Seminar ngày 24/10/2010

Người trình bày: Lê Phúc Lữ

<u>**Nội dung chủ đề**</u>

CÁC BÀI TOÁN VỀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

****

Đa thức là một nội dung rất quen thuộc của đại số và giải tích. Phương trình đa thức, định lí Viete, các bất đẳng thức liên quan đến hệ số của đa thức,… được quan tâm khá nhiều và cũng có một số lượng đáng kể những lớp bài toán liên quan đến lĩnh vực này. Trong nội dung đa thức khá rộng và phong phú như thế, ta sẽ đi vào tìm hiểu một phần hẹp hơn nhưng cũng không kém phần hấp dẫn, đó chính là các bài toán về nghiệm của đa thức.

Nói đến nghiệm của đa thức, ta nhớ đến các công thức Cardano nổi tiếng để giải phương trình bậc ba, đến các kết quả về đa thức có nghiệm phức trong việc đơn giản hóa các biểu thức,…Tìm hiểu về nghiệm của đa thức, ta không chỉ dừng lại ở các bài toán đặc thù mà còn sẽ đi khai thác một số ứng dụng đặc biệt của nó vào giải các bài toán hệ phương trình, phương trình nghiệm nguyên, tính giá trị biểu thức, giải một số bài toán số học,…

Các bài toán về đa thức trong các kì thi HSG các cấp cũng được phát biểu dưới nhiều hình thức bởi một đa thức là hệ thức truy hồi cho một dãy số, là một phương trình đồng dư trong các bài toán số học, là các quan hệ giữa các hệ số của một bất đẳng thức và cũng vì thế mà ta hoàn toàn có thể công nhận rằng đa thức là một nội dung khá quan trọng, cần thiết trong các kì thi. Ngoài ra, việc đánh giá nghiệm của các phương trình đa thức bậc ba, bậc bốn cũng là một vấn đề vô cùng quen thuộc, không thể nào thiếu được ở các kì thi tuyển sinh ĐH – CĐ.

Do điều kiện thời gian hạn chế nên chưa được đầy đủ các dạng liên quan đến nghiệm của đa thức như các công thức nội suy trong đa thức, quy tắc dấu Descarte, ứng dụng nghiệm bội vào bài toán tiếp tuyến,... Mong rằng một số nội dung nhỏ dưới đây sẽ đem lại cho mọi người một cái nhìn mới mẻ về các bài toán dạng này và cung cấp thêm những ý tưởng thú vị để giải quyết các vấn đề quen thuộc.

A.Xét về mặt đại số.

I. Các kiến thức cần nhớ.

1. Định lí Bezout:

Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ và số thực α, khi đó: α là nghiệm của $P(x)$ khi và chỉ khi $P(x) \vdots (x-\alpha)$. Điều này có nghĩa là tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x) = (x-\alpha).Q(x)$.

Từ đây ta cũng suy ra: nếu $P(x)$ là đa thức monic có bậc n và có n nghiệm thực $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ thì $P(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$.

2. Định lí về nghiệm của đa thức:

Nếu một đa thức bậc n và có hệ số của số hạng có bậc cao nhất khác 0 thì nó có không quá n nghiệm. Từ đây suy ra nếu một đa thức bậc n có ít nhất $n+1$ nghiệm thì nó đồng nhất với 0.

3. Nghiệm bội.

Số thực a gọi là nghiệm bội k của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ nếu $P(x)$ chia hết cho $(x-a)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$.

Điều này có nghĩa là tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho:
$P(x) = (x-\alpha)^k.Q(x), \forall x \in \mathbb{R};\ Q(\alpha) \neq 0$.

4. Nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỉ.

Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có bậc là n: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Nếu tồn tại số

$\alpha = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p,q) = 1$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $p \mid a_0, q \mid a_n$.

Từ đó suy ra: nếu $a_n = 1$ thì các nghiệm hữu tỉ của đa thức này đều phải là số nguyên.

5.Định lí Viète.

Xét đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ có n nghiệm là $x_1, x_2, ..., x_n$. Khi đó, ta có:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n}, \sum_{0 \le i < j \le n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, ..., \prod_{i=0}^{n} x_i = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n}.$$

II.Các ví dụ minh họa.

Bài 1.1. Xét đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn $P(0), P(1)$ đều là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Giả sử ngược lại, tồn tại số α là nghiệm nguyên của đa thức đã cho, tức là tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $P(x) = (x-\alpha).Q(x)$. Ta có:

$$P(0) = (0-\alpha).Q(0), P(1) = (1-\alpha).Q(1).$$

Từ giả thiết suy ra: $P(0), P(1)$ là các số lẻ.

Do đó: $-\alpha,\ 1-\alpha$ cũng đều là các số lẻ. Tuy nhiên đây lại là các số liên tiếp nên điều này không thể xảy ra. Từ mâu thuẫn này suy ra điều giả sử ban đầu là sai.

Vậy đa thức này không có nghiệm nguyên.

Nhận xét. Đây là bài toán quen thuộc về nghiệm nguyên của đa thức. Ta nhận thấy các số 0, 1 trong đề bài không ảnh hưởng đến kết quả của bài toán mà điểm quan trọng ở đây chính là tính chất của chúng, ta thấy rằng hai số đó chỉ cần khác tính chẵn lẻ là đã đủ để đảm bảo kết quả của bài toán. Từ đó, ta xét một vài trường hợp đặc biệt để che giấu đi bản chất của vấn đề này. Ta có các bài toán sau.

Bài 1.2. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn: tồn tại k nguyên sao cho $P(2009^k).P(2010^k) = 2011^k$. Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm nguyên.

Bài 1.3. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn: tồn tại các số nguyên dương phân biệt a, b, c, d không đồng thời chia hết cho 4 và $P(a).P(b).P(c).P(d) = 2010^{2010} + 1$.

Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm nguyên.

Bài 2.1. Tìm tất cả các nghiệm của đa thức sau với $a(a-1) \neq 0$.

$$P(x) = (a^2-a)^2(x^2-x+1)^3 - (a^2-a+1)^3(x^2-x)^2$$

Lời giải. Ta thấy rằng đây là đa thức bậc 6 nên nó có không quá 6 nghiệm.

Ta có $P(a) = (a^2-a)^2(a^2-a+1)^3 - (a^2-a+1)^3(a^2-a)^2 = 0$ nên $x = a$ là một nghiệm của đa thức đã cho. Hơn nữa, ta sẽ chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm x_0 thì nó cũng có nghiệm $1-x_0, \dfrac{1}{x_0}$. Thật vậy:

Nếu x_0 là nghiệm của phương trình đã cho thì $(a^2-a)^2(x_0^2-x_0+1)^3=(a^2-a+1)^3(x_0^2-x_0)^2$.

Ta có:

$$P(1-x_0)=(a^2-a)^2[(1-x_0)^2-(1-x_0)+1]^3-(a^2-a+1)^3[(1-x_0)^2-(1-x_0)]^2$$
$$=(a^2-a)^2(x_0^2-x_0+1)^3-(a^2-a+1)^3(x_0^2-x_0)^2=0$$

$$P(\frac{1}{x_0})=(a^2-a)^2(\frac{1}{x_0^2}-\frac{1}{x_0}+1)^3-(a^2-a+1)^3(\frac{1}{x_0^2}-\frac{1}{x_0})^2=(a^2-a)^2(\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0^2})^3-(a^2-a+1)^3(\frac{1-x_0}{x_0^2})^2$$
$$=\frac{1}{x_0^6}\left[(a^2-a)^2(x_0^2-x_0+1)^3-(a^2-a+1)^3(x_0^2-x_0)^2\right]=0$$

Do đó, với $x=a$ là nghiệm của đa thức, ta còn có thêm hai nghiệm nữa là $1-a,\frac{1}{a}$; đến đây, ta lại có thêm ba nghiệm nữa là $1-\frac{1}{a},\frac{1}{1-a},\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$.

Tóm lại, đa thức đã cho có 6 nghiệm là: $a,\frac{1}{a},1-a,\frac{a-1}{a},\frac{1}{1-a},\frac{a}{a-1}$.

Nhận xét. Ý tưởng trên là vét cạn các nghiệm của đa thức với một kiến thức quen thuộc: phương trình đa thức bậc n có không quá n nghiệm. Dễ thấy rằng nói chung thì các nghiệm này phân biệt, nếu với một vài giá trị a làm cho chúng trùng nhau thì giá trị a đó cũng làm đa thức đã cho có nghiệm bội; do đó, điều này không ảnh hưởng đến sự đầy đủ của các nghiệm của đa thức như đã nêu. Ta xét một bài toán tương tự cũng giải bằng cách vét cạn các nghiệm dưới đây.

