

Chuyên đề :

Mối quan hệ giữa phương trình và bất phương trình

Người thực hiện

LÊ VĂN CHÁNH KHTN, Tp HCM

Mục lục

1	Dùng phương trình để giải bất phương trình	3
1.1	Định lý quan trọng	3
1.2	Phương pháp	4
2	Giải phương trình nhờ vào phương trình và bất phương trình	6
3	Tài liệu tham khảo	10

Chương 1

Dùng phương trình để giải bất phương trình

Khi đối mặt với một bài toán giải bất phương trình (bpt), dường như chúng ta không thoải mái khi phải nhân, chia, lũy thừa hai vế của bất phương trình cho một số hay một biểu thức,...

Làm gì để vượt qua trở ngại đó, để chuyển việc giải một bất phương trình về việc giải phương trình với cảm giác thoải mái hơn? Và cho chúng ta nhiều công cụ hơn, khi giải quyết một bài phương trình thay vì bất phương trình

Bên dưới là một định lý quan trọng, giúp chúng ta giải quyết vấn đề này.

1.1 Định lý quan trọng

Định lý 1 Cho hàm số f liên tục trên (a, b) , và tồn tại hai giá trị $c, d : a < c < d < b$ sao cho : $f(c)f(d) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên (c, d)

Ta thấy, định lý này được suy ra trực tiếp từ định lý giá trị trung bình, và ở đây, chúng ta không bàn đến việc chứng minh

Từ định lý trên, chúng ta đi đến một hệ quả quan trọng sau:

Hệ quả 1 Cho hàm f liên tục từng khúc, trong mỗi khoảng không chứa nghiệm thì giá trị hàm số không đổi dấu

Định lý này cho phép chúng ta xác định dấu của một hàm số trong một khoảng chứa nghiệm. Đây là mấu chốt cho ý tưởng sau.

Mọi bất phương trình (ptr) đều có thể quy về dạng : $f(x) \geq 0$ hoặc $f(x) > 0$. Như đã nói ở trên, chúng ta sẽ tiến hành giải ptr $f(x) = 0$ (1). Do đó, sự khác biệt giữa hai bất phương trình trên cũng không mấy quan tâm, vì khi chúng ta đã biết rõ tập nghiệm của ptr thì chúng ta chỉ cần quan tâm đến một trong hai bất phương trình là như nhau

Nên chúng ta sẽ xét một dạng bất phương trình $f(x) \geq 0$

Nhờ sự trợ giúp của nhiều công cụ khác nhau, chúng có thể giải ptr (1), chúng tìm ra tập nghiệm của ptr (1) (Chúng ta chỉ quan tâm trong trường hợp hữu hạn nghiệm). Từ đó, chúng ta xét dấu hàm số trên mỗi khoảng không chứa nghiệm. Các khoảng đó với các mức là các nghiệm hoặc là điểm tới hạn.

Kết quả sau khi xét dấu thì ta biết được trên miền nào thì có $f(x) > 0$. Từ đó, kết luận nghiệm bất phương trình.

Vẫn còn một điều mà chúng ta chưa nói đến, trong mỗi khoảng chúng ta sẽ xét dấu như thế nào? Rõ ràng, trong mỗi khoảng hàm số không đổi dấu, nên ta chỉ đơn giản lấy một giá trị đặc biệt sao cho thuận tiện để xác định dấu của hàm. Từ đó suy ra dấu của hàm số trên khoảng đó.

Ta bổ sung thêm một nhận xét nữa để quá trình xét dấu thuận tiện hơn.

