

BÀI 12. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Nếu $a // (P)$ thì tồn tại trong (P) đường thẳng b để $b // a$.

C. Nếu $\begin{cases} a // (P) \\ b \subset (P) \end{cases}$ thì $a // b$.

D. Nếu $a // (P)$ và đường thẳng b cắt mặt phẳng (P) thì hai đường thẳng a và b cắt nhau.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $d \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Nếu $d // (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng Δ sao cho $\Delta // d$.

B. Nếu $d // (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b // d$.

C. Nếu $d \cap (\alpha) = A$ và $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

D. Nếu $d // c; c \subset (\alpha)$ thì $d // (\alpha)$.

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề B sai vì b và d có thể chéo nhau.

Câu 3. Cho các mệnh đề sau:

(1). Nếu $a // (P)$ thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

(2). Nếu $a // (P)$ thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P) .

(3). Nếu $a // (P)$ thì có vô số đường thẳng nằm trong (P) song song với a .

(4). Nếu $a // (P)$ thì có một đường thẳng d nào đó nằm trong (P) sao cho a và d đồng phẳng.

Số mệnh đề đúng là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

(1). Sai.

(2). Đúng.

(3). Đúng.

(4). Đúng.

Vậy có 3 mệnh đề đúng.

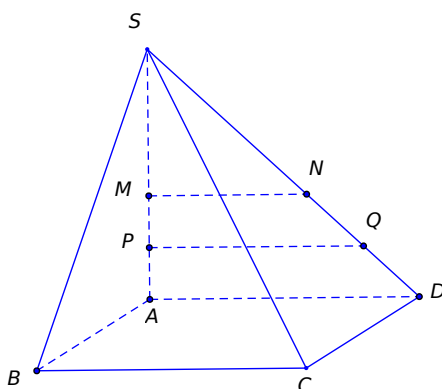
- Câu 4.** Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?
- A. Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.
 - B. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.
 - C. Nếu hai đường thẳng song song thì chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.
 - D. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Lời giải

Giả sử (α) song song với (β) . Một đường thẳng a song song với (β) có thể nằm trên (α) .

- Câu 5.** Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây
- A. Nếu hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến tạo thành song song với nhau.
 - B. Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai đường thẳng chéo nhau những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
 - C. Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q) .
 - D. Nếu mặt phẳng (P) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng đó cùng song song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

Lời giải



Ví dụ (SAD) chứa $MN; PQ$ cùng song song với $(ABCD)$ nhưng (SAD) cắt $(ABCD)$.

- Câu 6.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 - B. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì trùng nhau.
 - C. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chéo nhau.
 - D. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Lời giải

Lý thuyết : Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

- Câu 7.** Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?
- A. $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$. B. $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$.
 C. $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. D. $a \cap (\alpha) = \emptyset$.

Lời giải

Chọn $a \cap (\alpha) = \emptyset$

- Câu 8.** Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d . Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. a, d trùng nhau. B. a, d chéo nhau. C. a song song d . D. a, d cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

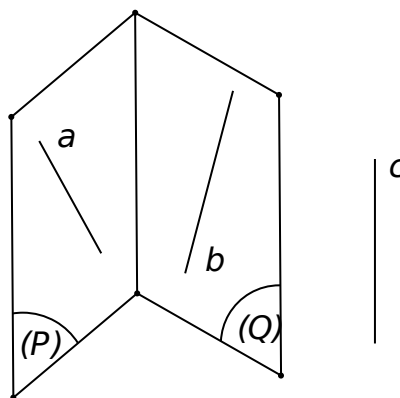
Sử dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

- Câu 9.** Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) . B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
 C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) . D. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .

Lời giải

Chọn D



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

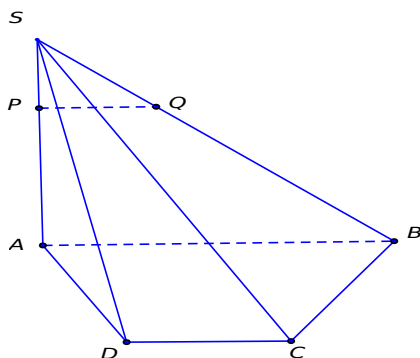
Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi P, Q lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh SA và SB sao cho $\frac{SP}{SA} = \frac{SQ}{SB} = \frac{1}{3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. PQ cắt $(ABCD)$. B. $PQ \subset (ABCD)$.
C. $PQ \parallel (ABCD)$. D. PQ và CD chéo nhau.

Lời giải



Chọn C.

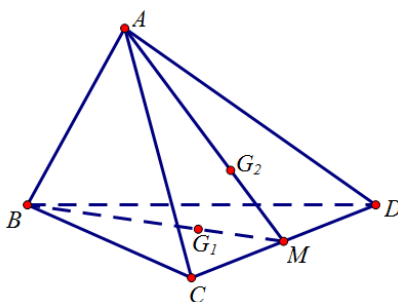
$$\begin{cases} PQ \parallel AB \\ AB \subset (ABCD) \Rightarrow PQ \parallel (ABCD) \\ PQ \not\subset (ABCD) \end{cases}$$

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD . Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. $G_1G_2 \parallel (ABD)$. B. $G_1G_2 \parallel (ABC)$.
C. BG_1, AG_2 và CD đồng quy. D. $G_1G_2 = \frac{2}{3} AB$.

Lời giải

Chọn D



$$\Rightarrow \begin{cases} G_1 \in BM; \frac{MG_1}{MB} = \frac{1}{3} \\ G_2 \in AM; \frac{MG_2}{MA} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Gọi M là trung điểm CD

Xét tam giác ABM , ta có $\frac{1}{3} = \frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MA} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ (định lý Thales đảo)

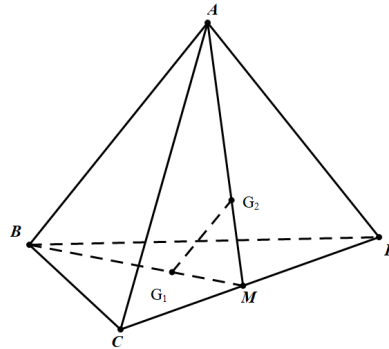
$$\Rightarrow \frac{G_1 G_2}{AB} = \frac{MG_1}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1 G_2 = \frac{1}{3} AB$$

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD . Mệnh đề nào sau đây *sai*?

