^2-1$; $5x+1$; $5x-1$ của phương trình khác 0. Mà $25x^2-1=(5x+1)(5x-1)$ nên ĐKXĐ là $5x+1 \neq 0$ và $5x-1 \neq 0$.

Thực hiện đầy đủ các bước giải phương trình có ẩn ở mẫu.

Giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 1$; $x \neq 2$ và $x \neq 3$.

Hai giá trị $x=1,5$ và $x=5$ thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm phương trình (1).

b) ĐKXĐ: $x \neq \pm 0,2$

$$(2) \Leftrightarrow 25+4x = 4(5x-1) + 6(5x+1)$$

$$\Leftrightarrow 25+4x = 20x-4+30x+6$$

$$\Leftrightarrow -46x = -23 \Leftrightarrow x = 0,5$$

Giá trị này thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0,5$.

$$\text{Ví dụ 2. Giải phương trình } \frac{2x-5}{x+1} + \frac{x^2-5x-41}{x^2-3x-4} = \frac{3x-8}{x-4} \quad (1)$$

Giải

Ta có (1) $\hat{U} \frac{2x-5}{x+1} + \frac{x^2-5x-41}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-8}{x-4}$

ĐKXĐ: $x \neq -4$ và $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu số hai vế và khử mẫu ta có phương trình:

$$(2x-5)(x-4) + x^2 - 5x - 41 = (3x-8)(x+1)$$

$$\hat{U} \quad 2x^2 - 13x + 20 + x^2 - 5x - 41 = 3x^2 - 5x - 8$$

$$\hat{U} \quad -13x = 13 \quad \hat{U} \quad x = -1$$

Giá trị này không thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3. Cho $A(x) = \frac{(x^2 - x - 6)(x - 5)}{x(x^2 + 2x + 2)}$ và $B(x) = \frac{(x^2 - x - 6)(x - 4)}{3x^3 + 6x^2 + 6x}$

a) Tìm x để giá trị của hai biểu thức A(x) và B(x) bằng nhau;

b) Tìm x để $\frac{A(x)}{B(x)} = 5$

** Tìm cách giải:* Bài toán tìm X để giá trị của hai biểu thức A(x) và B(x) bằng nhau quy về tìm nghiệm của phương trình A(x) = B(x).

Xét $\frac{A(x)}{B(x)} = 5$ đặc biệt lưu ý A(x); B(x) có nghĩa và $B(x) \neq 0$

Giải

a) Để A(x) = B(x) thì $\frac{(x^2 - x - 6)(x - 5)}{x(x^2 + 2x + 2)} = \frac{(x^2 - x - 6)(x - 4)}{3x(x^2 + 2x + 2)}$

ĐKXĐ: $x(x^2 + 2x + 2) \neq 0$ và $3x(x^2 + 2x + 2) \neq 0$ hay $3x(x^2 + 2x + 2) \neq 0$

Do $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \neq 0$, "x nên ĐKXĐ là $x \neq 0$.

Từ phương trình trên suy ra: $3(x^2 - x - 6)(x - 5) = (x^2 - x - 6)(x - 4)$

$$\hat{U} \quad (x^2 - x - 6)(3x - 15) - (x^2 - x - 6)(x - 4) = 0$$

$$\hat{U} \quad (x^2 - x - 6)(3x - 15 - x + 4) = 0$$

$$\hat{U} \quad (x-3)(x+2)(2x-11) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{matrix} x-3=0 \\ x+2=0 \\ 2x-11=0 \end{matrix} \quad \hat{U} \quad \begin{matrix} x=3 \\ x=-2 \\ x=5,5 \end{matrix}$$

Cả ba giá trị này đều thỏa mãn ĐKXĐ

Vậy với $x = -2; x = 3; x = 5,5$ thì A(x) = B(x).

$$b) \frac{A(x)}{B(x)} = 5 \text{ nghĩa là } \frac{(x^2 - x - 6)(x - 5)}{x(x^2 + 2x + 2)} : \frac{(x^2 - x - 6)(x - 4)}{3x^3 + 6x^2 + 6x} = 5$$

$$\text{Hay là } \frac{(x^2 - x - 6)(x - 5)}{x(x^2 + 2x + 2)} \cdot \frac{3x(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 - x - 6)(x - 4)} = 5 \quad (*)$$

Do $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \neq 0$, " x ", nên ta có

$$(*) \hat{=} \frac{3x(x^2 - x - 6)(x - 5)}{x(x^2 - x - 6)(x - 4)} = 5 \frac{3x(x + 2)(x - 3)(x - 5)}{x(x + 2)(x - 3)(x - 4)} = 5$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq 0; x \neq -2; x \neq -3; x \neq -4$$

Từ ĐKXĐ và phương trình trên suy ra $3(x - 5) - 5(x - 4) = 0$

$$\hat{=} 3x - 15 - 5x + 20 = 0 \hat{=} 2x = 5 \hat{=} x = 2,5 \text{ thỏa mãn ĐKXĐ.}$$

$$* \text{ Nhận xét: Từ } \frac{3x(x + 2)(x - 3)(x - 5)}{x(x + 2)(x - 3)(x - 4)} = 5 \text{ suy ra } 3(x - 5) - 5(x - 4) = 0$$

