

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \forall a, b > 0$

Câu 2. (3 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$

b) $\frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9}$

Câu 3. (3 điểm) Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$

Câu 4. (2 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-2)(x-5)(x^2 - 7x - 10)$$

Câu 5. (4 điểm) Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = -1$

c) Với giá trị nào của x thì $M = -2$

d) Tìm giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Câu 6. (5 điểm)

Cho tam giác ABC , các góc B và C nhọn. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

a) $AB \cdot AF = AC \cdot AE$

b) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

$$c) BH.BE + CH.CF = BC^2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} a) \quad A &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\ &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \end{aligned}$$

b) Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{4}{a+b} \\ &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0 \quad (\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a=b) \\ \text{Vậy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq \frac{4}{a+b} \quad (\text{dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a=b) \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} a) \quad (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 1) - 4 &= 0 (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 2x^2 - 3x - 1$$

$$\Rightarrow Pt(*) \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 = -1 \\ 2x^2 - 3x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x - 3) = 0 \\ (x+1)(2x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -1; 0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9} (*)$$

ĐKXD: $x \neq -9; x \neq -10$

$$(*) \Leftrightarrow x(x+19)(19x+181)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-19 \text{ (TMDK)} \\ x=\frac{-181}{19} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 0; -19; \frac{-181}{19} \right\}$$

Câu 3.

$$\text{a) } A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{51} \right) = \frac{25}{51}$$

Câu 4.

$$A = (x - 2)(x - 5)(x^2 - 7x - 10)$$

$$= (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x - 10)$$

Đặt $x^2 - 7x = t$, ta có biểu thức:

$$A = (t - 10)(t + 10) = t^2 - 100 \geq -100$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -100

Câu 5.

a) Điều kiện $x \neq 0, x \neq \pm 2$

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

$$= \left[\frac{x}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \frac{x^2 - 4 + 10 - x^2}{x + 2}$$

$$= \frac{x - 2(2 + x) + x - 2}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2}$$

$$= \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6} = \frac{-1}{x - 2} = \frac{1}{2 - x}$$

$$x = -1 \Rightarrow M = \frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

b)

$$M = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - x} = 2 \Leftrightarrow 2(2 - x) = 1 \Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TMDK)}$$

c)

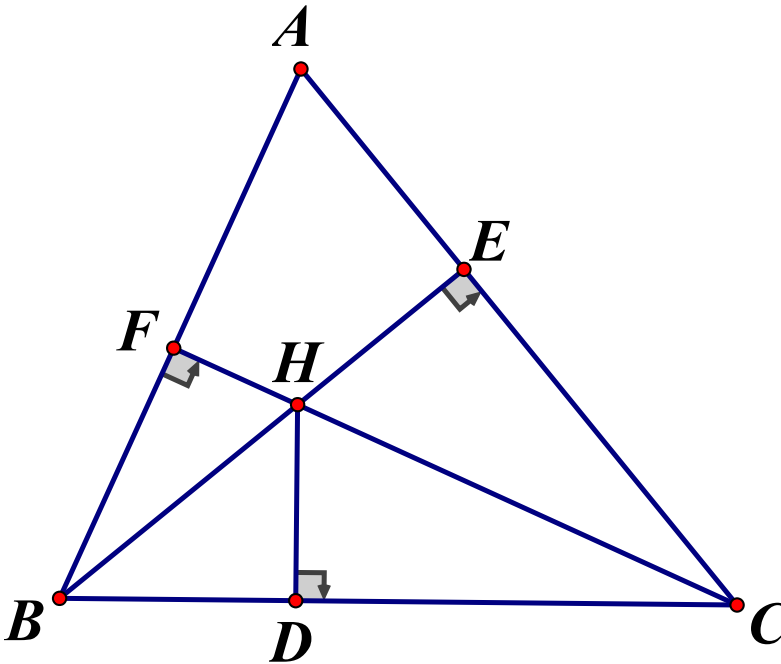
d) Để M nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{2 - x}$ nhận giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2 - x \in U(1) = \{-1; 1\}$$

$$\begin{cases} 2 - x = -1 \Rightarrow x = 3(tm) \\ 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1(tm) \end{cases}$$

Vậy với $x \in \{1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

Câu 6.



a) $\Delta ABE \sim \Delta ACF (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE$

b) $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

$\Delta AEF, \Delta ABC$ có $\hat{A}$ chung và $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC (c.g.c)$

c) Vẽ $HD \perp BC$

$$\Delta BHD \sim \Delta BCE (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BD \quad (1)$$

$$\Delta CHD \sim \Delta CBF (g.g) \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CD \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được:

$$BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot (BD + CD) = BC \cdot BC = BC^2$$