- A. $G_1 G_2 \parallel (ABD)$
 B. Ba đường thẳng BG_1, AG_2 và CD đồng quy.
 C. $G_1 G_2 \parallel (ABC)$
 D. $G_1 G_2 = \frac{2}{3} AB$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của CD .

Xét $\triangle ABM$ ta có: $\frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} G_1 G_2 \parallel AB \\ G_1 G_2 = \frac{1}{3} AB \end{cases} \Rightarrow \text{D sai.}$

Vì $G_1 G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1 G_2 \parallel (ABD) \Rightarrow \text{A đúng.}$

Vì $G_1 G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1 G_2 \parallel (ABC) \Rightarrow \text{C đúng.}$

Ba đường BG_1, AG_2, CD , đồng quy tại $M \Rightarrow \text{B đúng.}$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M, N, K lần lượt là trung điểm của DC, BC, SA . Gọi H là giao điểm của AC và MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào *sai*?

- A. MN chéo SC . B. $MN \parallel (SBD)$. C. $MN \parallel (ABCD)$. D. $MN \cap (SAC) = H$.

Lời giải

Chọn C

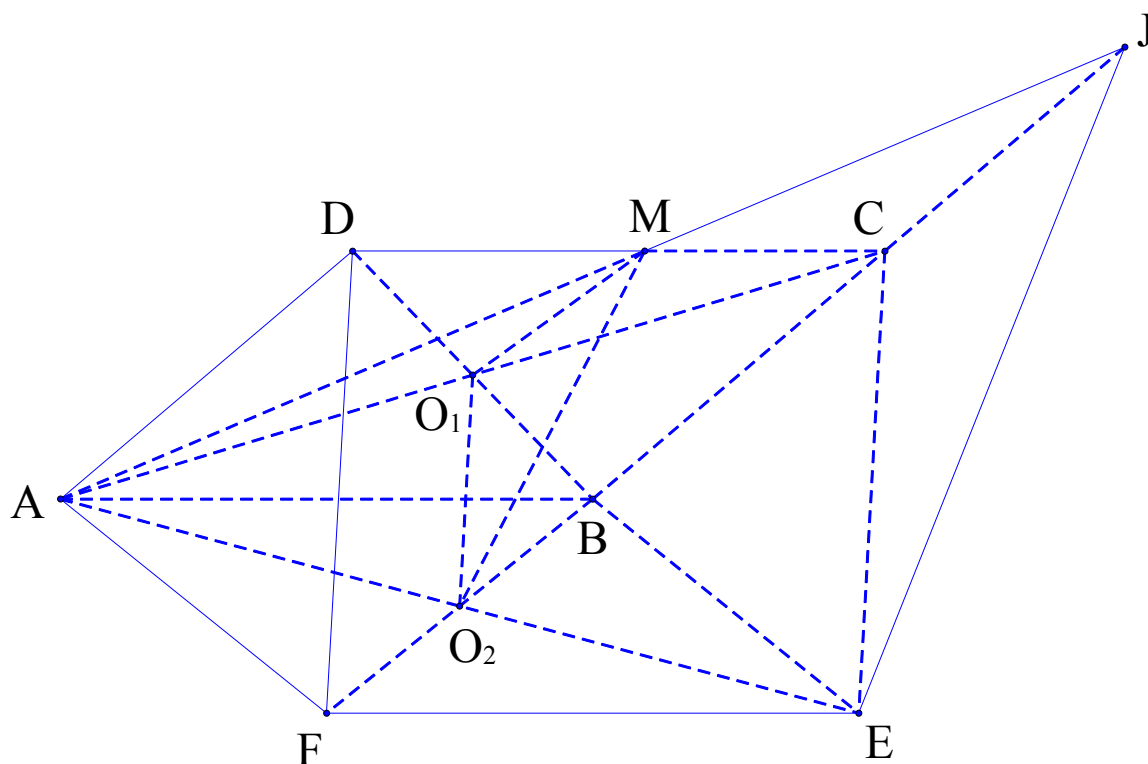
Vì $MN \subset (ABCD)$ nên MN không song song với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow$ câu C *sai*.

Câu 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Chọn khẳng định *sai* trong các khẳng định sau:

- A. MO_2 cắt (BEC) . B. $O_1 O_2$ song song với (BEC) .
 C. $O_1 O_2$ song song với (EFM) . D. $O_1 O_2$ song song với (AFD) .

Lời giải

Chọn A.



Gọi J là giao điểm của AM và BC .

Ta có: $MO_1 \parallel AD \parallel BC \Rightarrow MO_1 \parallel CJ$.

Mà O_1 là trung điểm của AC nên M là trung điểm của AJ .

Do đó $MO_2 \parallel EJ$.

Từ đó suy ra $MO_2 \parallel (BEC)$ (vì dễ nhận thấy MO_2 không nằm trên (BEC)).

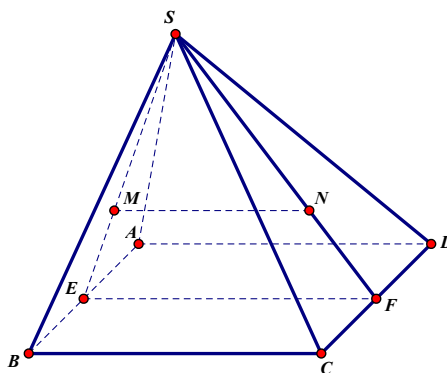
Vậy MO_2 không cắt (BEC) .

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm $\triangle SAB; \triangle SCD$. Khi đó MN song song với mặt phẳng

- A. (SAC) B. (SBD) C. (SAB) D. $(ABCD)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E và F lần lượt là trung điểm AB và CD .

Do M, N là trọng tâm tam giác $SAB; SCD$ nên S, M, E thẳng hàng; S, N, F thẳng hàng.