Bài 2.2. Giải phương trình sau.

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1.2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+...+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)...(x-n)}{1.2.3....n}=0.$$

Bài 3. Giả sử đa thức $P(x)=x^{2010}\pm x^{2009}\pm x^{2008}\pm...\pm x\pm 1$ không có nghiệm thực. Tìm số lớn nhất các hệ số là -1 của đa thức này.

Lời giải. Gọi γ là số các hệ số là -1 có trong đa thức này để nó không có nghiệm thực. Ta thấy rằng $\gamma \le 1005$ vì nếu ngược lại thì $\gamma \ge 1006$, xét $P(1)=(\underbrace{1+1+...+1}_{2010-\lambda})-(\underbrace{1+1+...+1}_{\lambda})\le 0$; đồng thời $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$ nên dễ thấy rằng $P(x)$ có nghiệm thực, mâu thuẫn. Ta sẽ chỉ ra một đa thức có $\gamma=1005$ thỏa mãn đề bài.

Xét $P(x)=x^{2010}-x^{2009}+x^{2008}-x^{2007}...+x^2-x+1$ có các hệ số của hạng tử bậc lẻ là -1. Ta có:

-Nếu $x\le 0$ thì $P(x)>0$.

-Nếu $x\in(0,1)$ thì $P(x)=x^{2010}+x^{2008}(1-x)+x^{2007}(1-x)...+x(1-x)+(1-x)>0$.

-Nếu $x>1$ thì $P(x)=(x^{2010}-x^{2009})+(x^{2008}-x^{2007})+...+(x^2-x)+1>0$.

Đa thức này luôn dương nên nó thỏa mãn bài toán. Vậy $\gamma_{\max}=1005$.

Bài 4.1. Chứng minh các đồng nhất thức sau:

$$4(x+y+z)(xy+yz+zx)-(x+y+z)^3-8xyz=(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

Lời giải. Trên thực tế, bài này hoàn toàn có thể dùng khai triển trực tiếp và nhóm các số hạng lại để được tích bên vế phải; thế nhưng, bằng cách đó, bài toán giải khá cồng kềnh và không mang lại được nhiều hệ quả.

Ta xét cách dùng định lí Bezout về phân tích các nghiệm của đa thức như sau:

$P(t)=4(t+y+z)(ty+yz+zt)-(t+y+z)^3-8tyz=4(t+y+z)[t(y+z)+yz]-(t+y+z)^3-8tyz$ là một đa thức bậc 3 theo biến t.

Để chứng minh đồng nhất thức trên, ta sẽ chứng minh rằng $y-z, z-y, y+z$ là ba nghiệm của đa thức này. Thật vậy:

$P(y+z)=4[(y+z)+y+z][(y+z)(y+z)+yz]-(y+z+y+z)^3-8(y+z)yz$
$=8(y+z)[(y+z)^2+yz]-8(y+z)^3-8(y+z)yz$
$=[8(y+z)^3+8(y+z)yz]-[8(y+z)^3+8(y+z)yz]=0$

$P(y-z)=4(y-z+y+z)[(y-z)(y+z)+yz]-(y-z+y+z)^3-8(y-z)yz$
$=8y[(y^2-z^2)+yz]-8y^3-8(y-z)yz$
$=[8y^3+8(y-z)yz]-[8y^3+8(y-z)yz]=0$

$P(z-y)=4(z-y+y+z)[(z-y)(y+z)+yz]-(z-y+y+z)^3-8(z-y)yz$
$=8z[(z^2-y^2)+yz]-8z^3-8(z-y)yz$
$=[8z^3+8(z-y)yz]-[8z^3+8(z-y)yz]=0$

Vậy, đa thức đã cho có thể biểu diễn dưới dạng: $P(t)=\lambda(t-y-z)(t-y+z)(t+y-z)$, tiếp tục cho $y=z=0$, biểu thức ban đầu cần phân tích nhận giá trị là $-t^3$ trong khi biểu thức sau khi phân tích nhận giá trị là λt^3; đẳng thức phải xảy ra với mọi y, z nên $\lambda=-1$ hay

$P(t)=(y+z-t)(t-y+z)(t+y-z)$. Đẳng thức này đúng với mọi t nên ta có được đpcm.

Nhận xét. Có nhiều bài toán về dùng tính chất nghiệm của đa thức để giải quyết tương tự như trên, nhiều khi thay vì chứng minh một đồng nhất thức, vấn đề đặt ra có thể là rút gọn biểu thức hoặc giải một phương trình. Ta xét hai bài toán sau.

Bài 4.2. Cho biểu thức: $S_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)}, k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $S_0 = S_1 = S_2 = 0, S_3 = a+b+c$.

Bài 4.3. Giải phương trình sau với a, b, c là các số thực phân biệt.

$$\frac{(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{x}.$$

Bài 5. Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có ba nghiệm phân biệt.

Chứng minh rằng: $Q(x) = x^3 + ax^2 + (4b-a^2)x + (4ab - a^3 - 8c)$ cũng có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm phân biệt của đa thức đã cho. Theo định lí Viete thì:

$x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,\ x_1x_2x_3 = -c$.

Ta sẽ chứng minh rằng đa thức $Q(x)$ đã nêu có các nghiệm là
$y_1 = x_1 + x_2 - x_3,\ y_2 = x_2 + x_3 - x_1,\ y_3 = x_3 + x_1 - x_2$.

Thật vậy: $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$.

$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \sum (x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1) = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 4b - a^2$.

$y_1y_2y_3 = (x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) = 4(-a)b - (-a)^3 - 8(-c) = a^3 + 8c - 4ab$.

(theo kết quả của bài 2.1).

Từ các tính toán trên, theo định lí Viete đảo, ta thấy (*) đúng. Dễ thấy các số y_1, y_2, y_3 phân biệt vì x_1, x_2, x_3 phân biệt nên ta có đpcm.

Nhận xét. Các dạng toán này cũng thường gặp và cách giải này có lẽ là tốt nhất, các phương pháp quen thuộc của giải tích hầu như không khả thi trong trường hợp này.

B.Xét về mặt giải tích.

I.Các kiến thức cần nhớ.

1. Định lí Lagrange và định lí Rolle.

Đa thức là một lớp hàm liên tục tiêu biểu nên nó có đầy đủ các tính chất quen thuộc của một hàm liên tục như đã biết.

*Định lí Lagrange: Với mọi số thực $a<b$ và một đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ nào đó, ta luôn có:

$$\exists c\in(a,b): P'(c)=\frac{P(b)-P(a)}{b-a} \quad .$$

*Định lí Rolle: Nếu đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ có hai nghiệm phân biệt là $a<b$ thì tồn tại $\exists c\in(a,b)$ thỏa mãn $P'(c)=0$.

Từ đây suy ra, nếu đạo hàm cấp k của đa thức này vô nghiệm thì đa thức có không quá k nghiệm.

2. Quy tắc dấu Decarste:

Cho đa thức $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$. Gọi D là số nghiệm dương của đa thức, L là số lần đổi của các hệ số của đa thức từ $a_n\to a_0$, bỏ qua các hệ số bằng 0. Khi đó: $D\le L$ và $L-D$ là số chẵn.

Có thể phát biểu cụ thể là:

+ Số nghiệm dương của hàm đa thức $P(x)$ bằng số lần đổi dấu của các hệ số hoặc nhỏ hơn một đơn vị chẵn.
+ Số nghiệm âm của đa thức $P(x)$ bằng số lần đổi dấu của các hệ số trong $P(-x)$ hoặc nhỏ hơn một đơn vị chẵn.

3.Định lí về số nghiệm của đa thức.

Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$.

-Nếu với hai số thực $a<b$ mà $P(a).P(b)<0$ thì đa thức có một số lẻ nghiệm trên khoảng (a,b), kể cả bội.

-Nếu với hai số thực $a<b$ mà $P(a).P(b)>0$ thì đa thức có một số chẵn nghiệm trên khoảng (a,b), kể cả bội.

II.Các ví dụ minh họa.

Bài 1.1. Cho đa thức $P(x)$ bậc bốn có bốn nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình sau cũng có bốn nghiệm dương phân biệt:

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x)+\left(1-\frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x)-P''(x)=0$$

Lời giải. Ta có:

$\frac{1-4x}{x^2}P(x)+\left(1-\frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x)-P''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x^2}[P(x)-P'(x)]+[P'(x)-P''(x)]=0$.

