# **BÀI 23: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG**

## **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG**

**HĐ1.** Đối với cánh cửa như trong Hình 7.10, khi đóng – mở cánh cửa, ta coi mép dưới của cánh cửa luôn sát sàn nhà (khe hở không đáng kể).

a) Từ quan sát trên, hãy giải thích vì sao đường thẳng  vuông góc với mọi đường thẳng đi qua  trên sàn nhà.

b) Giải thích vì sao đường thẳng vuông góc với mọi đường thẳng trên sàn nhà.



**HĐ2.** Gấp tấm bìa cứng hình chữ nhật sao cho nếp gấp chia tấm bìa thành hai hình chữ nhật, sau đó đặt nó lên mặt bàn như Hình 7.11.
a) Bằng cách trên, ta tạo được đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng nào thuộc mặt bàn?
b) Trên mặt bàn, qua điểm  kẻ một đường thẳng  tuỳ ý. Dùng ê ke, hãy kiểm tra trên mô hình xem  có vuông góc với  hay không.

****

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có đáy là tam giác  vuông tại  và cạnh  vuông góc với các cạnh . Chứng minh rằng .

**Luyện tập 1.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm và . Chứng minh rằng .

**Vận dụng.** Khi làm cột treo quần áo, ta có thể tạo hai thanh đế thẳng đặt dưới sàn nhà và dựng cột treo vuông góc với hai thanh đế đó . Hãy giải thích vì sao bằng cách đó ta có được cột treo vuông góc với sàn nhà**2. TÍNH CHẤT**

**HĐ3.** Cho điểm và đường thẳng  không đi qua . Gọi  là đường thẳng đi qua  và song song với . Xét hai mặt phẳng phân biệt tuỳ ý  và  cùng chứa . Trong các mặt phẳng  tương ứng kẻ các đường thẳng  cùng đi qua  và vuông góc với . Giải thích vì sao  đi qua và vuông góc với .



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng điểm  cách đều hai điểm phân biệt  cho trước khi và chỉ khi  thuộc mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng  và vuông góc với đường thẳng .

**HĐ4.** Cho mặt phẳng  và điểm . Trong mặt phẳng , lấy hai đường thẳng cắt nhau  tuỳ ý. Gọi  là các mặt phẳng qua  và tương ứng vuông góc với .

a) Giải thích vì sao hai mặt phẳng  cắt nhau theo một đường thẳng đi qua .

b) Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa  và .



Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

**Luyện tập 2.** Cho ba điểm phân biệt  sao cho các đường thẳng  và  cùng vuông góc với

**Ví dụ 3.** Cho điểm  nằm ngoài mặt phẳng . Giải thích vì sao có duy nhất điểm  thuộc  sao cho đường thẳng  vuông góc với .

**3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

**HĐ5.** Cho đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  và song song với đường thẳng . Lấy một đường thẳng  bất kì thuộc mặt phẳng . Tính  và từ đó rút ra mối quan hệ giữa  và .



**HĐ6.** Cho hai đường thẳng phân biệt  và  cùng vuông góc với mặt phẳng . Xét  là một điểm thuộc  nhưng không thuộc . Gọi  là đường thẳng qua  và song song với .
a) Hỏi c có vuông góc với  hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa  và .
b) Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng  và .



* Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì các đường thẳng song song với cũng vuông góc với .
* Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

**Ví dụ 4.** Cho tứ diện  có các cạnh  tương ứng vuông góc với nhau. Gọi  tương ứng là trọng tâm của các tam giác . Chứng minh rằng đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng .

**HĐ7.** Cho hai mặt phẳng  và  song song với nhau và đường thẳng  vuông góc với . Gọi  là một đường thẳng bất kì thuộc . Lấy một đường thẳng a thuộc  sao cho  song song với . So sánh  và . Từ đó rút ra mối quan hệ giữa và .



**HĐ 8.** Cho hai mặt phẳng phân biệt  và  cùng vuông góc với đường thẳng . Xét  là một điểm thuộc mặt phẳng  nhưng không thuộc mặt phẳng . Gọi  là mặt phẳng đi qua  và song song với  .
a) Hỏi  có vuông góc với  hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa  và .
b) Nêu vị trí tương đối giữa  và .



* Nếu đường thằng  vuông góc với mặt phẳng  thì  cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với .
* Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp . Các điểm  tương ứng là trung điểm của . Đường thẳng qua  vuông góc với mặt phẳng  và cắt mặt phẳng đó tại . Chứng minh rằng .

**Luyện tập 3.** Một chiếc bàn có các chân cùng vuông góc với mặt phẳng chứa mặt bàn và mặt phẳng chứa mặt sàn. Hỏi hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

**HĐ9.** Cho đường thẳng song song với mặt phẳng  và đường thẳng  vuông góc với mặt phằng . Tính .

**HĐ10.** Cho đường thẳng  và mặt phẳng  cùng vuông góc với một đường thẳng .
a) Qua một điểm  thuộc , kẻ đường thẳng  song song với . Nêu vị trí tương đối giữa  và .
b) Nêu vị trí tương đối giữa và .