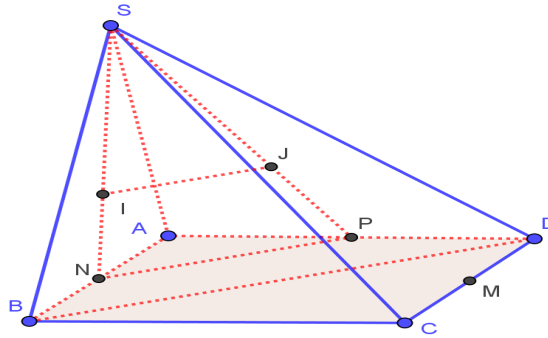
Xét $\triangle SEF$ có: $\frac{SM}{SE} = \frac{2}{3} = \frac{SN}{SF}$ nên theo định lý Ta – let $\Rightarrow MN \parallel EF$.
 Mà $EF \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD . M là trung điểm CD . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $IJ \parallel (SCD)$. B. $IJ \parallel (SBM)$. C. $IJ \parallel (SBC)$. D. $IJ \parallel (SBD)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AD .

Xét $\triangle SNP$ có $\frac{SI}{SN} = \frac{SJ}{SP} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel NP$.

Xét $\triangle ABD$ có M là đường trung bình trong tam giác $\Rightarrow NP \parallel BD$.

Suy ra $IJ \parallel BD$.

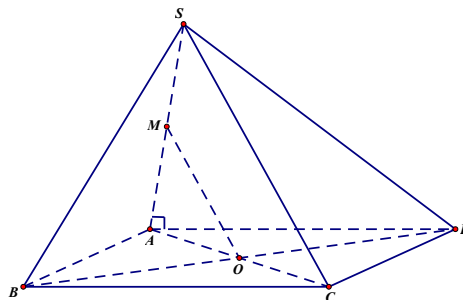
Ta có $\begin{cases} IJ \not\subset (SBD) \\ IJ \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SBD)$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là trung điểm SA . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $OM \parallel (SCD)$. B. $OM \parallel (SBD)$. C. $OM \parallel (SAB)$. D. $OM \parallel (SAD)$.

Lời giải

Chọn A



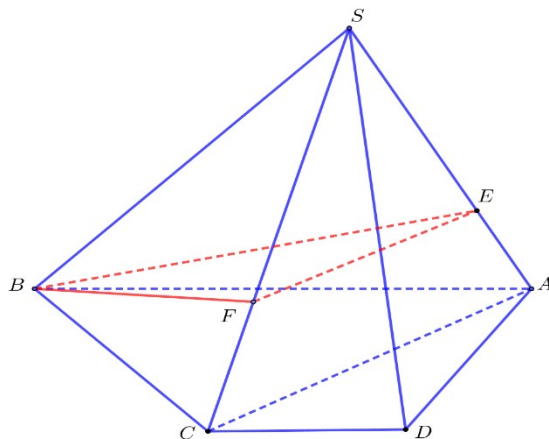
Ta có: M là trung điểm SA ; O là trung điểm $AC \Rightarrow OM$ là đường trung bình $\triangle SAC$.
 $\Rightarrow OM \parallel SC (SC \subset (SCD); OM \not\subset (SCD)) \Rightarrow OM \parallel (SCD)$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Lấy E thuộc cạnh SA , F thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Đường thẳng EF song song với mặt phẳng (SAC) .
- B. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AC .
- C. Đường thẳng AC song song với mặt phẳng (BEF) .
- D. Đường thẳng CD song song với mặt phẳng (BEF) .

Lời giải

Chọn C



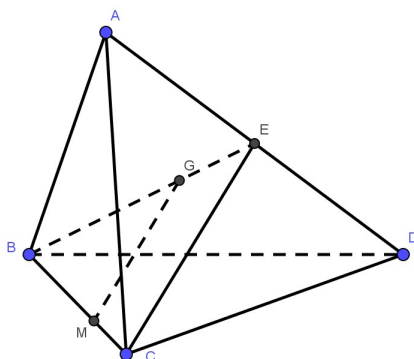
Vì $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ nên đường thẳng $EF \parallel AC$. Mà $EF \subset (BEF)$, $AC \not\subset (BEF)$ nên AC song song với mặt phẳng (BEF) .

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (ACD) .
- B. (BCD) .
- C. (ABD) .
- D. (ABC) .

Lời giải

Chọn A

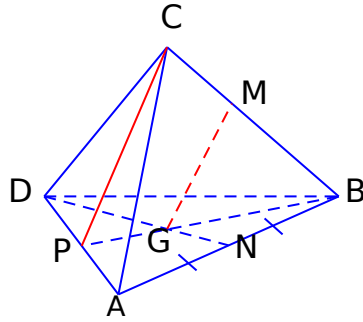


Gọi E là trung điểm AD

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm $\triangle ABD$ và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng

- A. (ACD) .
- B. (ABC) .
- C. (ABD) .
- D. (BCD) .

Lời giải



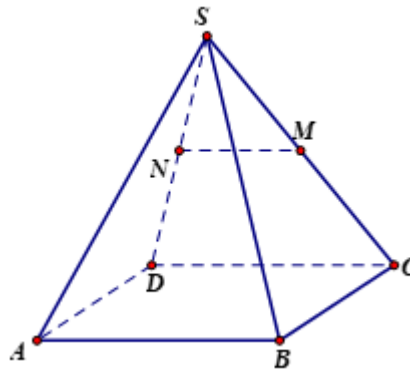
Gọi P là trung điểm AD

Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{BP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MG \parallel CP \Rightarrow MG \parallel (ACD).$

Câu 21. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $MN \parallel (SBD)$ B. $MN \parallel (SAB)$ C. $MN \parallel (SAC)$ D. $MN \parallel (SCD)$

Lời giải

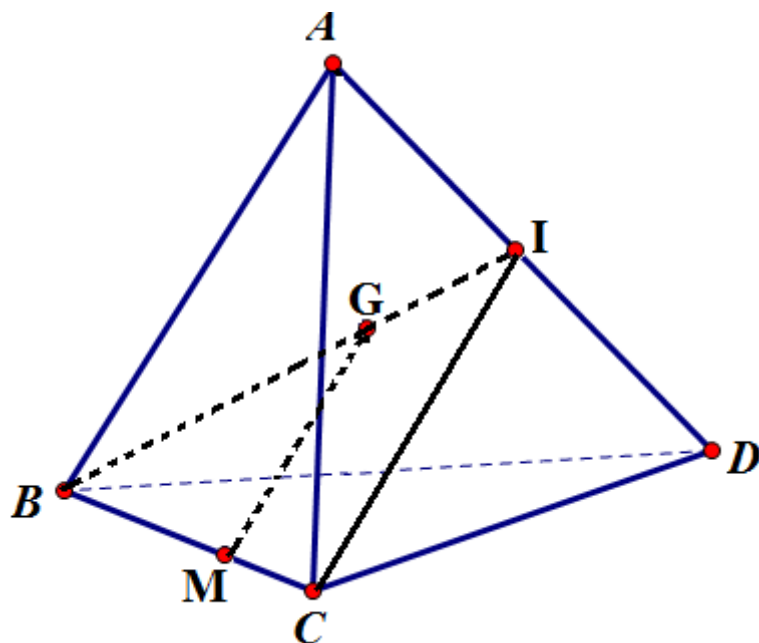


Ta có $MN \parallel CD \Rightarrow MN \parallel AB$
 $\Rightarrow MN \parallel (SAB)$