Ta có thể hiểu như sau: Do $x \neq 0; x \neq -2; x \neq -3$; nên $x(x + 2)(x - 3) \neq 0$. Do đó chia cả tử và mẫu cho số

khác 0 ta có $\frac{3(x - 5)}{(x - 4)} = 5$ và với $x \neq -4$ ta được phương trình tương đương $3(x - 5) - 5(x - 4) = 0$

Hoặc có thể hiểu như sau:

$$\text{Từ } \frac{3x(x + 2)(x - 3)(x - 5)}{x(x + 2)(x - 3)(x - 4)} = 5 \text{ với } x \neq 0; x \neq -2; x \neq -3; x \neq -4 \text{ ta có:}$$

$$3x(x + 2)(x - 3)(x - 5) = 5x(x + 2)(x - 3)(x - 4)$$

$$\hat{=} x(x + 2)(x - 3) \cancel{(x - 5) - 5(x - 4)} \hat{=} 0$$

$$\hat{=} 3(x - 5) - 5(x - 4) = 0 \text{ do } x(x + 2)(x - 3) \neq 0$$

Ví dụ 4. Cho phương trình ẩn x :

$$\frac{x + 2m}{x - 5} - 1 = \frac{x + 5}{2m - x} + 1 \text{ (với } m \text{ là hằng số).}$$

a) Giải phương trình với $m = 5$;

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 10$;

b) Giải phương trình với tham số m .

* *Tìm cách giải:* Đây là phương trình tham số. Khi giải cần lưu ý biện luận theo các giá trị của tham số m .

Giải

$$\frac{x + 2m}{x - 5} - 1 = \frac{x + 5}{2m - x} + 1 \hat{=} \frac{x + 2m}{x - 5} + \frac{x + 5}{x - 2m} = 2$$

a) Khi $m = 5$ ta có: $\frac{x+10}{x-5} + \frac{x+5}{x-10} = 2$ (1)

Với ĐKXĐ $x \neq 5$ và $x \neq 10$ thì

$$\text{từ (1)} \Rightarrow x^2 - 100 + x^2 - 25 = 2x^2 - 30x + 100$$

$$\Leftrightarrow 30x = 225 \Rightarrow x = 7,5 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

b) Nếu $x = 10$ ta có $\left(\frac{10+2m}{5} + \frac{15}{10-2m}\right) = 2$ (2)

Với ĐKXĐ $m \neq 5$ (2) $\Rightarrow 100 - 4m^2 + 75 = 100 - 20m$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m - 75 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-15)(2m+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2m-15=0 \\ 2m+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=7,5 \\ m=-2,5 \end{cases}$$

c) Điều kiện của nghiệm nếu có là $x \neq 5$ và $x \neq 2m$

Biến đổi phương trình $\frac{x+2m}{x-5} + \frac{x+5}{x-2m} = 2$ thành

$$(x+2m)(x-2m) + (x+5)(x-5) = 2(x-5)(x-2m)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4m^2 + x^2 - 25 = 2x^2 - 4mx - 10x + 20m$$

$$\Leftrightarrow 4mx + 10x = 4m^2 + 20m + 25 \Rightarrow 2x(2m+5) = (2m+5)^2 \quad (*)$$

Nếu $m \neq -2,5$ thì $x = \frac{2m+5}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu

$$\frac{2m+5}{2} \neq 5 \text{ và } \frac{2m+5}{2} \neq 2m \Rightarrow 2m+5 \neq 10 \text{ và } 2m+5 \neq 4m \Rightarrow m \neq -2,5$$

và $\frac{2m+5}{2} \neq 5 \Rightarrow 2m+5 \neq 10 \Rightarrow m \neq -2,5$

+ Nếu $m = -2,5$ thì (*) có dạng $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng $\forall x \neq \pm 5$

Kết luận: Nếu $m \neq \pm 2,5$ phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2m+5}{2}$

Nếu $m = 2,5$ phương trình vô nghiệm;

Nếu $m = -2,5$ phương trình nghiệm đúng $\forall x \neq \pm 5$

Nhận xét: Câu b) có cách giải khác như sau:

$$\frac{10+2m}{5} + \frac{15}{10-2m} = 2 \Rightarrow 100 - 4m^2 + 75 = 100 - 20m$$

$$\Leftrightarrow 100 = 4m^2 - 20m + 25$$

$$\hat{U} \ 10^2 = (2m - 5)^2 \quad \hat{U} \begin{matrix} \acute{e}m - 5 = 10 \\ \grave{e}m - 5 = -10 \end{matrix} \quad \hat{U} \begin{matrix} \acute{e}m = 15 \\ \grave{e}m = -5 \end{matrix} \quad \hat{U} \begin{matrix} \acute{e}n = 7,5 \\ \grave{e}n = -2,5 \end{matrix}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$\frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{y^2 + 3y + 2} + \frac{1}{y^2 + 5y + 6} + \frac{1}{y^2 + 7y + 12} + \frac{1}{y^2 + 9y + 20} = \frac{1}{15}$$