Đặt $Q(x)=P(x)-P'(x) \Rightarrow Q'(x)=P'(x)-P''(x)$ nên suy ra: $\frac{1-4x}{x^2}Q(x)+Q'(x)=0$.

Ta sẽ chứng minh nhận xét nếu đa thức $P(x)$ bậc bốn có bốn nghiệm dương phân biệt thì đa thức $Q(x)=P(x)-P'(x)$ cũng có bốn nghiệm dương phân biệt. Thật vậy:

Không mất tính tổng quát, giả sử hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ là 1 và ta có phân tích:

$P(x)=x^4-ax^3+bx^2-cx+d=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ với $x_1<x_2<x_3<x_4$ là các nghiệm dương của đa thức này. Theo định lí Viete thì: $a,b,c,d>0$ và ta cũng có:

$P'(x)=\sum(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Giả sử $Q(x)=x^4-a_1x^3+b_1x^2-c_1x+c+d$ thì $Q(x_1)=P(x_1)-P'(x_1)=-(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)$

$Q(x_2)=P(x_2)-P'(x_2)=-(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)$, suy ra:

$Q(x_1)Q(x_2)=-(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)<0$, tức là tồn tại $y_1\in[x_1,x_2]$ là nghiệm dương của $Q(x)$. Tương tự, ta cũng thấy rằng $Q(x)$ có thêm hai nghiệm dương nữa là $y_2\in[x_2,x_3], y_3\in[x_3,x_4]$. Gọi nghiệm dương thứ tư là y_4 thì $y_1y_2y_3y_4=c+d>0$, do ta đã có $y_1,y_2,y_3>0$ nên cũng có $y_4>0$.

Nhận xét trên được chứng minh.

Đặt $R(t)=t^4Q\left(\frac{1}{t}\right)$ cũng là một đa thức bậc bốn và cũng có bốn nghiệm dương phân biệt như $Q(x)$; theo nhận xét trên thì đa thức sau cũng có bốn nghiệm dương phân biệt:

$R(t)-R'(t)=t^4Q\left(\frac{1}{t}\right)-4t^3Q\left(\frac{1}{t}\right)-t^4.\frac{-1}{t^2}Q\left(\frac{1}{t}\right)=(t^4-4t^3)Q\left(\frac{1}{t}\right)-t^2Q\left(\frac{1}{t}\right)$, tức là phương trình sau có bốn nghiệm dương phân biệt: $(t^4-4t^3)Q\left(\frac{1}{t}\right)-t^2Q\left(\frac{1}{t}\right)=0$.

Đặt $\frac{1}{t}=x$ thì phương trình sau cũng có bốn nghiệm dương phân biệt: $\frac{1-4x}{x^2}Q(x)+Q'(x)=0$.
Đây chính là đpcm.

Nhận xét. Ngoài các xét các đa thức đã nêu, ta cũng có thể xét hàm số sau $f(x)=e^{-x}.P(x)$ cũng đem lại kết quả tương tự. Vận dụng ý tưởng xét thêm các đa thức rồi sử dụng đạo hàm tích của chúng, ta có thể đưa ra những bài toán khá thú vị tương tự như trên. Ta có bài toán sau.

Bài 1.2. Cho đa thức $P(x)$ bậc 2011 có 2011 nghiệm dương. Chứng minh rằng đa thức sau cũng có đúng 2011 nghiệm dương.

$$(1-2011x)P(x)+(x^2+2011x-1)P'(x)-x^2P(x)=0$$

Bài 2. Cho đa thức $P(x)=1+x^2+x^9+x^{n_1}+x^{n_2}+...+x^{n_s}+x^{1992}$ với $n_1,n_2,...,n_s$ là các số tự nhiên cho trước thỏa mãn $9<n_1<n_2<...<n_s<1992$. Chứng minh rằng nghiệm của đa thức (nếu có) không thể lớn hơn $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Do các hệ số của đa thức đã cho đều dương nên nếu nó có nghiệm thì nghiệm đó phải âm. Ta sẽ chứng minh rằng $P(x)>0,\forall x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\subset(-1,0)$. Thật vậy:

Với mọi x trên khoảng này thì

$$P(x)=1+x^2+x^9+x^{n_1}+x^{n_2}+...+x^{n_s}+x^{1992}\geq 1+x+x^3+x^5+x^7+...+x^{1991}=$$
$$=1+x.\frac{(1+x^2+x^4+...+x^{1990})(1-x^2)}{1-x^2}=1+x.\frac{1-x^{1992}}{1-x^2}=\frac{(1+x-x^2)-x^{1993}}{1-x^2}$$

Vì $x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\Rightarrow 1+x-x^2>0,-x^{1993}>0,1-x^2>0\Rightarrow P(x)>0,\forall x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ nên nếu đa thức này có nghiệm đó không được lớn hơn $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ta có đpcm.

Nhận xét. Việc đánh giá các khoảng của nghiệm thế này cũng thường được đề cập đến trong các bài toán về giới hạn dãy số là nghiệm của một đa thức. Dưới đây là một số bài toán tương tự.

Bài 2.1. Cho đa thức $P(x)=x^{10}-10x^9+39x^8+a_7x^7+a_6x^6+...+a_1x+a_0$, với $a_0,a_1,...,a_7$ là các giá trị nhất định. Biết rằng đa thức này có 10 nghiệm thực.

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của nó đều nằm trong khoảng từ -2,5 đến 4,5.

Bài 2.2. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$x+x^2+x^3+...+x^{2n}+2010x^{2n+1}=2011.$$

Bài 3.1. Xét hai phương trình sau $x^3+2x^2+3x+4=0,\ x^3-5x^2+10x-10=0$.

1.Chứng minh rằng mỗi phương trình đều có đúng một nghiệm.

2.Tìm tổng hai nghiệm đó.

Lời giải.

1.Ta thấy cả hai hàm số $P(x)=x^3+2x^2+3x+4, Q(x)=\ x^3-5x^2+10x-10$ có đạo hàm lần lượt là $P'(x)=3x^2+4x+3>0, Q(x)=3\ x^2-10x+10>0, \forall x$ nên đều là các hàm đồng biến.

Từ đó suy ra chúng có đúng một nghiệm.

2.Gọi α,β lần lượt là các nghiệm của hàm $P(x),Q(x)$. Giả sử $\alpha+\beta=k \Leftrightarrow \beta=k-\alpha$, điều này có nghĩa là nếu α là nghiệm của $P(x)$ thì $k-\alpha$ là nghiệm của $Q(x)$ hay:

$$Q(k-\alpha)=(k-\alpha)^3-5(k-\alpha)^2+10(k-\alpha)-10=$$
$$=(-\alpha^3+3\alpha^2k-3\alpha k^2+k^3)-(5k^2-10k\alpha+5\alpha^2)+(10k-10\alpha)-10=$$
$$=-\alpha^3+\alpha^2(3k-5)+\alpha(-3k^2+10k-10)+(k^3-5k^2+10k-10)$$

Ta cần có $\frac{-1}{1}=\frac{3k-5}{2}=\frac{-3k^2+10k-10}{3}=\frac{k^3-5k^2+10k-10}{4}$ và dễ thấy rằng giá trị duy nhất thỏa mãn là $k=1$.

Vậy tổng hai nghiệm của hai phương trình này bằng 1.

Nhận xét. Không dừng lại ở đó, ta đã biết các bài toán tìm một đa thức có các nghiệm bằng hai lần, bằng bình phương hay bằng tổng đôi một của các nghiệm của một đa thức cho trước. Để tăng độ phức tạp của bài toán trên. Ta sẽ tìm hai đa thức mới là $R(x),S(x)$ sao cho các nghiệm của $R(x)$ bằng bình phương các nghiệm của $P(x)$ và các nghiệm của $S(x)$ bằng hai lần bình phương các nghiệm của $Q(x)$.

Giả sử $R(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Gọi x_1,x_2,x_3 là các nghiệm thực và phức của đa thức $P(x)$.

Ta có: $x_1+x_2+x_3=-2,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3,\ x_1x_2x_3=-4$.

Theo định lí Viete, ta tính được:

$-a=x_1^2+x_2^2+x_3^2=2^2-2.3=-2, b=x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=3^2-2.(-2).(-4)=-7, c=x_1^2x_2^2x_3^2=16$.

