

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SÓC SƠN**

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
MÔN THI: TOÁN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1: (5,0 điểm)

a) Cho các số thực khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 2014$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2014}$.

Tính giá trị $M = \frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}}$.

b) Tìm số tự nhiên n để $25^{n^2 - 3n + 1} - 12$ là số nguyên tố.

Bài 2: (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 2x - 2\sqrt{2x+1} - 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x - 5 + 2xy \\ x^4 + y^4 = 9z - 5 - 4z^2 - 2x^2y^2 \end{cases}$$

Bài 3: (2,0 điểm) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $0 \leq a, b, c \leq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + ca$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tia AI cắt đường tròn (O) tại M (điểm M khác điểm A).

a) Chứng minh các tam giác IMB và IMC là các tam giác cân.

b) Đường thẳng MO cắt đường tròn tại điểm N (N khác điểm M) và cắt cạnh

BC tại điểm P . Chứng minh rằng: $\sin \frac{\angle BAC}{2} = \frac{IP}{IN}$.

c) Gọi các điểm D, E lần lượt là hình chiếu của điểm I trên các cạnh AB, AC . Gọi các điểm H, K lần lượt đối xứng với các điểm D, E qua điểm I . Biết rằng $AB + AC = 3BC$, chứng minh các điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5: (2,0 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x - 2^y = 1$.

2) Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh có độ dài bằng 1 và P là điểm nằm trong lục giác đó. Các tia AP, BP, CP, DP, EP, FP cắt các cạnh của lục giác này lần lượt tại

các điểm $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ (các điểm này lần lượt khác các điểm A, B, C, D, E, F). Chứng minh lục giác $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ có ít nhất một cạnh có độ dài lớn hơn hoặc bằng 1.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1) Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0; c=2014 \\ b+c=0; a=2014 \\ c+a=0; b=2014 \end{cases} \Rightarrow M = \frac{1}{2014^{2013}}. \end{aligned}$$

2) Ta có $2n^2 - 6n + 2 = 2[n(n-3) + 1]$

Vì $n(n-3)$ chẵn nên $n(n-3) + 1 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{2k+1} + 1 \equiv 13 \pmod{13}$

Vì vậy $5^{2n^2-6n+2} - 12$ nguyên tố hay $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13$ nên $n(n-3) + 1 = 1$, suy ra $n=0$ hoặc $n=3$.

Câu 2:

1) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Đặt $t-1 = \sqrt{2x+1}, t \geq 1$ ta có
 $x^2 - 2x = 2t; t^2 - 2t = 2x \Rightarrow (x-t)(x+t) = 0 \Leftrightarrow x=t$ (do $x+t > 0$).

$$\Rightarrow x-1 = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

2) Từ phương trình thứ nhất suy ra $4z - 5 = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow z \geq \frac{5}{4}$.

Từ phương trình thứ hai suy ra $(4z-5)(z-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq z \leq \frac{5}{4}$.

Do đó $z = \frac{5}{4} \Rightarrow x=y=0$

Câu 3: Do vai trò của a, b, c như nhau, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, khi đó $2 \leq a \leq 4$.

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 36}{2}$$

Ta có:

Mặt khác, vì $bc \geq 0$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+c)^2 - 2bc \leq a^2 + (6-a)^2 = 2a^2 - 12a + 36 = 2[(a-2)(a-4) + 10] \leq 20.$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 20

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b; a \geq c; bc = 0 \\ (a-2)(a-4) = 0 \Leftrightarrow (a,b,c) = (4,2,0), (4,0,2) \\ a+b+c = 6 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 20 chẳng hạn khi $a=4, b=2, c=0$

Câu 4:

a) Ta có

$$\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2};$$

$$\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}.$$

Suy ra $\angle IBM = \angle BIM \Rightarrow \triangle IBM$ cân tại M .

Tương tự, tam giác MIC cân tại M .

$$\sin \frac{\angle BAC}{2} = \sin \angle BCM = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MI} \quad (1) \text{ (do)}$$

b) Ta có $MP \perp BC$ và $MI = MC$);

$\triangle MBN$ vuông tại B , có

$$MP \cdot MN = MB^2 = MI^2 \Rightarrow \frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MN} \quad (2) \Rightarrow \triangle MPI \sim \triangle MIN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{IP}{IN} \quad (3)$$

c) Ta có $AB + AC = 3BC$

$$\Leftrightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} = BC \Leftrightarrow AE = BC$$

$$\triangle IAE \sim \triangle MCP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MP}{IE} = \frac{CP}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow IE = 2MP$$