* *Tìm cách giải:* Các phân thức vế trái sau khi phân tích mẫu thành nhân tử có dạng $\frac{1}{a(a+1)}$. Ta có:

$$\frac{1}{a(a+1)} = \frac{(a+1) - a}{a(a+1)} = \frac{a+1}{a(a+1)} - \frac{a}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$$

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } y \neq 0; y \neq -1; y \neq -2; y \neq -3; y \neq -4; y \neq -5.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} + \frac{1}{(y+2)(y+3)} + \frac{1}{(y+3)(y+4)} + \frac{1}{(y+4)(y+5)} = \frac{1}{30}$$

$$\hat{U} \ \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+3} + \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} + \frac{1}{y+4} - \frac{1}{y+5} = \frac{1}{30}$$

$$\hat{U} \ \frac{1}{y} - \frac{1}{y+5} = \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow 30(y+5) - 30y = y^2 + 5y$$

$$\hat{U} \ y^2 + 5y - 150 = 0$$

$$\hat{U} \ (y-10)(y+15) = 0 \quad \hat{U} \begin{matrix} \acute{e}y - 10 = 0 \\ \grave{e}y + 15 = 0 \end{matrix} \quad \hat{U} \begin{matrix} \acute{e}y = 10 \\ \grave{e}y = -15 \end{matrix}$$

Tập nghiệm là $S = \{-15; 10\}$

Ví dụ 6. Giải phương trình (với z là ẩn; m, n là tham số):

$$\frac{m(z^2 + 1)}{z^2 - 1} - \frac{n}{z + 1} + \frac{1}{z - 1} = \frac{mz}{z - 1}.$$

* *Tìm cách giải.* Phương trình có ẩn ở mẫu chứa tham số, cần lưu ý ĐKXĐ và biện luận theo các tham số m và n .

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } z \neq \pm 1.$$

Khi ấy phương trình (PT) trở thành $\frac{m(z^2 + 1)}{z^2 - 1} - \frac{n}{z + 1} + \frac{1 - mz}{z - 1} = 0$

$$\hat{=} \frac{m(z^2 + 1) - n(z - 1) + (1 - mz)(z + 1)}{z^2 - 1} = 0$$

$$\hat{=} \frac{mz^2 + m - nz + n + z + 1 - mz^2 - mz}{z^2 - 1} = 0$$

$$\hat{=} \frac{(m + n + 1) - (m + n - 1)z}{z^2 - 1} = 0$$

$$\text{Đ} \quad (m + n + 1) - (m + n - 1)z = 0$$

+ Nếu $m + n - 1 = 0$ phương trình trở thành $2 - 0z = 0 \hat{=} 0z = 2$

Phương trình này vô nghiệm. Do đó PT vô nghiệm.

+ Nếu $\hat{=} m + n - 1 \neq 0$ thì $z = \frac{m + n + 1}{m + n - 1}$

Đổi chiếu với ĐKXĐ ta thấy:

$$z = \frac{m + n + 1}{m + n - 1} \neq 1 \text{ luôn được thỏa mãn}$$

vì nếu $z = 1$ thì sẽ suy ra $1 = -1$, vô lí

$$z = \frac{m + n + 1}{m + n - 1} \neq -1 \text{ được thỏa mãn nếu } m + n \neq 0$$

Vì nếu $z = -1$ thì $\frac{m + n + 1}{m + n - 1} = -1$ thì $m + n + 1 = -m - n + 1$ suy ra $2(m + n) = 0$ hay $m + n = 0$.

Kết luận:

+ Nếu $m + n = 1$ hoặc $m + n = 0$ thì PT vô nghiệm.

+ Nếu $m + n \neq 1$ và $m + n \neq 0$ thì PT có nghiệm là $z = \frac{m + n + 1}{m + n - 1}$

C. Bài tập vận dụng

18.1. Giải các phương trình:

a) $\frac{x + 3}{x - 3} + \frac{x - 5}{x + 4} = \frac{2x^2}{x^2 + x - 12};$

b) $\frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} = \frac{3}{x - 4};$

c) $\frac{1}{x + 2} - \frac{x - 5}{x - 1} + 1 = \frac{3}{x^2 + x - 2};$

d) $\frac{7}{x - 4} + 1 = \frac{3}{x^2 - 5x + 4} - \frac{1}{x - 1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x^1 \geq 3; x^1 \geq 4$. Lưu ý: $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$

Đáp số: $x = 27$.

b) ĐKXĐ: $x^1 \geq 2; x^1 \geq 3; x^1 \geq 4$. Biến đổi thành $2x^2 - 17x + 30 = 0$

Đáp số: $x = 2,5; x = 6$.

c) ĐKXĐ: $x^1 \geq 1; x^1 \geq 2$. Lưu ý: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Đáp số $x = -0,8$.

d) ĐKXĐ: $x^1 \geq 1; x^1 \geq 4$. Lưu ý: $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

Đáp số: $x = 2; x = -5$.