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. MG song song với (ACD) B. MG song song với (ABD)
 C. MG song song với (ACB) D. MG song song với (BCD)

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AD . Xét tam giác BCI có $\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{BI} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow MG \parallel CI, CI \subset (ACD), MG \not\subset (ACD)$$

$$\Rightarrow MG \parallel (ACD)$$

Câu 23. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC' . Khi đó CB' song song với

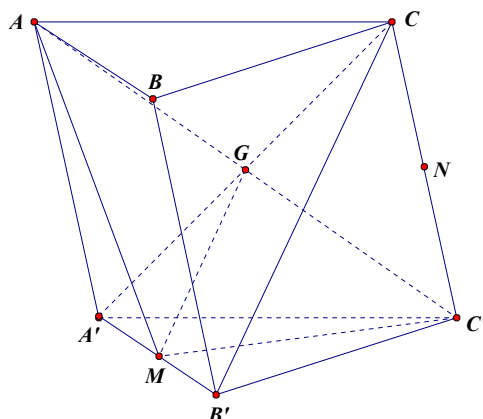
A. $(AC'M)$

B. (BCM)

C. $A'N$

D. AM

Lời giải



- Gọi G là giao điểm của AC' và $A'C \Rightarrow G$ là trung điểm của $A'C \Rightarrow MG$ là đường trung bình của tam giác $A'CB' \Rightarrow CB' \parallel MG \Rightarrow CB' \parallel (AC'M)$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD , $AD = 2BC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . OM song song với mặt phẳng

A. (SAD)

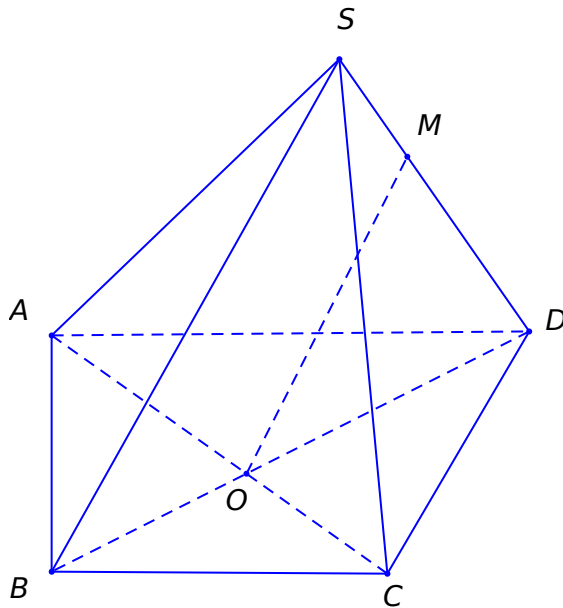
B. (SBD)

C. (SBC)

D. (SAB)

Lời giải

Chọn C



$$AD \parallel BC; AC \cap BD = O \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{2}{3}. \text{ Mặt khác: } \frac{DM}{DS} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{DM}{DS}$$

$$\Rightarrow OM \parallel SB$$

Mà $SB \subset (SBC), OM \not\subset (SBC)$

Nên $OM \parallel (SBC)$

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x (0 < x < a\sqrt{2})$. Khi x thay đổi, đường thẳng MN luôn song song với mặt phẳng cố định nào sau đây?

A. $(CB'D')$

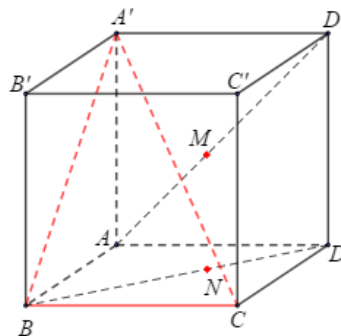
B. $(A'BC)$

C. $(AD'C)$

D. $(BA'C')$

Lời giải

Chọn B



* Sử dụng định lý Ta-lét thuận

Vì $AD \parallel A'D'$ nên tồn tại (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mp $(A'D'CB)$

(Q) là mặt phẳng qua M và song song với mp $(A'D'CB)$

Giả sử (Q) cắt DB tại N'

Theo định lí Ta-lét ta có: $\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB}$ (*)

Mà các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$

Từ (*) ta có $AM = DN' \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$

$(Q) \parallel (A'D'CB)$ suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$ hay $(A'BC)$

* Sử dụng định lí Ta-lét đảo

Từ giả thiết ta có: $\frac{AM}{DN} = \frac{MD'}{NB} = \frac{AD'}{DB}$

Suy ra AD , MN và $D'B$ luôn song song với một mặt phẳng (định lí Ta-lét đảo).

Vậy MN luôn song song với một mặt phẳng (P) , mà (P) song song với AD và $D'B$

Mặt phẳng này chính là mp $(A'D'CB)$ hay $(A'BC)$

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA' ; BB' ; CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}$; $\frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}$; $\frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q . Tính tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$.

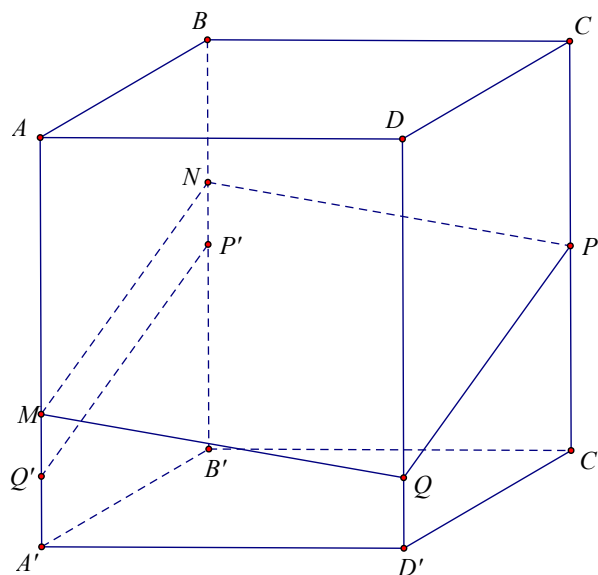
A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải



Gọi độ dài cạnh bên của hình hộp là a .

Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với $(CDD'C')$ là đường thẳng đi qua P và song song với MN (do $MN \parallel (CDD'C')$)

Gọi P' là trung điểm BB' và $Q' \in AA'$; $MN \parallel P'Q'$. Khi đó tứ giác $MNP'Q'$ là hình bình hành

và $NP' = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a \Rightarrow MQ' = \frac{1}{6}a \Rightarrow Q'A' = MA' - MQ' = \frac{1}{6}a$.

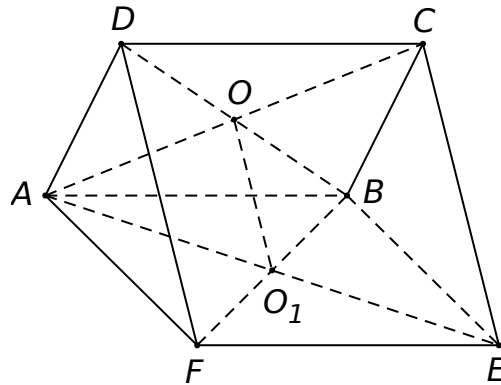
$$\text{Vậy } \frac{A'Q'}{AA'} = \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{6}.$$

Câu 27. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$ M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $OO_1 \parallel (BEC)$.
 B. $OO_1 \parallel (AFD)$.
 C. $OO_1 \parallel (EFM)$.
 D. MO_1 cắt (BEC) .

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE .

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$.

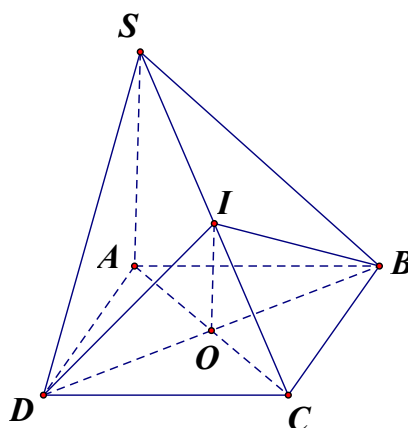
Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.

Vậy $OO_1 \parallel (BEC), OO_1 \parallel (AFD)$ và $OO_1 \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD) .
 B. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.
 C. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB) .
 D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO .

Lời giải



A đúng vì $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAD)$.

C đúng vì $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$.

D đúng vì $(IBD) \cap (SAC) = IO$.

B sai vì mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác IBD .

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

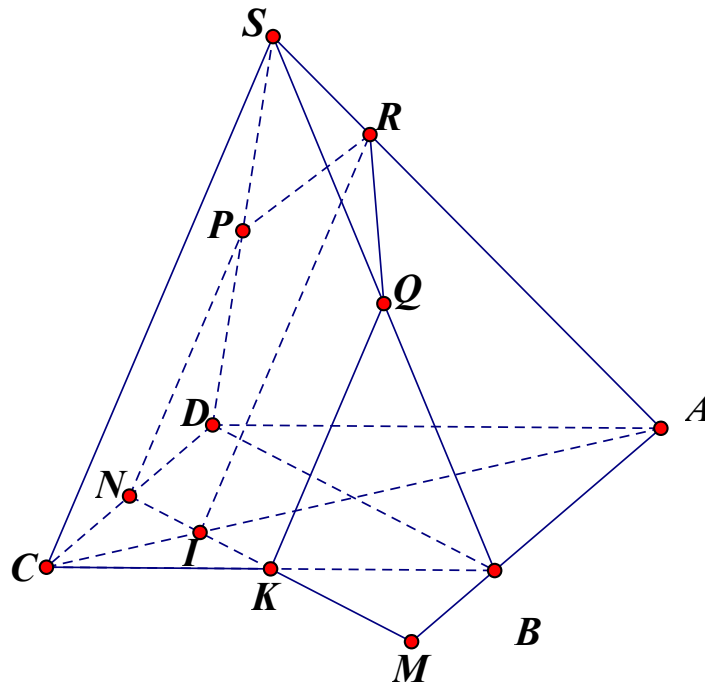
A. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

D. (P) không cắt hình chóp.

Lời giải



Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt BC, CD, CA tại K, N, I .

Trong (SCD) , kẻ đường thẳng qua N và song song với SC cắt SD tại P .

Trong (SCB) , kẻ đường thẳng qua K và song song với SC cắt SB tại Q .

Trong (SAC) , kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại R .

Thiết diện là ngũ giác $KNPRQ$.

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A , M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình vuông

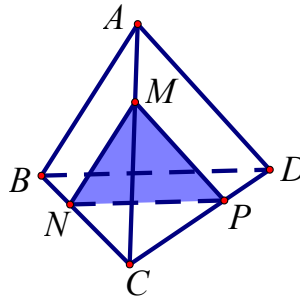
B. Hình chữ nhật

C. Hình tam giác

D. Hình bình hành

Lời giải

Chọn C



Ta có $\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN$ với $MN \parallel AB$ và $N \in BC$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel AD \\ AD \subset (ADC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = MP$ với $MP \parallel AD$ và $P \in CD$.
 $(\alpha) \cap (BCD) = NP$.

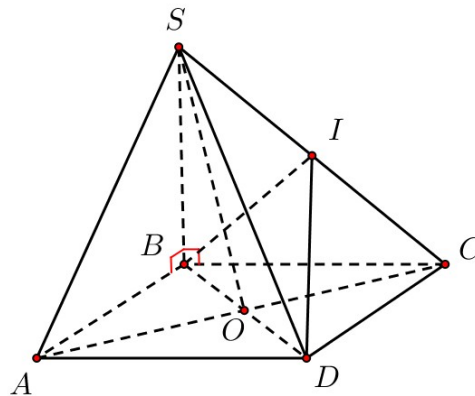
Do đó thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP .

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi I là trung điểm cạnh SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD) .
- B. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB) .
- C. Mặt phẳng (IBD) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến OI .
- D. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC , I là trung điểm SC nên $IO \parallel SA$
 $\Rightarrow IO$ song song với hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến OI .

Mặt phẳng (IBD) cắt (SBC) theo giao tuyến BI , cắt (SCD) theo giao tuyến ID , cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến $BD \Rightarrow$ thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IBD) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác IBD .

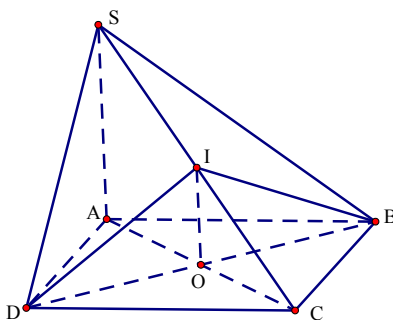
Vậy đáp án D sai.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , I là trung điểm cạnh SC . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $IO \parallel mp(SAB)$.
- B. $IO \parallel mp(SAD)$.
- C. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.
- D. $(IBD) \cap (SAC) = OI$.

Lời giải

Chọn C



Trong mặt phẳng (SAC) có I, O lần lượt là trung điểm của SC, SA nên $IO \parallel SA$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} IO \parallel (SAB) \\ IO \parallel (SAD) \end{cases}$$

Hai mặt phẳng (SAC) và (IBD) có hai điểm chung là O, I nên giao tuyến của hai mặt phẳng là IO .

Thiết diện của mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $(S.ABCD)$ chính là tam giác IBD .

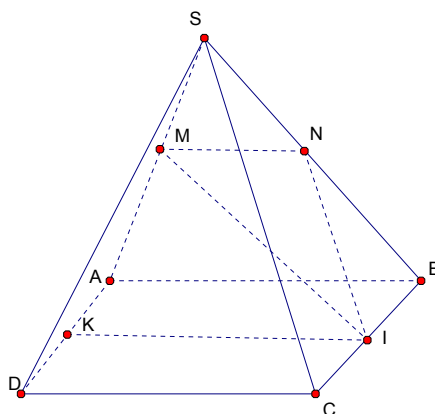
Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và BC . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNI) và hình chóp $S.ABCD$ là:

- A. Tứ giác $MNIK$ với K là điểm bất kỳ trên cạnh AD .
- B. Tam giác MNI .
- C. Hình bình hành $MNIK$ với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.
- D. Hình Thang $MNIK$ với K là một điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$

Lời giải

Chọn D

Hình vẽ:



Ta xét ba mặt phẳng (MNI) , (SAB) , $(ABCD)$ đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến song song.

$$(MNI) \cap (SAB) = MN$$

$$(SAB) \cap (ABCD) = AB$$

$$MN \parallel AB \Rightarrow MN = \frac{1}{2} AB$$

$\Rightarrow (MNI) \cap (ABCD)$ theo giao tuyến là một đường thẳng đi qua I và song song với AB, sẽ cắt AD tại một điểm K: $IK \parallel AB$

Vậy thiết diện cần tìm là: Hình thang MNIK với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.

Câu 34. Gọi (P) là mặt phẳng qua H , song song với CD và SB . Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Ngũ giác.

B. Hình bình hành.

C. Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.

D. Hình thang.

Lời giải

Chọn D

(P) là mặt phẳng qua H , song song với CD và SB nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến qua H song song CD cắt BC, AD lần lượt tại F, E ; (P) cắt (SBC) theo giao tuyến $FI \parallel SB$ ($I \in SC$); (P) cắt (SCD) theo giao tuyến $JI \parallel CD$ ($J \in SD$).

Khi đó thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vì $JI \parallel FE$, $FI \parallel SB$, $JE \parallel SA$ nên FI không song song với JE .

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC . Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình tam giác.

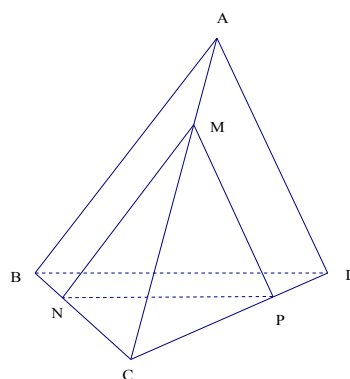
B. Hình bình hành.

C. Hình thang.

D. Hình ngũ giác.

Lời giải

Chọn A



(α) và (ABC) có M chung,

(α) song song với AB , $AB \subset (ABC)$.

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = Mx, Mx \parallel AB$ và $Mx \cap BC = N$.

(α) và (ACD) có M chung,

(α) song song với AD , $AD \subset (ACD)$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = My, My \parallel AD \text{ và } My \cap CD = P.$$

$$\text{Ta có } (\alpha) \cap (ABC) = MN$$

$$(\alpha) \cap (ACD) = MP$$

$$(\alpha) \cap (BCD) = NP$$

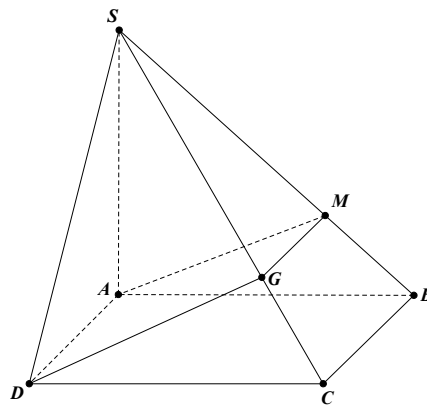
Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là tam giác MNP .

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB . Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

- A. Hình thang. B. Hình chữ nhật. C. Hình bình hành. D. Tam giác.

Lời giải

Chọn A



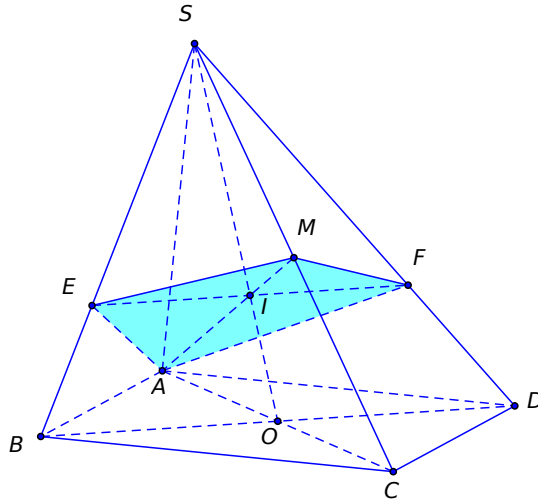
Do $BC \parallel AD$ nên mặt phẳng (ADM) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng MG song song với BC

Thiết diện là hình thang $AMGD$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC , (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) .