Suy ra: $R(x)=x^3+2x^2-7x-16$. Tương tự, ta tính được: $S(x)=x^3-10x^2-800$.

Ta cũng dễ thấy rằng nghiệm của $P(x)$ là âm, nghiệm của $Q(x)$ dương nên từ các biểu thức trên, ta có bài toán mới sau.

Bài 3.2. Cho hai đa thức $R(x)=x^3+2x^2-7x-16,\ S(x)=x^3-10x^2-800$.

1. Chứng minh rằng $R(x),S(x)$ có đúng một nghiệm, giả sử chúng lần lượt là u,v.
2. Chứng minh rằng $u,v>0$.
3. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{v}{2}}=\sqrt{u}+1$.

Việc giải bài toán này tiến hành ngược lại theo hướng phân tích trên. Với ý tưởng này, ta có thể tự sáng tạo ra nhiều bài toán tính giá trị biểu thức liên quan đến nghiệm của đa thức khá thú vị.

Ta cũng có thể dùng cách đó để giải bài toán sau mà không cần phải thông qua quá trình biến đổi phức tạp đến bậc 6 cũng như có thể nhận ra được rõ hơn bản chất của vấn đề.

Bài 3.3. Cho hai đa thức $P(x)=4x^3-2x^2-15x+9, Q(x)=12x^3+6x^2-7x+1$.

1) Chứng minh rằng mỗi đa thức có ba nghiệm phân biệt.
2) Kí hiệu α,β tương ứng là hai nghiệm lớn nhất của hai đa thức này. Chứng minh rằng ta có đẳng thức $\alpha^2+3\beta^2=4$.

Bài 4.1. Cho đa thức monic $P(x)$ bậc $n>1$ có n nghiệm thực $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ phân biệt. Chứng minh rằng: $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\frac{1}{P'(x_3)}+...+\frac{1}{P'(x_n)}=0$.

Lời giải. Xét phân tích $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$.

Đặt: $P_i(x)=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(x-x_j)$, dễ thấy $P'(x)=\sum_{i=1}^{n}P_i(x)$.

Ta cũng thấy rằng $P_i(x_j)=0,\forall j\neq i;\ P_i(x_i)\neq 0,\forall i=\overline{1,n}\Rightarrow P'(x_i)=P_i(x_i),\forall i=\overline{1,n}$.

Xét đa thức $Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i(x)}{P'(x_i)}-1$ có bậc không vượt quá $n-1$. Ta có: $\forall i=\overline{1,n}\Rightarrow Q(x_i)=0$.

Từ đó suy ra đa thức này có n nghiệm thực phân biệt, tức là $Q(x)\equiv 0$ và hệ số bậc cao nhất của nó cũng phải bằng 0. Do đó: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P'(x_i)}=\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\frac{1}{P'(x_3)}+...+\frac{1}{P'(x_n)}=0$.

Ta có đpcm.

Nhận xét. Ngoài việc xét hệ số bậc cao nhất, ta cũng có thể quan tâm đến các hệ số khác và có nhiều bài toán phức tạp hơn. Ta có một số bài tương tự.

Bài 4.2. Cho đa thức monic $P(x)$ bậc $n>1$ có n nghiệm thực $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ phân biệt. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x_1P'(x_1)}+\frac{1}{x_2P'(x_2)}+\frac{1}{x_3P'(x_3)}+...+\frac{1}{x_nP'(x_n)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x_1x_2x_3...x_n}$.

Bài 4.3. Giả sử $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ là n nghiệm phân biệt của đa thức

$P(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}+...+\frac{1}{1-x_n}=\frac{n}{2}$.

Bài 5. Cho đa thức $P(x)=x^3-3(a^2+b^2)x+2(a^3+b^3)=0$ với $ab\neq 0$.

1.Chứng minh rằng đa thức trên có ba nghiệm phân biệt, giả sử là x_1,x_2,x_3.

2.Với $a=2,b=1$, tính giá trị của biểu thức $S=\sum_{i=1}^{3}\frac{(1+x_i^2)^2}{1-x_i}$.

3.Gọi $Q(x)=x^2-3$. Tính giá trị của biểu thức $A=\prod_{i=1}^{n}Q(x_i)$.

C.Một số ứng dụng của nghiệm đa thức.

Các bài toán về nghiệm của đa thức rất phong phú và không chỉ có thế, các ứng dụng của đa thức trong việc giải toán cũng khá rộng. Chúng ta hãy cùng xét các ví dụ sau để thấy rõ điều đó.

I.Chứng minh bất đẳng thức.

Bài 1.1. Cho bốn số thực không âm a,b,c,d thỏa mãn điều kiện

$$2(ab+bc+cd+da+ac+bd)+abc+bcd+cda+dab=16$$

Chứng minh rằng $a+b+c+d \geq \frac{2}{3}(ab+bc+cd+da+ac+bd)$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Lời giải. Trước hết, ta có bất đẳng thức quen thuộc sau:

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz=4$. Chứng minh rằng:

$x+y+z \geq xy+yz+zx$. Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(1,1,1),(2,2,0)$ và các hoán vị. (*)

Đặt $p=a+b+c+d, q=ab+bc+cd+da+ac+bd, r=abc+bcd+cda+dab, s=abcd$.

Theo giả thiết thì $2q+r=16$, cần chứng minh $p \geq \frac{2}{3}q$; theo định lí Viete đảo, các số a,b,c,d chính là nghiệm của đa thức biến t

$P(t)=t^4-pt^3+qt^2-rt+s \Rightarrow P'(t)=4t^3-3pt^2+2qt-r$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Do $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)$ nên theo định lí Rolle, ta thấy tồn tại các nghiệm thực của $P'(t)=4t^3-3pt^2+2qt-r$ là x,y,z thỏa mãn $a \leq x \leq b \leq y \leq c \leq z \leq d$.

Lại áp dụng định lí Viete cho đa thức $P'(t)$, ta có:

$x+y+z=\frac{3p}{4}, xy+yz+zx=\frac{q}{2}, xyz=\frac{r}{4}$. Từ $2q+r=16 \Rightarrow xy+yz+zx+xyz=4$.

Theo bất đẳng thức (*) thì $\frac{3p}{4} \geq \frac{q}{2} \Leftrightarrow p \geq \frac{2}{3}q$. Đây chính là đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

Nhận xét. Cách dùng đa thức và nghiệm của đạo hàm để chia khoảng các nghiệm ra thế này khá phong phú. Đây là một ứng dụng trực tiếp và thể hiện rõ tính hữu hiệu của phương pháp này trong việc chứng minh bất đẳng thức.

Bài 1.2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $a+b+c=2, ab+bc+ca=1$.

a. Chứng minh rằng: $a,b,c \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

b. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=(a-1)(b-1)(c-1)$.

c. Nếu $a \le b \le c$ thì chứng minh rằng: $0 \le a \le \frac{1}{3} \le b \le 1 \le c \le \frac{4}{3}$.

Bài 2. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn $\sum a > 0, \sum ab > 0, \sum abc > 0, abcd > 0$. Chứng minh rằng a,b,c,d đều là các số dương.

Lời giải. Xét đa thức $P(x)=x^4-px^3+qx^2-rx+t$ có a,b,c,d là các nghiệm thực phân biệt.

Theo định lí Viete thì $p=\sum a>0, q=\sum ab>0, r=\sum abc>0, t=abcd>0$. Ta có:

$x^4-px^3+qx^2-rx+t=0 \Leftrightarrow x(px^2+r)=x^4+qx^2+t>0 \Rightarrow x>0$, tức là nếu x là nghiệm của đa thức này thì x phải dương, từ đó suy ra đpcm.

Nhận xét. Ta hoàn toàn có thể tổng quát bài toán lên với n số thực và bài toán cũng được giải quyết bằng cách tương tự.

Bài 3. Bất đẳng thức Maclaurin .

Cho n số thực dương bất kì là $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ với $n \ge 2$.

Đặt $S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}$ và $d_k = \left(\frac{S_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}, k=\overline{1,n}$. Khi đó, ta có bất đẳng thức:

$d_1 \ge d_2 \ge d_3 \ge ... \ge d_n$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp.

-Với $n=2$, ta có bất đẳng thức: $\frac{x_1+x_2}{C_2^1} \ge \left(\frac{x_1x_2}{C_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \ge \sqrt{x_1x_2}$, bất đẳng thức này đúng.

-Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng đến $n = m \geq 2$, ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức này cũng đúng với $n = m+1$. Xét $m+1$ số thực dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_m, x_{m+1}$.

Giả sử $P(x) = \sum_{i=0}^{m+1} a_{(m+1)-i} x^i = x^{m+1} - a_1 x^m + a_2 x^{m-1} - ... + (-1)^m a_m x + (-1)^{m+1} a_{m+1}$ là đa thức bậc $m+1$ nhận $m+1$ số thực này làm nghiệm, trong đó $a_0 = 1, a_{m+1}, a_m, ..., a_2, a_1 \geq 0$.

Theo định lí Viete thì: $d_k = \left(\dfrac{S_k}{C_{m+1}^k} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\dfrac{a_k}{C_{m+1}^k} \right)^{\frac{1}{k}}, k = \overline{1, m+1} \Leftrightarrow a_k = d_k^k . C_{m+1}^k, k = \overline{1, m+1}$.

Ta có: $P(x) = (m+1)x^{m+1} - m a_1 x^m + (m-1) a_2 x^{m-1} - ... + (-1)^{m-1} a_{m-1} x + (-1)^m a_m$.

Theo tính liên tục của hàm đa thức thì đạo hàm này cũng có tương ứng m nghiệm nằm giữa các nghiệm của đa thức đã xét, tức là m nghiệm không âm.

Đặt $d'_k = \left(\dfrac{S'_k}{C_m^k} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\dfrac{(m+1-k)a_k}{(m+1)C_m^k} \right)^{\frac{1}{k}}, k = \overline{1, m} \Leftrightarrow a_k = \dfrac{m+1}{m+1-k} d_k'^k . C_m^k, k = \overline{1, m}$.

Hơn nữa, ta có: $\dfrac{m+1}{m+1-k} C_m^k = \dfrac{(m+1)m!}{(m+1-k)k!(m-k)!} = \dfrac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} = C_{m+1}^k$.

Do đó: $a_k = d_k'^k . C_{m+1}^k, k = \overline{1, m}$. Suy ra: $d_k^k . C_{m+1}^k = d_k'^k . C_{m+1}^k \Leftrightarrow d_k = d'_k, k = \overline{1, m}$.

Theo giả thiết quy nạp thì $d'_1 \geq d'_2 \geq d'_3 \geq ... \geq d'_{m-1} \geq d'_m$ nên ta cũng có:

$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq ... \geq d_{m-1} \geq d_m$.

Đến đây, ta chỉ còn cần chứng minh:

$$d_m \geq d_{m+1} \Leftrightarrow \left(\frac{S_m}{C_{m+1}^m} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \left(\frac{S_{m+1}}{C_{m+1}^{m+1}} \right)^{\frac{1}{m+1}} \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{\prod_{i=1}^{m+1} x_i}{m x_j} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \sqrt[m+1]{\prod_{i=1}^{m+1} x_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{x_i} \geq \frac{m+1}{\sqrt[m+1]{\prod_{i=1}^{m+1} x_i}}.$$

Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức AM – GM.

Do đó bất đẳng thức đã cho đúng với $n = m+1$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp, ta có đpcm.

II.Các chứng minh số học.

Bài 1.1. Cho a, b là các số tự nhiên không phải là một bình phương đúng. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0$ có nghiệm không tầm thường thì phương trình $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ cũng có nghiệm không tầm thường.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > 0$ (vì a, b không thể cùng âm; đồng thời cả hai đều phải khác 0 vì nếu ngược lại thì suy ra trong hai số a, b có một số bằng 0, mâu thuẫn với giả thiết). Gọi $(x, y, z, w) = (x_0, y_0, z_0, w_0) \neq (0,0,0,0)$ là một nghiệm của $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0$.

Khi đó $x_0^2 - ay_0^2 = b(z_0^2 - aw_0^2)$. Nhân hai vế cho $z_0^2 - aw_0^2$, ta có:

$$(x_0^2 - ay_0^2)(z_0^2 - aw_0^2) - b(z_0^2 - aw_0^2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_0z_0 - ay_0w_0)^2 - a(y_0z_0 - x_0w_0)^2 - b(z_0^2 - aw_0^2)^2 = 0$$

Đặt $x_1 = x_0z_0 - ay_0w_0, y_1 = y_0z_0 - x_0w_0, z_1 = z_0^2 - aw_0^2$, suy ra: $x_1^2 - ay_1^2 - bz_1^2 = 0$ nên (x_1, y_1, z_1) là một nghiệm của $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$.

Hơn nữa, dễ thấy nếu đây là nghiệm tầm thường thì $z_1 = 0 \Rightarrow z_0^2 - aw_0^2 = 0 \Rightarrow z_0 = w_0 = 0$ và tương tự cũng có $x_0 = y_0 = 0$, mâu thuẫn. Ta có đpcm.

Nhận xét. Ta thấy rằng tuy bài toán này không có liên quan nhiều đến đa thức nhưng việc phân tích các nghiệm như trên để chỉ ra một bộ nghiệm tương ứng của phương trình khác rất gần với tư tưởng dùng trong các bài toán về nghiệm của đa thức nhiều biến. Ta xét thêm các bài toán tương tự như sau.

Bài 1.2. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^3 - 3xy^2 - y^3 = n$ có một nghiệm nguyên thì nó có ít nhất ba nghiệm nguyên phân biệt.

Bài 1.3. Gọi S_k là tập hợp các số nguyên biểu diễn được dưới dạng $x^2 + ky^2$, với x, y là các số nguyên nào đó. Chứng minh rằng nếu $A, B \in S_k$ thì $AB \in S_k$.

Bài 2. Cho 5 số nguyên a, b, c, d, e thỏa mãn $a+b+c+d+e, a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ chia hết cho số tự nhiên lẻ n nào đó. Chứng minh rằng: $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho n.

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ có 5 nghiệm là a, b, c, d, e.

Theo định lí Viete thì các hệ số của đa thức này đều nguyên và p, q chia hết cho n.

Ta có: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = 0 \Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 0$ hay

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+p(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4)+q(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3)+$$
$$+r(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+s(a+b+c+d+e)-5abcde=0$$

Từ đây suy ra $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho n.

Bài 3. Gọi x_1,x_2,x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Chứng minh rằng biểu thức: $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ nhận giá trị nguyên với mọi n.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{n+3}+aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0,\forall n$.

Thật vậy: Vì x_1 là nghiệm của $x^3+ax^2+bx+c=0$, nhân vào hai vế của đẳng thức này với x_1^n, ta có: $x_1^3+ax_1^2+bx_1+c=0\Rightarrow x_1^{n+3}+ax_1^{n+2}+bx_1^{n+1}+cx_1^n=0$.

Tương tự: $x_2^{n+3}+ax_2^{n+2}+bx_2^{n+1}+cx_2^n=0, x_3^{n+3}+ax_3^{n+2}+bx_3^{n+1}+cx_3^n=0$.

Cộng tương ứng từng vế các đẳng thức, ta được: $S_{n+3}+aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0,\forall n$.

Ta sẽ chứng minh $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n\in\mathbb{Z},\forall n=1,2,3,...$ bằng quy nạp. (*)

Theo định lí Viete thì $x_1+x_2+x_3=-a,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b,\ x_1x_2x_3=-c$.

-Với $n=1$ thì $S_1=x_1+x_2+x_3=-a\in\mathbb{Z}$ (theo định lí Viete) nên (*) đúng.

-Với $n=2$ thì $S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b\in\mathbb{Z}$.

-Với $n=3$ thì $S_2=x_1^3+x_2^3+x_3^3=a(a^2-3b)+3c\in\mathbb{Z}$.

-Giả sử (*) đúng đến $n=k\geq 3$, ta sẽ chứng minh rằng $S_{k+1}\in\mathbb{Z}$. Nhưng điều này là đúng do

$S_{k+1}=-(aS_k+bS_{k-1}+cS_{k-2})\in\mathbb{Z}$. Theo nguyên lí quy nạp, ta có đpcm.

Nhận xét. Đây là một bài toán quen thuộc, lập luận của nó cũng không có gì phức tạp. Bài toán này vẫn đúng trong trường hợp đa thức bậc n và một bài toán ngược về mặt đại số quen thuộc của nó liên quan đến các công thức của dãy số sai phân tuyến tính. Nhưng ta thử xét một bài toán ngược xét về mặt số học của bài này.

Bài 3.2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: với mọi số nguyên dương n, các số $a^n+b^n+c^n$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng: tồn tại các số nguyên p,q,r sao cho a,b,c là các nghiệm của phương trình $x^3+px^2+qx+r=0$.