18.2. Giải các phương trình:

a) $3 + \frac{3+x}{3-x} = \frac{3x-1}{x+3} - \frac{35}{x^2-9}$;

b) $\frac{x-3}{2-x} + \frac{2x^2-21}{x^3-8} = \frac{5}{x^2+2x+4}$

c) $\frac{x^2-3x}{x^2+3x} + \frac{25}{2x^2+3x-9} = \frac{5-2x}{2x-3} + \frac{2x^2+61}{(2x-3)(x+3)}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x^1 \geq 3; x^1 \geq 3$. Lưu ý: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

Biến đổi thành $-x^2 + 4x - 4 = 0$. Đáp số: $x = 2$.

b) Ta có $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ mà $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0$

" x nên ĐKXĐ: $x^1 \geq 2$. Biến đổi thành $-(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$. Đáp số: $x = 1$

c) ĐKXĐ: $x^1 \geq 1,5; x^1 \geq 3$. Lưu ý: $2x^2 + 3x - 9 = (2x - 3)(x + 3)$

Biến đổi thành $x^2 - 4x - 21 = 0 \hat{=} (x + 3)(x - 7) = 0 \hat{=} x = -3$ hoặc $x = 7$.

Nghiệm là $x = 7$ (loại $x = -3$ vì không thỏa mãn ĐKXĐ).

18.3. Giải các phương trình:

a) $\frac{y+1}{(y+1)^2+1} + \frac{y}{(y-1)^2+1} = \frac{2(y^3+5)}{y^4+4}$

b) $\frac{y(y+2)}{y^2+2(y+2)} - \frac{y(y-2)}{y^2-2(y-2)} = \frac{36-y^2}{y^4+4y^2+16}$;

$$c) \frac{y^2}{y(y-1)+1} - \frac{1}{y(y+1)+1} = \frac{3}{(y^4+y^2+1)y} + \frac{2y-2}{y^2-y+1}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phân thức ở các phương trình trong bài xuất hiện đa thức bậc bốn ở mẫu số, việc phân tích các mẫu thành nhân tử đòi hỏi việc thêm, bớt các hạng tử một cách hợp lý, sáng tạo.

a) Nhận xét: $(y+1)^2 + 1 = y^2 + 2y + 2 > 0, \forall y$

$$(y-1)^2 + 1 = y^2 - 2y + 2 > 0, \forall y$$

$$y^4 + 4 = (y+2)^2 - 4y^2 = (y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2) > 0, \forall y$$

Do đó ĐKXĐ là $y \in \mathbb{R}$. Quy đồng, khử mẫu, chuyển về và thu gọn được phương trình

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y+4)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = -4 \text{ hoặc } y = 2. \text{ Cả hai giá trị đều thỏa mãn ĐKXĐ.}$$

Phương trình có hai nghiệm là $y = -4$ và $y = 2$.

b) Ta có $y^2 + 2(y+2) = y^2 + 2y + 4 = (y+1)^2 + 3 > 0, \forall y$

$$\text{và } y^2 - 2(y-2) = y^2 - 2y + 4 = (y-1)^2 + 3 > 0, \forall y$$

$$y^4 + 4y^2 + 16 = y^4 + 8y^2 + 16 - 4y^2 = (y^2 + 4)^2 - 4y^2$$

$$= (y^2 + 2y + 4)(y^2 - 2y + 4) > 0, \forall y$$

Do đó ĐKXĐ là $y \in \mathbb{R}$. Quy đồng, khử mẫu, chuyển về và thu gọn được:

$$y^2 + 16y - 36 = 0 \Leftrightarrow (y+18)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = -18 \text{ hoặc } y = 2.$$

Cả hai giá trị đều thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $y = -18$ và $y = 2$.

$$c) \frac{y^2}{y(y-1)+1} - \frac{1}{y(y+1)+1} = \frac{3}{(y^4+y^2+1)y} + \frac{2y-2}{y^2-y+1}$$

$$\text{Ta có: } y(y-1)+1 = y^2 - y + 1 = y^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} > 0, \forall y;$$

$$y(y+1)+1 = y^2 + y + 1 = y^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} > 0, \forall y$$

$$y^4 + y^2 + 1 = y^4 + 2y^2 + 1 - y^2 = (y^2 + 1)^2 - y^2$$

$$= (y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1) > 0, \forall y$$

Vậy ĐKXĐ là $y \neq 0$.