Định lý 2: Cho hàm số liên tục có hữu hạn không điểm, khi hai khoảng liên tiếp đối với nghiệm đơn hoặc nghiệm bội bậc lẻ thì hàm số không đổi dấu, nếu là nghiệm bội chẵn thì hàm số giữ nguyên dấu

(1.1)

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một ví dụ bên dưới:

1.2 Phương pháp

Giải bất phương trình: $5^x + 3^x \geq 6^x + 2^x$

Bước 1 Đặt $f(x) = 5^x + 3^x - 6^x - 2^x$, ta cần giải bpt: $f(x) \geq 0$

Bước 2 Giải phương trình $f(x) = 0$ Có thể có nhiều cách để giải quyết phương trình trên, ở đây tôi sẽ trình bày giải ptr trên bằng định lý Lagrange. Ý tưởng: Qui ptr về dạng: $g(b) - g(a) = g(d) - g(c)$, trong đó: $a < b < c < d$ Và chúng ta áp dụng định lý Lagrange trên mỗi khoảng $(a, b), (c, d)$ Gọi x là nghiệm của ptr (cố định x) Đặt $g(t) = t^x, t > 0$

Ta dễ nhận thấy đẳng thức sau: $g(3) - g(2) = g(6) - g(5)$ Theo định lý Lagrange thì tồn tại $c, d: 2 < c < 3 < 5 < d < 6$ sao cho:

$$\begin{cases} g(3) - g(2) = (3 - 2)g'(c) \\ g(6) - g(5) = (6 - 5)g'(d) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } xc^{x-1} = xd^{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\frac{d}{c})^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } d > c > 2) \end{cases}$$

Do đó, ptr chỉ có thể (nếu có) nghiệm thì nghiệm đó nằm trong tập $S_e = \{0, 1\}$. Kiểm chứng trực tiếp thì S_e là tập nghiệm của ptr

Bước 3 Lập bảng xét dấu

Thay vì lập bảng biến thiên, chúng ta sẽ lý luận để tìm ra dấu của hàm số trong mỗi khoảng $S_1 = (-\infty, 0)$, $S_2 = (0, 1)$, $S_3 = (1, \infty)$

- Ta thấy, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 6^x \left(\left(\frac{5}{6} \right)^x + \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^x \right) = -\infty$
nên $f(x) < 0, \forall x \in S_3$
Dễ nhận thấy $f'(0) \neq 0, f'(1) \neq 0$ Nên $x = 0, 1$ là các nghiệm đơn. Do đó áp dụng định lý (1.1), ta có :
- $f(x) > 0 \forall x \in S_2, f(x) < 0 \forall x \in S_1$

Bước 4 Kết luận nghiệm $S_{ie} = S_2 \cup \{0, 1\} = [0, 1]$

Phương pháp này có thể áp dụng cho bất kì bất phương trình có tính giải được (với hàm tương ứng là hàm có hữu hạn không điểm và gián đoạn tại hữu hạn điểm)

¹

Một số bài tập : Giải các bất phương trình sau

1. $3^x \geq 2^x + 1$
2. $5^x + 3^x \geq 6x + 2$
3. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} \geq x$
4. $x^3 - 3x + 1 \geq 0$
5. $\sin x \geq x$
6. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} \geq x^3 + x^2 - 4x - 1$
7. $\sqrt{\frac{2x}{x^2-1}} + \sqrt{5x-3} < 2\sqrt{3}$
8. $3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 > 0$
9. $2^{\sqrt{x^2+1}} \geq 3^x + 1, \dots$

¹Tính giải được hiểu đơn giản là có một cách nào đó ta có thể xác định được các không điểm của hàm này

Chương 2

Giải phương trình nhờ vào phương trình và bất phương trình

Từ cách giải trên, chúng ta lại có một suy nghĩ ngược lại : " Liệu các phương trình hay bất phương trình đơn giản có thể giúp ích gì cho chúng ta khi giải một bài phương trình khác không ?"

(2.1)

Trước hết chúng ta xem xét vấn đề sau :

Cho k là số tự nhiên và a, b là hai số dương phân biệt .Ta có bất đẳng thức (BDT) sau :

$$\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \quad (2.2)$$

BDT có thể chứng minh đơn giản bằng phương pháp qui nạp hoặc dùng BDT Becnuli.

Từ BDT trên chúng ta đặt ra câu hỏi : Với $a, b > 0, a \neq b$, khi nào ta sẽ có :

$$\frac{a^x + b^x}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^x \quad (2.3)$$

Nói một cách khác , ta cần giải bpt (2.3).

Không mất tổng quát , ta có thể giả sử $a < b$.

