

CHỦ ĐỀ 01: CƠ BẢN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỀU HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng K .

• Định nghĩa 1.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K , ta nói:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K .

❖ Nhận xét.

• Nhận xét 1.

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

• Nhận xét 2.

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên D .

• Nhận xét 3.

- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:
 - Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.
 - Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

❖ Định lí 1.

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:
 - Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
 - Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

❖ Định lí 2.

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:
 - Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .
 - Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .
 - Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K .

❖ **Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K .

Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f nghịch biến trên K .

Bài toán 1. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

- Bước 1:** Ghi điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên $(\alpha; \beta)$. Chẳng hạn:
 - Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \geq 0$.
 - Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \leq 0$.
- Bước 2:** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt về còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp:
 - $m \geq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \geq \max_{(\alpha; \beta)} g(x)$.
 - $m \leq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \leq \min_{(\alpha; \beta)} g(x)$.
- Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m .

Bài toán 2. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

- Tìm tập xác định, chẳng hạn $x \neq -\frac{d}{c}$. Tính đạo hàm y' .
- Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' > 0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y' < 0$). Giải ra tìm được m (1).
- Vì $x \neq -\frac{d}{c}$ và có $x \in (\alpha; \beta)$ nên $-\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta)$. Giải ra tìm được m (2).
- Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.

➤ **Cần nhớ:** “Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên miền D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) thì phương trình $f(t) = 0$ có tối đa một nghiệm và $\forall u, v \in D$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2)]' = (x^2)' x^4 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x^5 (x-3)(x+3)(x-2)^2 (x+2)^2.$$

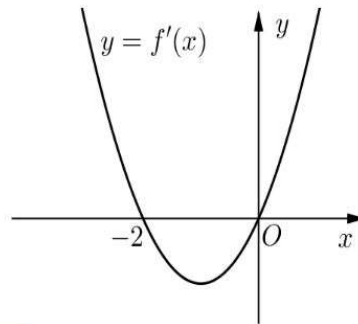
$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = -2 \text{ hoặc } x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot f'(x^2 - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								



Nhìn bảng biến thiên hàm số $y = f(x^2 - 1)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x+1) \cdot f'(x^2+x-2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 (x^2+x) \left((x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \right) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \geq 0 \quad (1) \quad \forall x \in (1; +\infty).$$

Đặt $t = x^2 + x - 2$, $x \in (1; +\infty) \Rightarrow t > 0$.

$$\text{Khi đó (1) trở thành } t^2 + mt + 5 \geq 0 \quad \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t + \frac{5}{t} \geq -m \quad (2) \quad \forall t \in (0; +\infty)$$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow (2)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $h(t) = t + \frac{5}{t} \geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t \in (0; +\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{5}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$.

Suy ra $\min_{t \in (0; +\infty)} (h(t)) = 2\sqrt{5} \Rightarrow (2) \text{ nghiệm đúng } \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{5}$.

Vậy số giá trị nguyên âm của m là 4.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(0) - 1$.

B. $m > f(-1) - e$.

C. $m > f(0) - 1$.

D. $m \geq f(-1) - e$.

Lời giải**Chọn C**

Có $f(x) < e^{x^2} + m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m > g(x) = f(x) - e^{x^2}, \forall x \in (-1; 1)$ (1)

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x.e^{x^2}$ có nghiệm $x = 0 \in (-1; 1)$ và $\begin{cases} g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0) \\ g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$f(0)-1$	

Do đó $\max_{(-1;1)} g(x) = g(0) = f(0) - 1$. Ta được (1) $\Leftrightarrow m > f(0) - 1$.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y	4	1	3	1	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

- A. $m \geq f(-2) - 3$. B. $m > f(2) - 3e^4$. C. $m \geq f(2) - 3e^4$. D. $m > f(-2) - 3$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $f(x) < 3e^{x+2} + m \Leftrightarrow f(x) - 3e^{x+2} < m$.

Đặt $h(x) = f(x) - 3e^{x+2} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2}$.