Thực hiện các bước giải ta được nghiệm của phương trình là $y = 1,5$

18.4. Giải các phương trình:

$$a) \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}$$

$$b) 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 2z\frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$c) z^2 - 6z + 13 = \frac{10}{z^2 - 6z + 10}$$

$$d) \frac{z^2 + 2z + 4}{z - 2} + 7 = \frac{8 - z^3}{(z - 2)^2}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ ĐKXĐ: } z \neq 0.$$

$$\text{Biến đổi thành } 2z^3 - 3z^2 - 4 = 0 \hat{=} (z - 2)(2z^2 + z + 2) = 0$$

$$\hat{=} z = 2 \text{ do } 2z^2 + z + 2 = 2\frac{z^2}{z} + \frac{1}{4}\frac{z^2}{z} + \frac{15}{16}\frac{z^2}{z} > 0, \forall z$$

$z = 2$ thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm của phương trình.

$$b) \text{ ĐKXĐ: } z \neq 0. \text{ Ta có: } 2z^3 - 3z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$\hat{=} (z + 1)(z - 2)(2z - 1) = 0 \hat{=} z = -1; z = 2 \text{ hoặc } z = \frac{1}{2}$$

Cả ba giá trị này đều thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm của phương trình..

$$c) \text{ Do } z^2 - 6z + 10 = (z - 3)^2 + 1 > 0, \forall z \text{ nên ĐKXĐ: } z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } z^2 - 6z + 10 = t > 0 \text{ ta có } (t + 3) - \frac{10}{t} = 0 \hat{=} t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$\hat{=} (t + 5)(t - 2) = 0 \hat{=} t = 2 (\text{do } t > 0) \hat{=} z^2 - 6z + 10 = 2$$

$$\hat{=} (z - 2)(z - 4) = 0 \hat{=} \begin{cases} z = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$z = 2; z = 4$ đều thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm của phương trình.

$$d) \text{ ĐKXĐ: } z \neq 2$$

$$\text{Lưu ý } z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$$

$$\text{Đặt } \frac{z^2 + 2z + 4}{z - 2} = t$$

$$\text{Biến đổi phương trình thành } \hat{U} \quad t^2 + 8t + 7 = 0 \quad \hat{U} \quad (t + 1)(t + 7) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} t = -1 \\ t = -7 \end{cases}$$

$$* \quad \text{Với } t = -1 \text{ thì } \frac{z^2 + 2z + 4}{z - 2} = -1 \quad \hat{U} \quad z^2 + 3z + 2 = 0 \quad \hat{U} \quad (z + 1)(z + 2) = 0.$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} t = -1 \\ t = -7 \end{cases} \quad \text{Thỏa mãn ĐKXD.}$$

$$* \quad \text{Với } t = -7 \text{ thì } \frac{z^2 + 2z + 4}{z - 2} = -7 \quad \hat{U} \quad z^2 + 9z - 10 = 0 \quad \hat{U} \quad (z - 1)(z + 10) = 0$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -10 \end{cases} \quad \text{Thỏa mãn ĐKXD.}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-10; -2; -1; 1\}$

18.5. Giải các phương trình:

$$a) \frac{(t - 2)^2}{t^2 - 4t + 5} - \frac{t^2 - 4t + 3}{(t - 2)^2} = \frac{1}{90}$$

$$b) \frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 + 2t + 3} + \frac{t^2 + 2t + 3}{t^2 + 2t + 4} = \frac{17}{12}$$

$$c) \frac{3t}{t^2 + 3t + 2} + \frac{2t}{t^2 + t + 2} = 1$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Trong các câu a); b) ta thấy xuất hiện các hạng tử chứa ẩn cùng bậc trong các đa thức có hệ số giống nhau nên sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải. Câu c) sau khi chia cả tử và mẫu cho mới xuất hiện ẩn phụ.

$$a) \quad \text{ĐKXD: } t \neq 2. \text{ Đặt } t^2 - 4t = u \text{ và } u \neq -4 \text{ và } u \neq -5.$$

$$\text{Phương trình trở thành } \frac{u + 4}{u + 5} - \frac{u + 3}{u + 4} = \frac{1}{90}. \text{ Biến đổi được } u^2 + 9u - 70 = 0$$

$$\hat{U} \quad (u - 5)(u + 14) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} u - 5 = 0 \\ u + 14 = 0 \end{cases}$$

$$+ \quad \text{Với } u - 5 = 0 \quad \hat{U} \quad t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \hat{U} \quad (t - 5)(t + 1) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} t = 5 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$+ \quad \text{Với } u + 14 = 0 \quad \hat{U} \quad t^2 - 4t + 14 = 0 \text{ vô nghiệm vì } t^2 - 4t + 14 = (t - 2)^2 + 10 > 0 \quad \forall t.$$

Phương trình có hai nghiệm là $t = -1$ và $t = 5$.

b) ĐKXD: " $x \in \mathbb{R}$ do $t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2 > 0$ "

$t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 3 > 0$

Đặt $t^2 + 2t + 3 = u$ phương trình trở thành $\frac{u-1}{u} + \frac{u}{u+1} = \frac{17}{12}$

Biến đổi phương trình thành $7u^2 - 17u - 12 = 0$

$\hat{U} (u-3)(7u+4) = 0 \hat{U} u = 3 (do u > 0)$

Hay $t^2 + 2t + 3 = 3 \hat{U} t^2 + 2t = 0 \hat{U} t(t+2) = 0 \hat{U} \begin{matrix} t = 0 \\ t = -2 \end{matrix}$

Nghiệm của phương trình là $t = -2$ và $t = 0$.

c) ĐKXD: $t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2) \neq 0$ khi $t \neq -1$ và $t \neq -2$.