* Nếu đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  thì  vuông góc với mọi đường thẳng song song với 
* Nếu đường thẳng  và mặt phằng  cùng vuông góc với một đường thẳng  thì  nằm trong  hoặc

song song với .

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp  có đáy  là một hình vuông, . Gọi  tương ứng là trung điềm của . Chứng minh rằng .

**Luyện tập 4.** Cho hình chóp  có đáy  là một hình vuông, . Kè  vuông góc với  (  thuộc  vuông góc với  (  thuộc  ). Chứng minh rằng  và .

**B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

**Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng  ta chứng minh:

 • *d* vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong .

 • *d* song song với đường thẳng *a* mà *a* vuông góc với .

2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện *ABCD* có hai mặt *ABC* và *BCD* là hai tam giác cân có chung đáy *BC*. Điểm *I* là trung điểm của cạnh *BC*.

a) Chứng minh .

b) Gọi *AH* là đường cao trong tam giác *ADI*. Chứng minh rằng 

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, . Gọi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu của điểm *A* trên các đường thẳng *SB* và *SD*.

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh rằng .

c) Chứng minh rằng  và .

d) Gọi *K* là giao điểm của *SC* với mặt phẳng . Chứng minh rằng tứ giác *AMKN* có hai đường chéo vuông góc.

**Ví dụ 3.** Cho tứ diện *ABCD* có ba cạnh *AB, AC, AD* đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh *A* lên mặt phẳng  trùng với trực tâm của tam giác *BCD*.

b) Chứng minh rằng .

c) Chứng minh rằng tam giác *BCD* có 3 góc nhọn.

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp *S.ABC* có , các tam giác *ABC* và *SBC* là các tam giác nhọn. Gọi *H* và *K* lần lượt là trực tâm của các tam giác *ABC* và *SBC*. Chứng minh rằng:

a) *AH, SK, BC* đồng quy.

b) .

c) .

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* và có .

a) Chứng minh rằng .

b) Gọi *I, K* lần lượt là trung điểm của *BA* và *BC*. Chứng minh rằng  và .

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*. Mặt bên *SAB* là tam giác đều, *SCD* là tam giác vuông cân đỉnh *S*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*.

a) Tính các cạnh của tam giác *SIJ*, suy ra tam giác *SIJ* vuông.

b) Chứng minh rằng .

c) Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên *IJ*, chứng minh rằng .

**Ví dụ 7.** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác cân tại *A*, điểm *I* và *H* lần lượt là trung điểm của *AB* và *BC*. Trên đoạn *CI* và *SA* lần lượt lấy hai điểm *M, N* sao cho , . Biết , chứng minh .

### **Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia**

**1. Phương pháp giải:**

◾ Muốn chứng minh đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b*, ta đi tìm mặt phẳng  chứa đường thẳng *b* sao cho việc chứng minh  dễ thực hiện.

◾ Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

**2. Ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện đều *ABCD*. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

**Ví dụ 2.** Hình chóp *S.ABCD* có cạnh *SA* vuông góc với mặt phẳng  và đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D* với .

a) Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AB*, chứng minh  và .

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp *S.ABCD* là các tam giác vuông.

**Ví dụ 3.** Cho hình lăng trụ  có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Cạnh bên  vuông góc với đáy và .

a) Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Chứng minh .

b) Gọi *M* là trung điểm của . Chứng minh .

c) Gọi *K* là điểm trên đoạn  sao cho  và *J* là trung điểm của . Chứng minh rằng:  và .

## **C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 7.5.** Cho hình chóp  có đáy là tam giác cân tại  và . Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng:
a) ;

b) Tam giác  cân tại .

**Bài 7.6.** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật và . Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp  là các tam giác vuông.

**Bài 7.7.** Cho hình chóp  có đáy là hình chữ nhật và . Gọi  tương ứng là hình chiếu của  trên . Chứng minh rằng: .

**Bài 7.8.** Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

**Bài 7.9.** Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột  đến một điểm trên cột, cách chân cột  được kết quả là . Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?