Lời giải. Giả sử a, b, c là các nghiệm của phương trình: $x^3+px^2+qx+r=0$ (*)

Theo định lí Viète, ta có: $a+b+c=-p, ab+bc+ca=q, abc=-r$.

Do đó, để chứng minh p,q,r là các số nguyên, ta sẽ chứng minh rằng: $a+b+c, ab+bc+ca, abc$ là các số nguyên.

Thật vậy: đặt $S_n=a^n+b^n+c^n,\ n\in\mathbb{N}$. Từ giả thiết suy ra: $S_n\in\mathbb{Z},\ \forall n$.

Ta có: $S_{n+3}+pS_{n+2}+qS_{n+1}+rS_n=0,\forall n$. (*)

- Chứng minh p là số nguyên: điều này dễ dàng có được do $p=-S_1$ là số nguyên.

- Chứng minh q là số nguyên: ta có:

$2q=2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=S_1^2-S_2=q'$ là số nguyên.

-Chứng minh r là số nguyên: Ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$\Leftrightarrow -3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-(a^3+b^3+c^3)$$
$$\Leftrightarrow 3r=-3abc=S_1(S_2-q)-S_3=S_1(S_2-\frac{q'}{2})-S_3\Rightarrow 6r=S_1(2S_2-q')-2S_3=r'\in\mathbb{Z}$$

Thay $q=\frac{q'}{2}, r=\frac{r'}{6}$ vào (*), ta được:

$$S_{n+3}+pS_{n+2}+\frac{q'}{2}S_{n+1}+\frac{r'}{6}S_n=0\Leftrightarrow 6S_{n+3}+6pS_{n+2}+3qS_{n+1}+r'S_n=0.$$

Từ đây suy ra: $r'S_n=3(2S_{n+3}+2pS_{n+2}+q'S_{n+1})\vdots 3,\forall n$.

Giả sử r' không chia hết cho 3, suy ra $S_n\vdots 3,\forall n$. Gọi γ_n là số mũ cao nhất của 3 trong phân tích tiêu chuẩn của S_n. Từ đẳng thức trên, ta thấy rằng $\gamma_n\ge\gamma_{n+1}+1,\forall n\Rightarrow\gamma_1\ge\gamma_{n+1}+n,\forall n$. Giả sử $\gamma_1=k>0$ thì ta phải có điều kiện sau luôn được thỏa: $k\ge\gamma_{n+1}+n,\forall n$. Điều vô lí này dẫn đến điều giả sử ở trên là sai, tức là $r'\vdots 3$, đặt $r'=3s,\ s\in\mathbb{Z}$, thay lại vào đẳng thức (*), ta có:

$$6S_{n+3}+6pS_{n+2}+3q'S_{n+1}+3sS_n=0\Leftrightarrow 2S_{n+3}+2pS_{n+2}+q'S_{n+1}+sS_n=0.$$

Đến đây, ta xét các trường hợp:

-Nếu s là số chẵn thì q' cũng phải chẵn vì nếu ngược lại thì $S_{n+2} \vdots 2, \forall n$ và cũng dẫn đến mâu thuẫn tương tự trên. Khi s, q' cùng chẵn thì ta thấy ngay rằng q, r là các số nguyên.

-Nếu s là số lẻ thì q' cũng phải lẻ, đồng thời tổng $q'S_{n+2} + sS_n$ là số chẵn với mọi n.

Đến đây ta cũng nhận được điều vô lí tương tự.

Vậy tồn tại các số nguyên p, q, r thỏa mãn a, b, c là các nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Đây chính là đpcm.

III.<u>Giải hệ phương trình.</u>

Bài 1.1. Giải hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} a+b=5 \\ ab+c+d=5 \\ ad+bc=-5 \\ bd=6 \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử (a,b,c,d) là một nghiệm của hệ. Xét khai triển sau:

$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+(a+b)x^3+(ab+c+d)x^2+(ad+bc)x+bd$.

Từ hệ đã cho, ta suy ra:

$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.

Mặt khác, phương trình bậc 4 này có các nghiệm nguyên mà ta dễ dàng nhẩm được là $x=-1, x=1, x=2, x=3$. Ta dễ dàng phân tích được đa thức bậc 4 trên thành nhân tử là:

$x^4+5x^3+5x^2-5x-6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$.

Dễ thấy đa thức này có thể phân tích thành hai tam thức bậc hai như sau:

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1)(x+2)(x+3) &= (x^2-1)(x^2+5x+6) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+4x+3) \\ &= (x^2+2x-3)(x^2+3x+2)\end{aligned}$$

Với các phân tích này, ta được các nghiệm của hệ đã cho là:

$(a,b,c,d)=(0,1,5,6),(1,-2,4,3),(2,-3,3,2)$ và các hoán vị của các nghiệm trong mỗi bộ.

Nhận xét. Trên thực tế, bài này có thể giải trực tiếp bằng cách dùng phương pháp thế rồi giải phương trình bậc bốn, tuy nhiên, với ý tưởng này, ta có thể sáng tạo ra thêm nhiều bài hệ tương tự với hình thức thú vị và cách giải bất ngờ hơn.

Bài 1.2. Tìm các số thực a,b,c,d,e thỏa mãn các đẳng thức sau:

$a+b=-4, c+ab=9, d+ac=-9, e+ad=2, ae=-8$.

Bài 2.1. Cho a, b, c là các số thực phân biệt, giải hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ x+by+b^2z=0 \\ x+cy+c^2z=0 \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy hệ này có nghiệm $(x,y,z)=(0,0,0)$. Xét trường hợp $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, giả sử hệ đã cho có nghiệm là $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)$ nào đó thì đa thức: $P(k)=x_0+y_0k+z_0k^2$ sẽ không đồng nhất với 0 và do nó có bậc không vượt quá 2 nên nó có không quá hai nghiệm phân biệt.

Theo điều kiện của hệ đã cho thì: $P(a)=P(b)=P(c)=0$ nên đa thức này có ba nghiệm thực phân biệt, mâu thuẫn.

Vậy hệ phương trình đã cho chỉ có nghiệm $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Nhận xét. Đây chính là hệ phương trình Vandermonde, bằng ý tưởng xét quan hệ giữa bậc và nghiệm của một đa thức mà ta có thể xây dựng nhiều bài toán tương tự khác có nội dung khá thú vị và mới mẻ.

Bài toán 2.2. Cho hai bộ số $(a_1,a_2,a_3,...,a_n),(b_1,b_2,b_3,...,b_n)$ đôi một khác nhau.

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1-b_1}+\dfrac{x_2}{a_1-b_2}+\dfrac{x_3}{a_1-b_3}...+\dfrac{x_n}{a_1-b_n}=1 \\ \dfrac{x_1}{a_2-b_1}+\dfrac{x_2}{a_2-b_2}+\dfrac{x_3}{a_2-b_3}...+\dfrac{x_n}{a_2-b_n}=1 \\ ... \\ \dfrac{x_1}{a_n-b_1}+\dfrac{x_2}{a_n-b_2}+\dfrac{x_3}{a_n-b_3}...+\dfrac{x_n}{a_n-b_n}=1 \end{cases}$$

IV.Tính giá trị biểu thức.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực khác 0 và có tổng khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}=\frac{1}{a^m+b^m+c^m}, m\in\mathbb{N}^*.$$

Tính giá trị của biểu thức $S_n=(a^n+b^n+c^n)(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})$ với n là số nguyên dương lẻ nào đó.

Lời giải. Trước hết, ta thấy m phải là số lẻ vì nếu ngược lại thì $a^m, b^m, c^m>0$; theo bất đẳng thức AM – GM thì $(a^m+b^m+c^m)(\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m})\geq 9$, tức là đẳng thức đã cho không thể xảy ra.

Gọi $P(X)=X^3+pX^2+qX+r$ có ba nghiệm là a^m, b^m, c^m. Theo định lí Viete, ta có:

$a^m+b^m+c^m=-p,\ a^mb^m+b^mc^m+c^ma^m=q,\ a^mb^mc^m=-r$.

Từ đẳng thức đã cho, ta có:
$(a^m+b^m+c^m)(a^mb^m+b^mc^m+c^ma^m)=a^mb^mc^m \Leftrightarrow -pq=-r \Leftrightarrow pq=r$.

Đa thức $P(X)$ đã cho có thể viết lại là: $P(X)=X^3+pX^2+qX+pq=(X+p)(X^2+q)$.