Vì $\forall x \in (-2; 2), f'(x) \leq 3$ và $x \in (-2; 2) \Rightarrow x + 2 \in (0; 4) \Rightarrow 3e^{x+2} \in (3; 3e^4)$

Nên $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 0, \forall x \in (-2; 2) \Rightarrow f(2) - 3e^4 < h(x) < f(-2) - 3$.

Vậy bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi $m > f(2) - 3e^4$.

VÍ DỤ 6. Tổng các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2020; 2020)$ để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. -2039187. B. 2022. C. 2093193. D. 2021.

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện xác định: $\sin x \neq m$

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m} \Rightarrow y' = \frac{\cos x (\sin x - m) - (\sin x - 3) \cos x}{(\sin x - m)^2} = \frac{\cos x (3 - m)}{(\sin x - m)^2}.$$

$$\text{Vì } x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \text{ nên } \cos x > 0; \sin x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

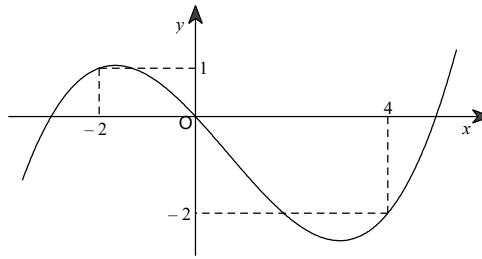
$$\text{Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -1; 0\} \cup \{1; 2\}$$

$$\text{Vậy tổng các giá trị của tham số } m \text{ là: } S = \frac{-2019 + 0}{2} \cdot 2020 + 1 + 2 = -2039187.$$

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

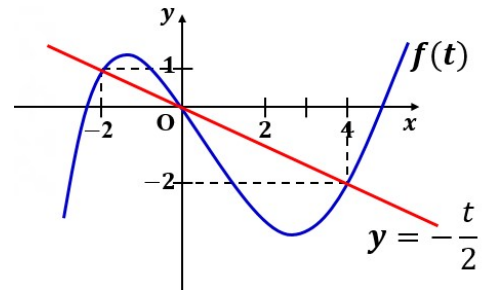
$$\text{Ta có: } g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1.$$

$$\text{Hàm số nghịch biến } \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) > -\frac{1 - 2x}{2}.$$

$$\text{Xét sự tương giao của đồ thị hàm số } y = f'(t) \text{ và } y = -\frac{t}{2}.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } f'(t) > -\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ t > 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 - 2x < 0 \\ 1 - 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

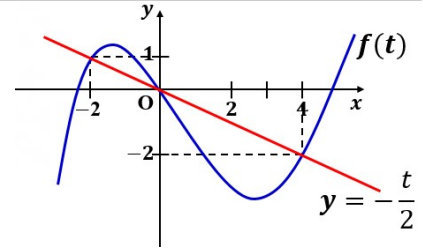


Cách 2:

$$\text{Ta có: } g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = -\frac{1-2x}{2}.$$

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\frac{t}{2}$.



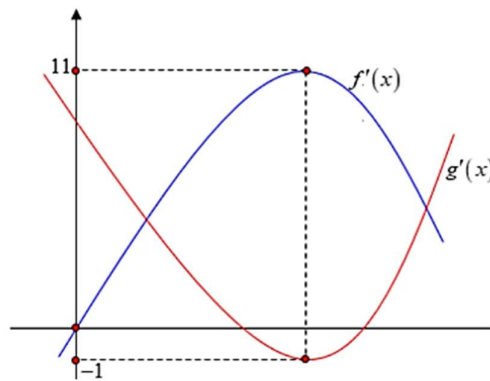
Từ đồ thị ta có: $f'(t) = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$. Khi đó:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -2 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Ta có bảng xét dấu:}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy: hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến là $(m; n)$. Tổng các giá trị nguyên dương a thỏa mãn là?



A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có đạo hàm: $h'(x) = f'(x) - g'(x) - a^2$. Để hàm số đồng biến thì $h'(x) \geq 0$.

$\Rightarrow a^2 \leq f'(x) - g'(x)$. Từ đồ thị, ta có $f'(x) - g'(x) \geq 12 \Rightarrow a^2 \leq 12$.

Suy ra số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là $a \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy tổng các giá trị của a thỏa mãn là 6.