Thực hiện như phần (1)

Bước 1 Đặt $f(x) = a^x + b^x - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^x$, ta cần giải bpt: $f(x) \geq 0$

Bước 2 Giải phương trình $f(x) = 0$ Cũng giải phương trình này bằng định lý Lagrange

Gọi x là nghiệm của ptr (cố định x) Đặt $g(t) = t^x, t > 0$

Ta dễ nhận thấy đẳng thức sau : $g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a) = g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Theo định lý Lagrange thì tồn tại $c, d : a < c < \frac{a+b}{2} < d < b$ sao cho :

$$\begin{cases} g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a) = \left[\frac{a+b}{2} - a\right]g'(c) \\ g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left[b - \frac{a+b}{2}\right]g'(d) \end{cases}$$

Khi đó : $\frac{b-a}{2}xc^{x-1} = \frac{b-a}{2}xd^{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (\frac{d}{c})^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (do } d > c > 0) \end{cases}$

Do đó ,ptr chỉ có thể (nếu có) nghiệm thì nghiệm đó nằm trong tập $S = \{0, 1\}$.
Kiểm chứng trực tiếp thì S là tập nghiệm của ptr

Bước 3 Lập bảng xét dấu

Thay vì lập bảng biến thiên , chúng ta sẽ lý luận để tìm ra dấu của hàm số trong mỗi khoảng $S_1 = (-\infty, 0), S_2 = (0, 1), S_3 = (1, \infty)$

- Ta thấy : $2 \in S_3, f(2) = \frac{(a-b)^2}{2} > 0$, do $a \neq b$ Nên $f(x) > 0, \forall x \in S_3$
- Ta thấy : $\frac{1}{2} \in S_2, f(\frac{1}{2}) = -\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2(a+b)}} < 0$, do $a \neq b$ Nên $f(x) < 0, \forall x \in S_2$
- Dễ nhận thấy $f'(0) = \ln \frac{4ab}{(a+b)^2} \neq 0$, do $a \neq b$ Nên $x = 0$ là nghiệm đơn .Do đó áp dụng định lý (1.1), ta có : $f(x) > 0 \forall x \in S_1$

Bước 4 Kết luận nghiệm $S_{ie} = S_1 \cup S_3 \cup \{0, 1\} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

* **Hệ quả** $-1 \in S_{ie}$, khi đó : $f(-1) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ là một BĐT quen thuộc

Để trả lời câu hỏi (2.1) , chúng ta quan sát ví dụ sau :

Giải ptr :

$$(2^x + x)(a^x + b^x) = 2(a+b)^x + x(a^x + b^x) \quad (2.4)$$

, với a,b là hai hằng số phân biệt > 1

Giải

Ta viết ptr về :

$$(2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x = x(a+b - a^x - b^x) \quad (2.5)$$

Tiếp tục ta mong muốn xét dấu biểu thức : $a+b-a^x-b^x$ Ta thấy : $f(x) = a+b-a^x-b^x$ nghịch biến trên $\mathbf{R}$ với $a, b > 1$ và $f(1) = 0$. Nên $a+b-a^x-b^x \begin{cases} < 0, \forall x \in (-\infty, 1) \\ \leq 0, \forall x \in [1, \infty) \end{cases}$

Từ đó , chúng ta nhận được dấu của hai vế của ptr (2.5)

- $x(a+b-a^x-b^x) \begin{cases} > 0, \forall x \in (0, 1) \\ \leq 0, \forall x \in [-\infty, 0] \cup [1, \infty) \end{cases}$
- $(2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x \begin{cases} \geq 0, \in [-\infty, 0] \cup [1, \infty) \\ < 0, \forall x \in (0, 1) \end{cases}$

Do đó :

- $(2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x \geq 0 \geq x(a+b-a^x-b^x), \forall x \in [-\infty, 0] \cup [1, \infty).$

- $(2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x < 0 < x(a+b-a^x-b^x), \forall x \in (0, 1)$.

$$\text{Khi đó (2.4)} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x = 0 \\ x(a+b-a^x-b^x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

***Nhận xét** Để giải ptr : $f(x)=0$ trên D , ta biến đổi phương trình về dạng : $g(x)=h(x)$

Trong đó :