Từ đây suy ra trong ba nghiệm của $P(X)$, có một nghiệm là $-p$, ta giả sử đó là a; suy ra:

$a^m=-p=a^m+b^m+c^m \Rightarrow b^m+c^m=0 \Rightarrow b+c=0$.

Do đó: $S_n=(a^n+b^n+c^n)(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})=(a^n+b^n+(-b)^n)(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{(-b)^n})=a^n.\frac{1}{a^n}=1$.

Vậy giá trị của biểu thức cần tính là $S_n=1, n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 2.1. Chứng minh đẳng thức sau

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3.\sqrt[3]{7}}{2}}$$

Lời giải. Ta biết rằng các nghiệm của những phương trình bậc ba, bậc bốn thường có mang các yếu tố lượng giác. Rõ ràng bài toán trên không thể dùng các biến đổi lượng giác trực tiếp được, ta sẽ vận dụng các công thức đại số quen thuộc và sự tương ứng giữa các hệ số của một đa thức với nghiệm lượng giác của nó để giải quyết bài toán.

Xét phương trình lượng giác $\cos 4x=\cos 3x$. Ta có:

$\cos 4x = \cos 3x \Leftrightarrow 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ 8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Nếu đặt $t = 2\cos x$ thì từ (*), ta có: $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ và dễ thấy là

$t_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7}, t_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7}, t_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7}$ là các nghiệm phân biệt của chúng.

Theo định lí Viete, ta có: $t_1 + t_2 + t_3 = -1, t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -2, t_1t_2t_3 = 1$

Đặt $A = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}, B = \sqrt[3]{t_1t_2} + \sqrt[3]{t_2t_3} + \sqrt[3]{t_3t_1}$. Ta có:

$$A^3 = \left(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}\right)^3 = (t_1 + t_2 + t_3) + 3(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3})(\sqrt[3]{t_1t_2} + \sqrt[3]{t_2t_3} + \sqrt[3]{t_3t_1}) - 3\sqrt[3]{t_1t_2t_3} = 3AB - 4$$

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{t_1t_2} + \sqrt[3]{t_2t_3} + \sqrt[3]{t_3t_1}\right)^3 =$$
$$= (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + 3\sqrt[3]{t_1t_2t_3}(\sqrt[3]{t_1t_2} + \sqrt[3]{t_2t_3} + \sqrt[3]{t_3t_1})(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}) - 3\sqrt[3]{(t_1t_2t_3)^2} = 3AB - 5$$

Do đó: $A^3B^3 = (3AB - 4)(3AB - 5) = 9A^2B^2 - 27AB + 20 \Leftrightarrow (AB - 3)^3 = -7 \Leftrightarrow AB = 3 - \sqrt[3]{7}$.

Từ đó ta tính được: $A^3 = 3AB - 4 = 3(3 - \sqrt[3]{7}) - 4 = 5 - 3\sqrt[3]{7} \Leftrightarrow A = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$.

Vậy $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{A}{2}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3.\sqrt[3]{7}}{2}}$. Ta có đpcm.

Bài 2.2. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3.\sqrt[3]{9} - 6}{2}}$.

Bài 2.3. Chứng minh rằng với mọi n là số tự nhiên thì tổng $A_n = \tan^{2n}\frac{\pi}{7} + \tan^{2n}\frac{2\pi}{7} + \tan^{2n}\frac{4\pi}{7}$ cũng là một số tự nhiên.

Bài 2.4. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{6}\frac{1 - x^2}{1 - 2x.\cos\frac{2k\pi}{7} + x^2} = 7\cdot\frac{1 + x^7}{1 - x^7}$ với mọi $x \in (-1,1)$.

V.Xác định đa thức.

Bài 1.1. Tìm tất cả các đa thức thỏa mãn điều kiện: $P(x)=\sqrt{P(x^2+1)-7}+6,\forall x\ge 0,P(0)=6$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $P(x^2+1)=(P(x)-6)^2+7,\forall x$. Ta có:

$P(0)=6\Rightarrow P(0^2+1)=(6-6)^2+7=7$.

Đặt $u_0=0,u_{n+1}=u_n^2+1,n=0,1,2,3,...$ thì $P(u_1)=u_1+6$.

Tiếp theo $P(u_1^2+1)=(P(u_1)-6)^2+7\Leftrightarrow P(u_2)=u_1^2+7=u_2+6$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $P(u_k)=u_k+6,\forall k\in\mathbb{N}$. Khi đó, đa thức $Q(x)=P(x)-(x+6)$ có vô hạn nghiệm nên nó đồng nhất với 0, tức là $P(x)=x+6,\forall x$.

Thử lại ta thấy thỏa. Vậy đa thức cần tìm là $P(x)=x+6,\forall x$.

Nhận xét. Việc ứng dụng tính hữu hạn của đa thức để chứng minh không tồn tại đa thức hoặc chứng minh đa thức là hằng số thường được sử dụng để xem xét các bài toán về đa thức. Dưới đây là một bài tương tự.

Bài 1.2. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ thỏa mãn hệ thức sau:

$P(x).P(2x^2)=P(x^5+2011x^3+2010x),\forall x\in\mathbb{R}$ sẽ không có nghiệm thực.

Bài 2. Tìm tất cả các đa thức không hằng số $P(x)$ sao cho

$$P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1).$$

Lời giải: Giả sử a là một nghiệm của $P(x)$, khi đó a^2+a+1 cũng là nghiệm.

Trong đẳng thức đã cho, thay x bằng $x-1$, ta có $P(x)P(x-1)=P(x^2-x+1)$.

Vì $P(a)=0$ nên ta cũng suy ra a^2-a+1 cũng là nghiệm của $P(x)$.

Giả sử a là nghiệm có modulo lớn nhất của $P(x)$. Từ cách chọn ta suy ra $|a^2+a+1|\le|a|$ và $|a^2-a+1|\le|a|$. Ta có: $|2a|\le|a^2+a+1|+|-a^2+a-1|\le 2|a|=|2a|$.

Đẳng phải xảy ra, tức là (a^2+a+1) và $(-a^2+a-1)$ phải cùng dấu. (1)

Nếu $\left|a^2+a+1\right| < \left|-a^2+a-1\right|$ thì $2\left|a^2-a+1\right| > \left|a^2-a+1\right| + \left|a^2+a+1\right| = \left|2a\right| \Rightarrow \left|a^2-a+1\right| > \left|a\right|$, mâu thuẫn với cách chọn a. Tương tự nếu $\left|a^2+a+1\right| > \left|-a^2+a-1\right|$ cũng có mâu thuẫn.

Do đó: $\left|a^2+a+1\right| = \left|a^2-a+1\right|$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2+a+1 = -a^2+a-1 \Leftrightarrow a^2+1=0 \Leftrightarrow a = \pm i$.
Như thế x^2+1 là một thừa số của $P(x)$. Đặt $P(x)=(x^2+1)^m.Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức nào đó không chia hết cho x^2+1.

Thay đẳng thức này vào giả thiết đã cho, ta cũng thấy rằng $Q(x)$ cũng thỏa mãn. Lập luận tương tự cũng có được nghiệm có modulo lớn nhất của $Q(x)$ là $\pm i$, nhưng điều này không thể xảy ra do x^2+1 không chia hết $Q(x)$. Suy ra $Q(x)$ là hằng số.

Thay trực tiếp vào giả thiết, ta thấy $Q(x) \equiv 1$.

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là $P(x)=(x^2+1)^m, m \in \mathbb{Z}^+$.

VI.Các bài toán khác.

Bài 1. Cho S là tập hợp các số nguyên x biểu thị được dưới dạng $x = a^3+b^3+c^3-3abc$ với a, b, c là các số nguyên nào đó. Chứng minh rằng: nếu $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.

Lời giải. Trước hết, ta có phân tích sau:

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ trong đó $\omega = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Xét đa thức sau: $P(X) = a+bX+cX^2$, suy ra: $a^3+b^3+c^3-3abc = P(1).P(\omega).P(\omega^2)$ là một đa thức có bậc không vượt quá 2.

Từ đó ta thấy $x \in S$ khi và chỉ khi tồn tại đa thức P có bậc không quá 2 thỏa mãn $x = P(1).P(\omega).P(\omega^2)$.