## **D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong  thì  vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong 

**B.** Nếu đường thẳng  thì  vuông góc với hai đường thẳng trong 

**C.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng nằm trong  thì 

**D.** Nếu  và đường thẳng  thì 

1. Trong không gian cho đường thẳng  không nằm trong mặt phẳng , đường thẳng  được gọi là vuông góc với mp  nếu:

**A.** vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp 

**B.** vuông góc với đường thẳng  mà  song song với mp 

**C.** vuông góc với đường thẳng  nằm trong mp 

**D.** vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp 

1. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

**B.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

**C.** Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

**D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

1. Cho hai đường thẳng phân biệt  và mặt phẳng  trong đó  Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

**A.** Nếu thì  **B.** Nếu  thì 

**C.** Nếu  thì  **D.** Nếu  thì 

1. Cho hai đường thẳng  và mặt phẳng . Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

**A.** Nếu  và  thì . **B.** Nếu  và  thì .

**C.** Nếu  và  thì . **D.** Nếu  và  thì .

1. Cho  là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

**A.** Nếu  và  thì 

**B.** Nếu  vuông góc với mặt phẳng  và  thì 

**C.** Nếu  và  thì 

**D.** Nếu ,  và  cắt  thì  vuông góc với mặt phẳng 

1. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

**A.** Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

**B.** Qua một điểm  cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

**C.** Qua một điểm  cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

**D.** Qua một điểm  cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

**B.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

**C.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

**D.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

**A.** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

**B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

**C.** Với mỗi điểm  và mỗi điểm  thì ta có đường thẳng  vuông góc với giao tuyến  của  và 

**D.** Nếu hai mặt phẳng  và  đều vuông góc với mặt phẳng  thì giao tuyến  của  và  nếu có sẽ vuông góc với 

1. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

**A.** Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

**B.** Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng  với  vuông góc với 

**C.** Góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  bằng góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  thì mặt phẳng  song song với mặt phẳng .

**D.** Góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  bằng góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  thì  song song với .

1. Cho hình chóp  có đáy  là tam giác cân tại  Cạnh bên  vuông góc với đáy. Gọi  lần lượt là trung điểm của  và  Khẳng định nào dưới đây sai?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại  cạnh bên  vuông góc với đáy. Gọi  là chân đường cao kẻ từ  của tam giác  Khẳng định nào dưới đây là sai?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho tứ diện  Gọi  là trực tâm của tam giác  và  vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi tâm  Biết rằng   Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi tâm  Cạnh bên  vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật tâm  Đường thẳng  cuông góc với mặt đáy . Gọi  là trung điểm của  Khẳng định nào dưới đây là sai?

**A. **

**B. **

**C.** Tam giác  vuông ở 

**D.**  là mặt phẳng trung trực của 

1. Cho hình chóp  với đáy  là hình thang vuông tại  và , có , . Cạnh bên  vuông góc với đáy ,  là trung điểm của . Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

**A.**  **B. **

**C.** Tam giác vuông tại . **D. **

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật, cạnh bên  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  lần lượt là đường cao của tam giác  và tam giác  Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho hình chóp  có  Gọi  lần lượt là trực tâm các tam giác  và. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A.  B.  C.  D. **

1. Cho hình lập phương  Đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

**A. ** **B. ** **C.**  **D. **

1. Cho tứ diện  có  đôi một vuông góc với nhau. Gọi  là hình chiếu của  trên mặt phẳng . Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A. ** **B. **

**C. ** là trực tâm  **D. **

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với , . Tam giác  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng  đi qua  vuông góc với . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp đều  có đáy  là tam giác đều cạnh , tâm ; . Gọi  là điểm thuộc đoạn . Mặt phẳng  đi qua  và vuông góc với . Đặt . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh ,  và vuông góc với đáy. Mặt phẳng  qua  và vuông góc với trung tuyến  của tam giác . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp đã cho.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh ,  và vuông góc với đáy. Mặt phẳng  qua trung điểm  của  và vuông góc với . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp đã cho.

**A. ** **B. ** **C. ** **D.** 

1. Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh ,  và vuông góc với đáy. Gọi  là mặt phẳng đi qua  và vuông góc với . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp đều  có cạnh đáy bằng , cạnh bên bằng . Mặt phẳng  đi qua  và vuông góc với . Tìm hệ thức giữa  và  để  cắt  tại điểm  nằm giữa  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại , đáy lớn , ,  vuông góc với mặt phẳng , . Gọi  là trung điểm . Gọi  là mặt phẳng qua  và vuông góc với. Thiết diện của  và hình chóp có diện tích bằng:

**A.** . **B. **. **C. **. **D. **.

1. Cho hình chóp đều  có đáy  là tam giác đều cạnh , tâm , đường cao ; . Gọi  là điểm thuộc đoạn . Mặt phẳng  đi qua  và vuông góc với . Đặt . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với , . Cạnh bên  và vuông góc với đáy. Mặt phẳng  đi qua  vuông góc với . Tính diện tích  của thiết diện tạo bởi  với hình chóp đã cho.

**A.  B. ** **C. ** **D.** 

1. Cho hình lăng trụ  có đáy  là tam giác vuông cân tại  với ;  và vuông góc với đáy. Mặt phẳng  qua  là trung điểm của  và vuông góc với . Thiết diện tạo bởi  với hình lăng trụ  là:

**A.** Hình thang cân. **B.** Hình thang vuông.

**C.** Tam giác. **D.** Hình chữ nhật.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

https://www.vnteach.com