- A. $a^2\sqrt{2}$. B. $\frac{4a^2}{3}$. C. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap AM$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF \parallel BD$, khi đó ta có $(AEMF) \equiv (\alpha)$ là mặt phẳng chứa AM và song song với BD . Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AEMF$.

Ta có:
$$\begin{cases} FE \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp AM \end{cases}$$

Mặt khác ta có:

* $AC = 2a = SA$ nên tam giác SAC vuông cân tại A , suy ra $AM = a\sqrt{2}$.

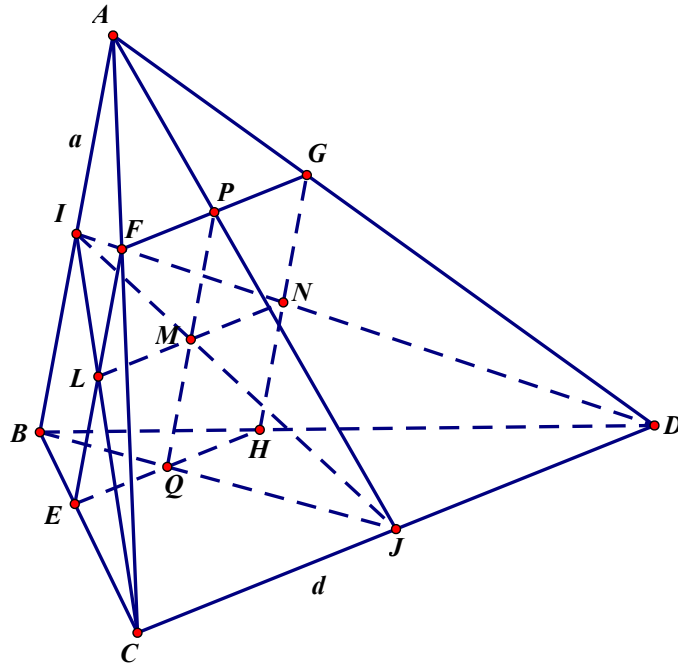
* I là trọng tâm tam giác SAC , mà $EF \parallel BD$ nên tính được $EF = \frac{2}{3}BD = \frac{4a}{3}$.

Tứ giác $AEMF$ có hai đường chéo $FE \perp AM$ nên $S_{AEMF} = \frac{1}{2}FE \cdot AM = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD , giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD . Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) biết $IM = \frac{1}{3}IJ$.

- A. ab . B. $\frac{ab}{9}$. C. $2ab$. D. $\frac{2ab}{9}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ICD) là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N .

$\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (JAB) là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q .

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AB \quad (1)$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow HG \parallel AB \quad (2).$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF \parallel HG \parallel AB \quad (3)$

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow FG \parallel CD \quad (4)$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow EH \parallel CD \quad (5)$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow FG \parallel EH \parallel CD \quad (6).$

Từ (3) và (6), suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB \perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác ICD có: $LN \parallel CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$.

Xét tam giác ICD có: $MN \parallel JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}$.

Do đó $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{1}{3}CD = \frac{b}{3}$.

Tương tự $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$.

Vậy $S_{EFGH} = PQ \cdot LN = \frac{2ab}{9}$.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x \cdot BC$ ($0 < x < 1$). mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 8.

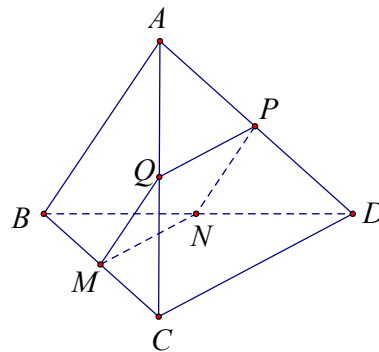
B. 9.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn B



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel PQ \parallel CD \end{cases}$
 $\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ \parallel AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x \cdot AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x \cdot BC \Rightarrow BM = (1 - x)BC$.

Vì $MN \parallel CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1 - x \Rightarrow MN = (1 - x) \cdot CD = 6(1 - x)$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

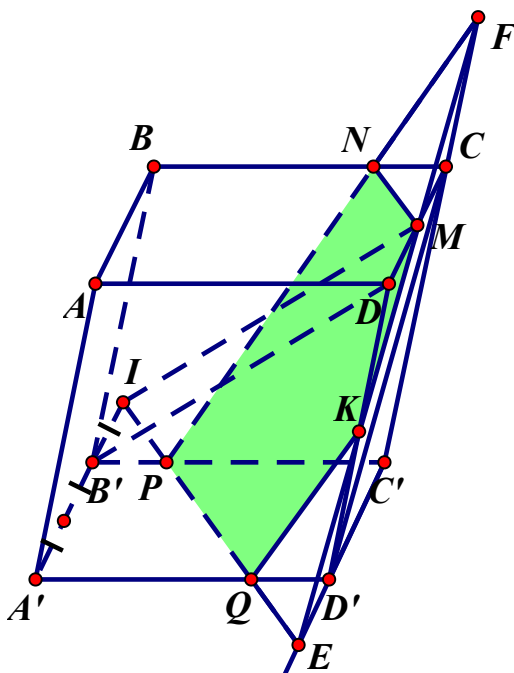
$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 6(1 - x) \cdot 6x = 36x(1 - x) \leq 36 \left(\frac{x + 1 - x}{2} \right)^2 = 9$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC .

- Câu 40.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm CD , (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với $B'D$ và CD' . Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì?
- A. Ngũ giác. B. Tứ giác. C. Tam giác. D. Lục giác.

Lời giải



* Gọi I là điểm thuộc $A'B'$ sao cho $\frac{A'I}{A'B'} = \frac{3}{2}$, gọi K là trung điểm của DD' . Ta có:

$$\begin{cases} MI \parallel DB' \\ MK \parallel CD' \end{cases} \Rightarrow (P) \equiv (MIK)$$

* Gọi $E = MK \cap C'D'$, $F = MK \cap CC'$.

