**ĐỀ SỐ 11**

**UBND HUYỆN MỘC CHÂU – SƠN LA**

**THCS TÂY TIẾN \_ HSG TOÁN 9 2023-2024**

**Bài 1. (5 điểm)**

**1,** Cho biểu thức$ P=\frac{x}{x-\sqrt{x}}+\frac{2}{x+2\sqrt{x}}+\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a, Rút gọn P.

b, Tính P khi x = 3+$2\sqrt{2}$.

c, Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2, Cho hàm số y =mx – 2m -1 (m khác 0 )

a, Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

b, Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Xác định m để diện tích tam giác AOB bằng 4 ( đvdt).

**Bài 2. (3 điểm)**

a, Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $y^{2}+2xy-3x-2=0$

b, Tìm số tự nhiên n sao cho $n^{2}+2n+12$ là số chính phương.

**Bài 3. (4 điểm)**

a, Giải phương trình $x^{2}+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$ .

b, Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x+y+z= \sqrt{6}\\x^{3}+y^{3}+z^{3}=3xyz\end{array}(x,y\in R)\right.$

Cho AB là đường kính của đường tròn (0;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (0;R) tại M.

a, Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b, Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O;R)

c, Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

**Bài 5. (2 điểm)**

Cho x, y, z > 0 thỏa mãn x + y + z = 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^{2}}{y+z}+\frac{y^{2}}{z+x}+\frac{z^{2}}{x+y}$

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1. (5.0 điểm)**

**1.a**, với x > 0; x # 1, ta có:

$$ P=\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}+\frac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x}+2\right)+2\left(\sqrt{x}-1\right)+x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

**1.b,** $x=3+2\sqrt{2}⇔\sqrt{x}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}=\sqrt{2}+1$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})$$

**1.c,** ĐK: x > 0; x # 1:

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 2. Ư(2) = $\left\{-1;1;-2;2\right\}$

Nếu $\sqrt{x}-1=1⇔\sqrt{x}=2⇔x=4$ (TM)

Nếu $\sqrt{x}-1=-1⇔\sqrt{x}=0⇔x=0$ (KTM)

Nếu $\sqrt{x}-1=2⇔\sqrt{x}=-1$ (vô lí)

Vậy với x = 4 hoặc x = 9 thì P nhận giá trị nguyên

2.a, Giả sử đồ thị hàm số đi qua điểm M$\left(x\_{0},y\_{0}\right)$ với mọi m. Ta có: $y\_{0}=mx\_{0}-2m-1$ với mọi m $⇔mx\_{0}-2m-1-y\_{0}=0$ với mọi m

$⇔m\left(x\_{0}-2\right)-\left(y\_{0}+1\right)=0$ với mọi m

$$⇔\left\{\begin{array}{c}x\_{0}-2=0\\y\_{0}+1=0\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x\_{0}=2\\y\_{0}=-1\end{array}\right.\right.$$

Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm cố định M(2;-1)

2.b, Đồ thị hàm số cắt hai trục Ox và Oy khi m # 0 và 2m -1 # 0 hay m #0 và m #$\frac{-1}{2}$

A là giao điểm của đồ thị với trục Ox ta có y = 0 thay vào hàm số ta được $\frac{2m+1}{m}$

B là giao điểm của đồ thị với trục Oy ta có x = 0 thay vào hàm số ta được y = -2m -1

Vậy $A\left(\frac{2m+1}{m};0\right);B(0;-2m-1)$

Diện tích tam giác là:

$$S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{2m+1}{m}\right|.\left|-2m-1\right|=\frac{(2m+1)^{2}}{2\left|m\right|}$$

Mà S = 4 $⇔(2m+1)^{2}=8\left|m\right|$

Nếu m < 0, ta có phương trình: $4m^{2}+4m+1=-8m$

$$⇔4m^{2}+12m+1=0⇔\left\{\begin{array}{c}m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2} (TM)\\m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2} (TM)\end{array}\right.$$

Vậy $m\in \left\{\frac{1}{2};\frac{-3+2\sqrt{2}}{2};\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$ .

**Bài 2. (3 điểm)**

a, $y^{2}+2xy-3x-2=0⇔x^{2}+2xy+y^{2}=x^{2}+3x+2$

$⇔(x+y)^{2}=(x+1)(x+2)$ (\*)

VT của (\*) là số chính phương; VP của (\*0 là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0.

$$⇔\left\{\begin{array}{c}x+1=0\\x+2=0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x=-1⇒y=1\\x=-2⇒y=2\end{array}\right.$$

Vậy có 2 cặp số nguyên (x;y) = (-1;1) hoặc (x;y) = (-2;2) thỏa mãn

b, vì $n^{2}+2n+12$ là số chính phương nên đặt $n^{2}+2n+12=k^{2}$ (k $\in N)$

$$⇒\left(n^{2}+2n+1\right)+11⇔k^{2}⇔k^{2}-\left(n+1\right)^{2}=11$$

$$⇔\left(k+n+1\right)\left(k-n-1\right)=11$$

Nhận thấy k + n + 1 > k – n – 1 và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết (k + n +1) (k – n – 1) = 11.1

$$⇔\left\{\begin{array}{c}k+n+1=11\\k-n-1=1\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}k=6\\n=4 (TM)\end{array}\right.\right.$$

Vậy với n = 4 thì vì $n^{2}+2n+12$ là số chính phương

**Bài 3. (4 điểm)**

a, Giải phương trình: $x^{2}+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$

ĐK: x $\geq \frac{2023}{2024}$

$$x^{2}+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$$

$$⇒x^{2}-2x+1+2024x-2023-2\sqrt{2024x-2023}+1=0$$

$$⇔ (x-1)^{2}+\left(\sqrt{2024x-2023}-1\right)^{2}=0$$

Do $(x-1)^{2}\geq 0 và \left(\sqrt{2024x-2023}-1\right)^{2}\geq 0 $với mọi : x $\geq \frac{2023}{2024}$ nên:

$$\left\{\begin{array}{c}x-1=0\\\sqrt{2024x-2023}-1=0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x=1\\\sqrt{2024x-2023}=1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x=1\\2024z=2023=1\end{array}\right.$$

$⇔x=1 $(thỏa mãn điều kiện).