Vì $t^2 + t + 2 = \frac{t^2}{t} + \frac{1}{t} + \frac{7}{4} > 0, \forall t$. Do $t = 0$ không phải là nghiệm $\Rightarrow t \neq 0$

Chia cả tử và mẫu của hai phân thức ở vế trái cho t ta được phương trình:

$-\frac{3}{t+\frac{2}{t}+3} + \frac{2}{t+\frac{2}{t}+1} = 1 \hat{U} \frac{3}{u+3} + \frac{2}{u+1} = 1$ với $t + \frac{2}{t} = u$ và $u \neq -1$ và $u \neq -3$

Giải phương trình với ẩn u ta được $u^2 - u - 6 = 0 \hat{U} (u-3)(u+2) = 0$

$\hat{U} u = 3$ hoặc $u = -2$ thỏa mãn ĐKXD.

Với $u = 3$ ta có $t + \frac{2}{t} = 3 \hat{U} t^2 - 3t + 2 = 0 \hat{U} (t-1)(t-2) = 0$

$\hat{U} t = 1$ hoặc $t = 2$

Với $u = -2$ ta có $-\frac{2}{t} + \frac{2}{t} = -2 \hat{U} t^2 + 2t + 2 = 0$ vô nghiệm vì

$t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1 > 0, \forall t$

Vậy nghiệm của phương trình là $t = 1$ và $t = 2$

18.6. Giải các phương trình:

a) $(2x^2 + 9x - 4) \left(\frac{2x-2}{x^2-9x} + 1 \right) = (x^2 + 11x + 20) \left(\frac{2x-2}{x^2-9x} + 1 \right)$

b) $\frac{x}{2x^2 - 5x + 3} - \frac{2x+2}{2x^2 - 9x + 7} = \frac{5}{2x^2 - 5x + 3} - \frac{x+7}{2x^2 - 9x + 7}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hai vế có nhân tử chung. Ta chuyển vế rồi đưa về dạng $A(x).B(x) = 0$

ĐKXĐ: $x \neq \frac{8}{9}$. Biến đổi phương trình thành $(x^2 - 2x - 24) \left(\frac{3x-2}{8x+9} + 1 \right) = 0$

+ Với $x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 6 \end{cases}$

+ Với $\frac{3x-2}{8x+9} + 1 = 0 \Rightarrow 3x-2+8-9x = 0 \Rightarrow x = 1$

Cả ba giá trị trên x đều thỏa mãn ĐKXĐ nên tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4; 1; 6\}$

b) Các mẫu số khá phức tạp nên không dễ tìm ĐKXĐ. Nếu ta chuyển vế rồi cộng, trừ các phân thức cùng mẫu ta thấy xuất hiện nhân tử chung là $(x-5)$

Từ đó có cách giải sau: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x-5}{2x^2-5x+3} - \frac{x-5}{2x^2-9x+7} = 0$$

$$\Rightarrow (x-5) \left(\frac{1}{2x^2-5x+3} - \frac{1}{2x^2-9x+7} \right) = 0 \Rightarrow \frac{(x-5)(4-4x)}{(2x^2-5x+3)(2x^2-9x+7)} = 0$$

Xét tử số $(x-5)(4-4x) = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 5$.

+ Với $x = 1$ thì $2x^2 - 9x + 7 = 0$ phương trình không xác định.

+ Với $x = 5$ thì $(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 - 9x + 7) = 28.12 \neq 0$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 5$.

18.7. Cho phương trình $x \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right) = \frac{5a(a+3x)}{4(x^2-a^2)} - \frac{x}{x-a}$ với a là hằng số.

a) Tìm a để phương trình trên có nghiệm là nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{-29}{25-x^2}$;

b) Giải phương trình với a = 6.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \pm a$

Với ĐKXĐ trên ta biến đổi phương trình thành:

$$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2+15ax}{4(x^2-a^2)}. \text{ Quy đồng và khử mẫu được phương trình}$$

$$4x(x-a) + 8x(x+a) = 5a^2 - 15ax$$

$$\hat{U} \ 12x^2 - 11ax - 5a^2 = 0 \hat{U} \ 12x^2 + 4ax - 15a^2 = 0 \hat{U} \ (3x + a)(4x - 5a) = 0$$

a) Giải phương trình $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{-29}{25-x^2}$ với $x \neq \pm 5$ ta có nghiệm $x = 4$

Với $x = 4$ ta có: $(12+a)(16-5a) = 0 \hat{U} \begin{cases} a = -1,2 \\ a = 3,2 \end{cases}$

b) Khi $a = 6$ thì $(3x+6)(4x-30) = 0 \hat{U} \begin{cases} x = -2 \\ x = 7,5 \end{cases}$ thỏa mãn ĐKXD.