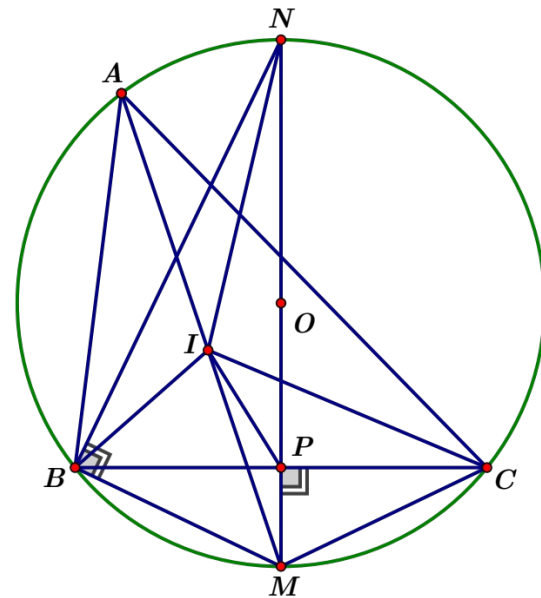
Gọi F là trung điểm của $IK, \triangle MCP = \triangle MIF \text{ (c.g.c)}$ do

$$MC = MI; \angle PMC = \angle EIA = \angle MIF; MP = IF = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \angle IFM = \angle MPC = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle IMK$ cân tại M nên $MK = MI$. Tương tự $MH = MI$.

Suy ra $MB = MC = MH = MK = MI$.

Vậy B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.



Câu 5: 1) ta có $5^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 2^y = 5^x - 1$.

Với $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ ta có $2^y = 4(5^{2k} + 5^{2k-1} + \dots + 5 + 1)$.

Nếu $y < 0$ thì PT vô nghiệm.

Nếu $y = 2$ thì $x = 1$ (thỏa mãn).

Nếu $y > 2$ thì PT vô nghiệm vì VT chia hết cho 8, còn VP không chia hết cho 8.

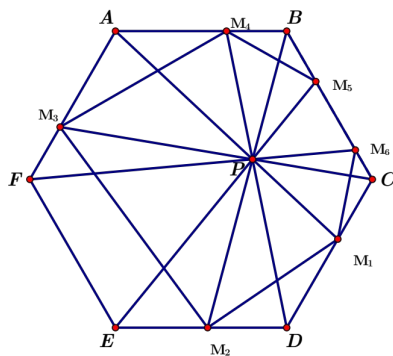
Với $x = 2k, k \in \mathbb{N}$ ta có

$$2^y = (5^k - 1)(5^k + 1) \Rightarrow \begin{cases} 5^k - 1 = 2^a \\ 5^k + 1 = 2^b \end{cases}, a, b \in \mathbb{N}, 0 \leq a < b; a + b = y \Rightarrow 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1); 4 \text{ vô lý}$$

Nếu $a \geq 2$ thì $2^a(2^{b-a} - 1); 4$, vô lý

Nếu $a = 1; a = 0$ thì $5^k = 3; 5^k = 2$, vô lý

Vậy $(x, y) = (1; 2)$.



2) Nhận xét: trong nhiều trường hợp, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ suy biến không còn là lục giác nên sau đây ta thống nhất gọi là đa giác $M_1 \dots M_6$.

Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ (kí hiệu là $\mathfrak{R}$).

Nếu $P \equiv O$ thì đa giác $M_1 \dots M_6 \equiv \mathfrak{R}$ ta có đpcm.

Nếu P thuộc một trong ba đường chéo lớn của $\mathfrak{R}, P \neq O$ thì P thuộc một trong sáu đoạn OA, OB, OC, OD, OE, OF .

Giả sử $P \in OD$ khi đó hai tia AP, DP lần lượt đi qua đỉnh D , đỉnh A của $\mathfrak{R}$ và ta có $M_1 \equiv D, M_4 \equiv A$.

Còn lại 4 tia, cắt nhiều nhất 4 cạnh của $\mathfrak{R}$. Như vậy tồn tại ít nhất hai cạnh AB, AF của $\mathfrak{R}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$.

Xét tam giác có một cạnh là AB và một cạnh là M_4M_i của đa giác $M_1 \dots M_6$ gần AB nhất ($M_4 \equiv A$), ta luôn có

$\angle M_4BM_i > 90^\circ \Rightarrow M_4M_i > AB = 1$.

Nếu P không thuộc ba đường chéo lớn của $\mathfrak{R}$ thì P nằm trong một trong sáu tam giác đều của $\mathfrak{R}$ mà ba đường chéo lớn chia ra. Giả sử P nằm trong $\triangle ODE$. Như vậy, tồn tại ít nhất cạnh AB của $\mathfrak{R}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Khi đó M_4M_5 luôn là một cạnh của đa giác $M_1 \cdots M_6$ và ABM_5M_4 là tứ giác luôn có $\angle ABM_5 > 90^\circ; \angle BAM_4 > 90^\circ \Rightarrow M_4M_5 > AB = 1$.