Vậy x =1 là nghiệm của phương trình đã cho.

b, $\left\{\begin{array}{c}x+y+z= \sqrt{6} (1)\\x^{3}+y^{3}+z^{3}=3xyz (2)\end{array}\right.$

$$(2)⇔(x^{3}+y^{3})+z^{3}-3xyz=0$$

$$⇔\left(x+y\right)^{3}-3x^{2}y-3xy^{2}+ z^{3}-3xyz=0$$

$$⇔\left[\left(x+y\right)^{3}+ z^{3}\right]-3x^{2}y-3xy^{2}-3xyz=0$$

$$⇔\left(x+y+z\right)\left[\left(x+y\right)^{2}-\left(x+y\right).z+ z^{2}\right]-\left(3x^{2}y+3xy^{2}+3xyz\right)=0$$

$$⇔\left(x+y+z\right)(x^{2}+2xy+y^{2}-xz-yz+z^{2})-3xy(x+y+z)=0$$

$$⇔\left(x+y+z\right)\left((x^{2}+2xy+y^{2}-xz-yz+z^{3}-3xy\right)=0$$

$$⇔\left(x+y+z\right)\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy-xz-yz\right)=0 (3)$$

Kết hợp (3) với (1): $x+y+z= \sqrt{6}$ , ta có:

$$\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy-xz-yz\right)=0 $$

$$⇔2\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy-xz-yz\right)=0$$

$$⇔2x^{2}+2y^{2}+2z^{2}-2xy-2xz-2yz=0$$

$$⇔(x^{2}-2xy+y^{2})+(y^{2}-2yz+z^{2})+(z^{2}-2zx+x^{2})=0$$

$$⇔\left(x-y\right)^{2}+\left(y-z\right)^{2}+\left(z-x\right)^{2}=0$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}\left(x-y\right)^{2}=0\\\left(y-z\right)^{2}=0 \\\left(z-x\right)^{2}=0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x-y=0\\y-z=0\\z-x=0\end{array}\right.⇔x=y=z (4)$$

Kết hợp (4) và (1): $x+y+z= \sqrt{6}$ , ta có: $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{3} $

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: ( $\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3} $).

**Bài 4. (6 điểm)**



 a, Ta có OI vuông góc vơi AC ( đường kính đi qua trung điểm của dây cung), CH vuông góc với AB (gt). Suy ra: $\hat{CIO }=\hat{CHO}=90°$ . Vậy tứ giác CIOH là tứ giác nội tiếp, suy ra C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b, Xét tam giác AOM và tam giác COM có: OA = OC = R

OM là cạnh chung

$\hat{AOM }=\hat{COM}$ (vì tam giác OCM cân tại O nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường phân giác)

$⇒∆AOM= ∆COM \left(c.g.c\right)⇒\hat{MCO }=\hat{MAO}=90°$

$⇒MC ⊥CO⇒MC $là tiếp tuyến của (O;R).

c, Chi vi tam giác ACB là $P\_{ACB}=AB+AC+CB=2R+AC+CB$

Ta lại có:

$$(AC-CB)^{2}\geq 0⇒AC^{2}+CB^{2}\geq 2AC.CB⇒2AC^{2}+2CB^{2}\geq AC^{2}+2CB^{2}+2AC.CB$$

$$2\left(AC^{2}+CB^{2}\right)\geq \left(AC+CB\right)^{2}⇒AC+CB\leq \sqrt{2\left(AC+CB\right)^{2}}⇒AC+CB\leq \sqrt{2AB^{2}}$$

(pitago) $⇒AC+CB\leq \sqrt{2.4R^{2}}⇒AC+CB\leq 2R\sqrt{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi AC = CB $⇔$ C là điểm chính giữa cung AB. Suy ra $P\_{ACB}\leq 2R+2R\sqrt{2}=2R(1+\sqrt{2})$, dấu “=” xảy ra khi C là điểm chính giữa cung AB.

Vậy max $P\_{ACB}=2R(1+$ $\sqrt{2}$) khi C là điểm chính giữa cung AB.

**Bài 5. (2 điểm)**

Vì x, y, z > 0 ta có:

Áp dụng BĐT coossi đối với 2 số dương $\frac{x^{2}}{y+z} và \frac{y+z}{4}$ ta được:

$\frac{x^{2}}{y + z}+\frac{y+z}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x^{2}}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=2.\frac{x}{2}=x (1)$

Tương tự ta có:

$$\frac{y^{2}}{x+z}+\frac{x+z}{4}\geq y (2)$$

$$\frac{z^{2}}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z (3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được:

$$\left(\frac{x^{2}}{y + z}+\frac{y^{2}}{x+z}+\frac{z^{2}}{x+y}\right)+\frac{x+y+z}{2}\geq x+y+z$$

$$⇔\frac{x^{2}}{y + z}+\frac{y^{2}}{x+z}+\frac{z^{2}}{x+y}\geq x+y+z-\frac{x+y+z}{2}$$

$$⇒P\geq \left(x+y+z\right)-\frac{x+y+z}{2}=2-\frac{2}{2}=2-1=1$$

Dấu”=” xảy ra $⇔x=y=z=\frac{2}{3}$

Vậy GTNN của P là 1 $⇔x=y=z=\frac{2}{3}$.