18.8. Tìm x biết $\frac{m^2+n^2}{x} + \frac{m^2n^2}{x^2} + \frac{1}{mn} - \frac{2mn}{x} - (m+n)$ với m; n là hằng số $m \neq 0, n \neq 0$;

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXD: $x \neq 0$

Chuyển vế ta có $\frac{m^2+n^2+2mn}{x} + \frac{m^2n^2}{x^2} + \frac{1}{mn} + (m+n) = 0$

$$\hat{U} \frac{(m+n)^2}{x} + \frac{mn(m+n)}{x^2} + (m+n) = 0$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$$(m+n)x^2 + (m+n)^2x + mn(m+n) = 0 \hat{U} (m+n)x^2 + (m+n)x + mn = 0$$

+ Nếu $m+n = 0$ thì phương trình thỏa mãn " $x \neq 0$ "

+ Nếu $m+n \neq 0$ thì $x^2 + (m+n)x + mn = 0$

$$\hat{U} (x+m)(x+n) = 0 \hat{U} \begin{cases} x = -m \\ x = -n \end{cases} \text{ thỏa mãn ĐK } x \neq 0$$

18.9. Giải các phương trình:

a) $\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x^2-7x+12} = \frac{5}{x^2-6x+8} + \frac{14}{x^3-9x^2+26x-24}$

b) $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \dots + \frac{1}{x^2+39x+380} = \frac{19}{42}$

c) $\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x^2-6x+8} + \dots + \frac{2}{x^2-18x+80} = \frac{5}{12}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXD: $x \neq 2; x \neq 3; x \neq 4$. Phân tích các mẫu thành nhân tử ta có:

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)(x-4)} = \frac{5}{(x-2)(x-4)} + \frac{14}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$$3(x-4) - 4(x-2) = 5(x-3) + 14$$

$$\hat{U} \quad 3x - 12 - 4x + 8 = 5x - 15 + 14 \quad \hat{U} \quad x = -0,5 \text{ thỏa mãn ĐKXD.}$$

$$b) \text{ ĐKXD: } x \in \{-1; -2; -3; \dots; -19; -20\}.$$

Nhận xét: với $n \in N$ thì

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{(x+n+1) - (x+n)}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$$

Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+19)(x+20)} = \frac{19}{42}$$

$$\hat{U} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+19} - \frac{1}{x+20} = \frac{19}{42}$$

$$\hat{U} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+20} = \frac{19}{42}. \text{ Quy đồng và khử mẫu được phương trình}$$

$$x^2 + 21x - 22 = 0 \quad \hat{U} \quad (x-1)(x+22) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -22 \end{cases} \text{ thỏa mãn ĐKXD}$$

$$c) \text{ ĐKXD: } x \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$$

Nhận xét: với $n \in N$ ta có

$$\frac{2}{(x+n)(x+n-2)} = \frac{(x+n) - (x+n-2)}{(x+n)(x+n-2)} = \frac{1}{x+n-2} - \frac{1}{x+n}$$

Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-4)} + \dots + \frac{2}{(x-8)(x-10)} = \frac{5}{12}$$

$$\hat{U} \quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x-8} = \frac{5}{12} \quad \hat{U} \quad \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Quy đồng và khử mẫu được phương trình: } x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$\hat{U} \quad (x-12)(x+2) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x = 12 \\ x = -2 \end{cases} \text{ thỏa mãn ĐKXD.}$$

$$18.10. \text{ Giải các phương trình: } \frac{x^2 - 4x + 6}{x-2} + \frac{x^2 - 6x + 12}{x-3} = (2x-5) - \frac{x^2 - 24}{x^2 - 5x + 6}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có thể vận dụng các bước để giải. Nếu quy đồng mẫu ngay sẽ xuất hiện các đa thức bậc ba, việc thực hiện sẽ dài. Tuy nhiên có phương pháp khá sáng tạo và ngắn gọn như sau:

★ ĐKXD: $x \neq 2; x \neq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$\frac{x^2 - 4x + 6}{x - 2} + \frac{(x^2 - 6x + 9) + 3}{x - 3} = (2x - 5) - \frac{x^2 - 24}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\hat{U} (x - 2) + \frac{2}{x - 2} + (x - 3) + \frac{3}{x - 3} = (2x - 5) - \frac{x^2 - 24}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\hat{U} \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} + \frac{x^2 - 24}{(x - 2)(x - 3)} = 0$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình $x^2 + 5x - 36 = 0$

$\hat{U} (x + 9)(x - 4) = 0 \hat{U} x = -9$ hoặc $x = 4$ thỏa mãn ĐKXD.