Ta xét $x, y \in S$, khi đó, tồn tại hai đa thức P, Q thỏa mãn:
$x = P(1).P(\omega).P(\omega^2),\ y = Q(1).Q(\omega).Q(\omega^2)$. Đặt $R(X) = P(X).Q(X)$ thì: $xy = R(1).R(\omega).R(\omega^2)$ là một đa thức có bậc không vượt quá 4. Xét phép chia đa thức R này cho X^3-1, giả sử được thương là $S(X)$, dư là $R_1(X)$, trong đó $R_1(X)$ là đa thức có bậc không vượt quá 2, ta có đẳng

thức sau: $R(X)=(X^3-1).S(X)+R_1(X)$. Rõ ràng 1, ω, ω^2 là các nghiệm của X^3-1 nên $R(1)=R_1(1), R(\omega)=R_1(\omega), R(\omega^2)=R_1(\omega^2)$. Từ đây ta có được: $xy=R_1(1).R_1(\omega).R_1(\omega^2)$ nên theo điều giả sử ở trên, ta thấy $xy\in S$.

Đây chính là đpcm.

Bài 2. Cho đa thức $P(x)=x^8+14x^4+1$. Chứng minh rằng có thể chia 8 nghiệm phức của đa thức này thành hai bộ rời nhau sao cho với mỗi bộ đó, giả sử là a,b,c,d thì các giá trị $a+b+c+d, ab+bc+cd+da+ac+bd, abc+bcd+cda+bcd, abcd$ đều là các số thực.

Lời giải. Ta có phân tích sau:

$$\begin{aligned}
&x^8+14x^4+1=(x^4+1)^2+12x^4=\\
&=(x^4+1)^2+4x^2(x^4+1)+4x^4+8x^4-4x^2(x^4+1)=\\
&=(x^4+1+2x^2)^2-4x^2(x^4+1-2x^2)=\\
&=(x^4+1+2x^2)^2-4x^2(x^2-1)^2=\\
&=(x^4-2x^3+2x^2+2x+1)(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)
\end{aligned}$$

Đến đây ta thấy rằng mỗi đa thức bậc bốn trong phân tích trên có 4 nghiệm phức a,b,c,d thì theo định lí Viete $a+b+c+d, ab+bc+cd+da+ac+bd, abc+bcd+cda+bcd, abcd$ đều là các số thực. Ta có đpcm.

Nhận xét. Thực ra điều duy nhất cần làm ở bài này là phân tích đa thức đã nêu thành nhân tử, tuy nhiên với phát biểu khác lạ một chút, bài toán có vẻ thú vị hơn nhiều. Câu hỏi vẫn đúng với đa thức sau $P(x)=x^8+98x^4+1$.

Bài 3.1. Cho phương trình bậc ba: $x^3-3x+1=0$.

1. Chứng minh rằng phương trình có 3 nghiệm phân biệt là $a<b<c$.
2. Chứng minh rằng: $a^2-c=c^2-b=b^2-a=2$.

Lời giải. Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x+1$. Ta có:
$f(-2)=-1<0, f(0)=1>0, f(1)=-1<0, f(2)=1>0$; đồng thời hàm này liên tục nên phương trình $x^3-3x+1=0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2,0),(0,1),(1,2)$.

Đến đây ta còn cần chứng minh: $a^2-c=c^2-b=b^2-a=2$. Trên thực tế, cách giải quen thuộc của bài toán này là dùng lượng giác, dựa theo công thức Cardono, tìm chính xác ba nghiệm của phương trình rồi thay vào biểu thức. Cụ thể là:

Đặt $x=2\cos t, t\in[0,\pi]$, thay vào phương trình đã cho:

$8\cos^3 t-6\cos t+1=0 \Leftrightarrow \cos 3t=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{2\pi}{9}+k.\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$. Ta tìm được các nghiệm là:

$a=t_1=2\cos\frac{8\pi}{9}, b=t_2=2\cos\frac{4\pi}{9}, c=t_3=2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Việc còn lại là áp dụng công thức nhân đôi là hoàn tất.

Tuy nhiên, đối với các bài toán không thể tìm được các nghiệm thì lời giải trên không còn giá trị nữa. Ta sẽ xem xét một lời giải khác dựa trên các biến đổi đại số trực tiếp từ phương trình ban đầu như sau.

Rõ ràng, ta cần chứng minh: $a=b^2-2, b=c^2-2, c=a^2-2$; tức là nếu $a<b<c$ là nghiệm của phương trình $x^3-3x+1=0$ thì $b^2-2<c^2-2<a^2-2$ cũng là nghiệm của phương trình $x^3-3x+1=0$.

Ta có: $x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow x(3-x^2)=1 \Rightarrow x^2(9-6x^2+x^4)=1 \Leftrightarrow x^6-6x^4+9x^2-1=0$, tức là nếu x_0 là nghiệm của $x^3-3x+1=0$ thì $y_0=x_0^2$ là nghiệm của $y^3-6y^2+9y-1=0$. Đặt $z_0=y_0-2=x_0^2-2 \Leftrightarrow z_0+2=y_0$. Ta lại có biến đổi sau:

$(z_0+2)^3-6(z_0+2)^2+9(z_0+2)-1=0 \Leftrightarrow z_0^3-3z_0+1=0$, tức là $z_0=x_0^2-2$ là nghiệm của phương trình $z^3-3z+1=0$. Đến đây, ta đã có đpcm.

Nhận xét. Lời giải vừa nêu thực ra cũng tương tự như ý tưởng dùng định lí Viete thuận và đảo ở trên nhưng trong phần này, ta đã cải tiến một chút là sử dụng các biến đổi hằng đẳng thức, dùng các tính toán đơn giản hơn. Từ bài toán này, ta cũng có thể nêu ra một số bài tương tự như sau.

Bài 3.2. Giải hệ phương trình sau với a,b,c phân biệt.

$$\begin{cases} a=b^2-2 \\ b=c^2-2 \\ c=a^2-2 \end{cases}$$

Bài 3.3. Tìm các số thực p,q sao cho phương trình bậc ba $x^3+px+q=0$ có ba nghiệm phân biệt là $a<b<c$ thỏa mãn: $a^2-c=c^2-b=b^2-a=2$.

D.Các bài toán rèn luyện.

Bài 1. Cho đa thức $P(x)$ bậc 6 thỏa mãn $P(1)=P(-1), P(2)=P(-2), P(3)=P(-3)$.

Chứng minh rằng $P(x)$ là một hàm số chẵn.

Bài 2. Cho đa thức $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và có ba nghiệm thực (phân biệt hoặc trùng nhau). Biết rằng $P(0)<0$, chứng minh bất đẳng thức $2b^3+9a^2d-7abc\le 0$.

Bài 3. Cho đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng phương trình sau cũng có ba nghiệm phân biệt

$$4(x^3+ax^2+bx+c)(3x+a)=(3x^2+2ax+b)^2.$$

Bài 4. Cho đa thức $P(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+k^4, k>0$ có bốn nghiệm âm. Chứng minh rằng với mọi $p>0$, ta luôn có bất đẳng thức $P(p)\ge(p+k)^4$.

Bài 5. Cho đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng:

$P(x)+P'(x)+P''(x)+P'''(x)+P^{(4)}(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 6. Giả sử hai số a,b là hai trong bốn nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức $P(x)=x^4+x^3-1$.

Chứng minh rằng tích ab là nghiệm của đa thức $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$.

Bài 7. Cho các số thực $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ thỏa mãn $0<x_1<x_2<x_3<...<x_n<1$, đặt $x_0=0, x_{n+1}=1$.

Giả sử các số này thỏa mãn đẳng thức: $\displaystyle\sum_{j=0,i\ne j}^{n+1}\frac{1}{x_i-x_j}=0, \forall i=1,2,3,...,n$.

Chứng minh rằng $x_{n+1-j}=x_j, \forall j=1,2,3,...,n$.

Bài 8. Cho đa thức $P(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ thỏa mãn đẳng thức $P(x).P(2x^2)=P(2x^3+x), \forall x\in\mathbb{R}$.

1. Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm thực.
2. Chứng minh rằng $P(x)=(x^2+1)^k, k\in\mathbb{Z}^+$ là tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài.

***Tài liệu tham khảo:**

1) Phan Huy Khải, “Chuyên đề bồi dưỡng HSG – Đa thức”.

2) Titu Andresscu, Mathematics Olympic Treasures”.

3) Tủ sách THTT, “Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990 – 2006)”.

4) Trần Nam Dũng, “Phương trình hàm đa thức”.

5) Các tài liệu trên Internet: http://mathlinks.ro, http://mathscope.org