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \geq h(x) \forall x \in D_1 \\ g(x) < 0 < h(x) \forall x \in D_2 \\ D_1 \cup D_2 = D \\ D_1 \cap D_2 = \emptyset \end{cases} \quad 1$$

$$\text{Khi đó , ta qui việc giải phương trình ban đầu về hệ } \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ x \in D_2 \end{cases}$$

*** Nhận xét**

- Trong trường hợp D_2 hoặc D_1 là $\emptyset$ thì hướng đi như trên chính là phương pháp đánh giá quen thuộc
- Trong đó , ta cần xét dấu của $h(x), g(x)$ nghĩa là giải các bất ptr(có thể ứng dụng phần 1)

Chúng ta thực hiện thêm một ví dụ nữa . Giải phương trình :

$$(x^6 + 2010)(\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}}) = (x^4 + 4x^2 + x^2 + 4)(5^x - 25) \quad (2.6)$$

Ta nhận thấy một phương trình quen thuộc :

$$3^x + 4^x = 5^x \quad (2.7)$$

(gần gũi với nhân tử $\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}}$)

Việc giải (2.7) Cũng khá đơn giản nhờ vào tính chất hàm $f(x) = \frac{3^x + 4^x - 5^x}{5^x} = (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x - 1$ nghịch biến và $f(2) = 0$. Do đó (2.7) chỉ có nghiệm duy nhất là 2. Thông qua lý thuyết phần 1, ta sẽ có :(*)

- $3^x + 4^x \geq 5^x \Leftrightarrow x \leq 2$. Từ đây , ta có : $\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$
- $5^x - 25 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Từ nhận xét (*) và $(x^6 + 2010) > 0, (x^4 + 4x^2 + x^2 + 4) > 0$, ta sẽ có :

- $(x^6 + 2010)(\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}}) \geq 0 \geq (x^4 + 4x^2 + x^2 + 4)(5^x - 25), \forall x \leq 2$
- $(x^6 + 2010)(\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}}) < 0 < (x^4 + 4x^2 + x^2 + 4)(5^x - 25), \forall x > 2$

$$\text{Do vậy (2.6)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^6 + 2010)(\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}}) = 0 \\ (x^4 + 4x^2 + x^2 + 4)(5^x - 25) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vài câu hỏi mở :

¹không phải lúc nào cũng có thể thực hiện được

- Chúng ta có cách nào để xác định hàm h, g từ f ? (Rõ ràng nếu chuyển được về dạng trên (tất nhiên lúc này đã biết h và g là cơ sở để ta xác định được D_1, D_2 để tiếp tục quá trình giải phương trình))
- Như đã biết, không có phương pháp nào để giải quyết cho mọi phương trình, nên chúng ta cũng có thể đặt ra câu hỏi : khi nào có thể áp dụng được phương pháp này ?

Một số bài tập có thể dùng phương pháp trên : Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + x^2 - 4x - 1$

2. $\sqrt{\frac{2x}{x^2-1}} + \sqrt{5x-3} < 2\sqrt{3}$

3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 2x \quad (a+b)^{2\sin^2 x} - a^{2\sin^2 x} - b^{2\sin^2 x} = a^{2\cos^2 x} + b^{2\cos^2 x} - (a+b)^{2\cos^2 x}, (a, b > 0)$

4. $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{6-3x} = x^3 + x^2 - 5x + 2$

5. $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^3 + x^2 - 4x - 4 + |x| + |x-1|$

6. { Mở rộng ý tưởng cho hệ phương trình } $\begin{cases} (x+2)(y^2+2) = y(x^2+8) \\ (y+2)(x^2+2) = x(y^2+8) \end{cases} , \dots$

Chương 3

Tài liệu tham khảo

1. Các bài toán phương trình từ diendantoanhoc.net (Đặc biệt, các bài post của anh Kummer)
2. Chuyên đề sử dụng định lý Lagrange để giải phương trình (Anh Trịnh Công Sơn - muangau(toanthpt.net))
3. Bài giảng dùng tính chất liên tục của hàm số để giải bất phương trình , thầy giáo Nguyễn Văn Quý (chuyên Bến Tre)