18.11. Giải các phương trình: $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$

(Thi vào lớp 10 chuyên Quốc học Huế, năm học 1996 - 1997)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXD: $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3) \neq 0$ khi $x \neq 1$ và $x \neq 1,5$

$$2x^2 + x + 3 = 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{23}{8} > 0, \forall x. \text{ Do } x = 0 \text{ không là nghiệm của phương, đặt } 2x + \frac{3}{x} = t$$

$$PT \hat{U} \frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6 \hat{U} \frac{2}{t - 5} + \frac{13}{t + 1} = 6$$

ĐKXD $t \neq 5$ và $t \neq -1$

$$\hat{U} 6t^2 - 39t + 33 = 0 \hat{U} (t - 1)(6t - 33) = 0 \hat{U} \begin{cases} t = 1 \\ t = 5,5 \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} 2x + \frac{3}{x} = 1 \\ 2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2} \end{cases} \hat{U} \begin{cases} x^2 - x + 3 = 0 \\ x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

(1) vô nghiệm vì $2x^2 - x + 3 = 2x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{23}{8} > 0, \forall x$

(2) $\hat{U} (x - 2)(4x - 3) = 0 \hat{U} x = 2$ hoặc $x = \frac{3}{4}$ thỏa mãn ĐKXD

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2; x = \frac{3}{4}$

18.12. Giải phương trình $x^3 + \frac{x^3}{(x - 1)^3} + \frac{3x^2}{x - 1} - 2 = 0$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2000 - 2001)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Áp dụng để giải phương trình. Ta có ĐKXD: $x \neq 1$

$$PT \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{\frac{x}{x-1}}{x-1} - 3x \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x-1} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-1)^2} - 3 \frac{x^2}{(x-1)^2} + 3 \frac{x^2}{(x-1)^2} - 1 - 1 = 0. \text{ Đặt } y = \frac{x^2}{x-1} \text{ ta có}$$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^3 = 1 \Leftrightarrow y = 2$$

$$\text{Hay là } \frac{x^2}{x-1} = 2 \Rightarrow x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

Phương trình đã cho vô nghiệm vì $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \quad \forall x$

18.13. Giải phương trình $\frac{5}{x^2 - 4x + 5} - x^2 + 4x - 1 = 0$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Quốc học Huế, năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{ĐKXD: } x \in \mathbb{R} \text{ do } x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \neq 0; \forall x$$

Đặt $x^2 - 4x + 5 = y$ thì $y \geq 1$ và $-x^2 + 4x - 1 = -y + 4$. Phương trình thành

$$\frac{5}{y} - y + 4 = 0 \Leftrightarrow 5 - y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (y-5)(y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -1 (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\star \quad x^2 - 4x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4. \text{ Tập nghiệm } S = \{0; 4\}$$

18.14. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi Toán 8 huyện Thường Tín - Hà Nội, năm học 2012 - 2013).

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{ĐKXD: } x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{8}$$

$$\hat{U} \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \hat{U} (x+2)(x-10) = 0$$

$$\hat{U} x = -2 \text{ hoặc } x = 10. \text{ Tập nghiệm } S = \{-2; 10\}$$

18.15. Giải phương trình $\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \frac{4}{7}$ và $x^3 \neq -2$

$$\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4 \hat{U} \frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - 5 + 1 - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 0$$

$$\hat{U} \frac{x^3 - 56x - 20 + 35x}{4 - 7x} + \frac{x^3 + 2 - 21x - 22}{x^3 + 2} = 0$$

$$\hat{U} (x^3 - 21x - 20) \left(\frac{1}{4 - 7x} + \frac{1}{x^3 + 2} \right) = 0$$

* Xét $x^3 - 21x - 20 = 0 \hat{U} (x+1)(x-5)(x+4) = 0$ ta tìm được: $x = -4; x = -1; x = 5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

* Xét $\frac{1}{4 - 7x} + \frac{1}{x^3 + 2} = 0$ biến đổi thành $x^3 - 7x + 6 = 0$

$\hat{U} (x-1)(x-2)(x+3) = 0$ ta tìm được $x = -3; x = 1; x = 2$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4; -3; -1; 1; 2; 5\}$

18.16. Giải phương trình $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$

(Đề thi chọn đội tuyển Toán 9 huyện Thường Tín - Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2(x+1) - x^2(x-1) = 2x \hat{U} 2x^2 - 2x = 0$$

$$\hat{U} 2x(x-1) = 0 \hat{U} x = 0 \text{ hoặc } x = 1. \text{ Loại } x = 1$$

Tập nghiệm $S = \{0\}$...

18.17. Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$

(Đề thi chọn đội tuyển Toán 9 quận Gò Vấp TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXD: $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - 1 = 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{x^2-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x^2} = \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)^3 + x^3}{x^2(x+1)^2} = 0$$

$$\text{Với } x \neq 0 \text{ và } x \neq -1 \text{ thì } \frac{(1-x)(1+x)^3 + x^3}{x^2(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)^3 + x^3}{x^2(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^3 + x^3 = 0$$

* Với $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn ĐKXD.

* Với $(1+x^3)+x^3=0 \Leftrightarrow (1+x)^3 = -x^3 \Leftrightarrow 1+x = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn ĐKXD.

Tập nghiệm là $S = \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$

18.18. Giải phương trình $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{7}{6}$

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi Toán 8 huyện Thường Tín - Hà Nội, năm học 2014 - 2015).

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXD: $x \in \mathbb{R}$

Đặt: $x^2 - 2x + 2 = t > 0$. Phương trình trở thành $\frac{t-1}{t} + \frac{t}{t+1} = \frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow 5t^2 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (do $t > 0$)

Hay $x^2 - 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Tập nghiệm là $S = \{0; 2\}$