* Gọi $P = IE \cap B'C'$, $Q = IE \cap A'D'$, $N = PF \cap BC$.

* Thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (P) là ngũ giác $MNPQK$.

- Câu 41.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB , CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

- A. $\frac{31}{7}$. B. $\frac{18}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $\frac{15}{7}$.

Lời giải

Giả sử một mặt phẳng song song với AB và CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình

$$\begin{cases} MK \parallel AB \parallel IN \\ MN \parallel CD \parallel IK \\ MK = KI \end{cases}$$

thoi $MNIK$ như hình vẽ trên. Khi đó ta có:

Cách 1:

$$\begin{cases} \frac{MK}{AB} = \frac{CK}{AC} \\ \frac{KI}{CD} = \frac{AK}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MK}{6} = \frac{AC - AK}{AC} \\ \frac{KI}{8} = \frac{AK}{AC} \end{cases}$$

Theo định lí Ta – lét ta có:

$$\Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{KI}{8} \Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{MK}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{24}MK = 1 \Leftrightarrow MK = \frac{24}{7}$$

Vậy hình thoi có cạnh bằng $\frac{24}{7}$.

Cách 2:

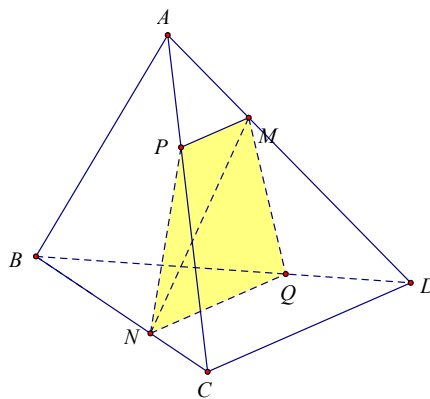
$$\text{Theo định lí Ta-lét ta có: } \begin{cases} \frac{MK}{AB} = \frac{CK}{AC} \\ \frac{KI}{CD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{MK}{AB} + \frac{MK}{CD} = \frac{CK}{AC} + \frac{AK}{AC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MK}{6} + \frac{MK}{8} = \frac{AK + KC}{AC} \Rightarrow \frac{7MK}{24} = \frac{AC}{AC} = 1 \Rightarrow MK = \frac{24}{7}$$

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\frac{MA}{AD} = \frac{NC}{CB} = \frac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD . Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là:

- A. một tam giác.
- B. một hình bình hành.
- C. một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ
- D. một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ACD) , từ M kẻ $MP \parallel CD$ ($P \in AC$).

Trong mặt phẳng (BCD) , từ N kẻ $NQ \parallel CD$ ($Q \in BD$).

Khi đó ta có $MPNQ$ là thiết diện của mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} MP \parallel CD \\ MP = \frac{1}{3}CD \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} NQ \parallel CD \\ NQ = \frac{2}{3}CD \end{cases} \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} NQ \parallel MP \\ MP = \frac{1}{2}NQ \end{cases}.$

Vậy $MPNQ$ là hình thang có đáy lớn bằng hai lần đáy nhỏ.

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (α) qua G , (α) song song với AB và CD . (α) cắt trung tuyến AM của tam giác ACD tại K . Chọn khẳng định đúng?

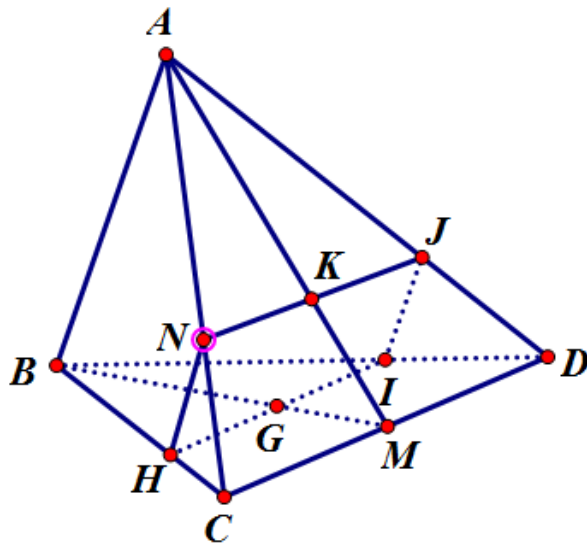
A. (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là một hình tam giác.

B. $AK = \frac{2}{3}AM$

C. $AK = \frac{1}{3}AM$

D. Giao tuyến của (α) và (CBD) cắt CD .

Lời giải



Chọn B

Xác định thiết diện:

(α) qua G , song song với $CD \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = HI$ (giao tuyến đi qua G và song song CD ,
 $H \in BC, I \in CD$)

$(\alpha) \cap (ABD) = IJ$ ($IJ \parallel AB$)

Tương tự ta được

$(\alpha) \cap (ACD) = JN$ ($JN \parallel CD$)

$(\alpha) \cap (ABC) = HN$

Vậy (α) là $(HNJI)$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD mà $IG \parallel CD$ nên $\frac{BG}{BM} = \frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$

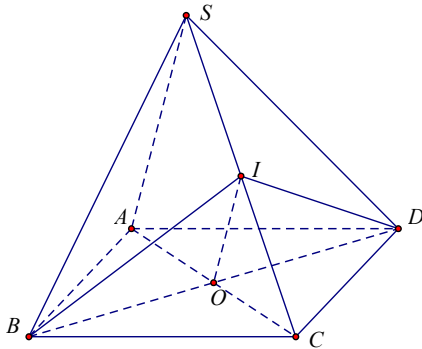
Mặt khác IJ song song AB nên $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$

Lại có JK song song DM (vì $K \in AM, M \in CD$) nên $\frac{AK}{AM} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$. Vậy $AK = \frac{2}{3}AM$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) qua BD và song song với SA . Khi đó mặt phẳng (P) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một hình
A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và $BD \Rightarrow I$ là trung điểm của AC và BD

$$\left\{ \begin{array}{l} (P) \parallel SA \\ BD \subset (P) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \cap (SAC) = OI$$

Khi đó $OI \parallel SA$ và I là trung điểm của SC

$$(P) \cap (SBC) = BI \quad \text{và} \quad (P) \cap (SCD) = ID$$

Vậy thiết diện là tam giác BDI

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB . Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Tam giác

Lời giải

Chọn B

Ta có $(IB'D')$ và $ABCD$ có I là một điểm chung.

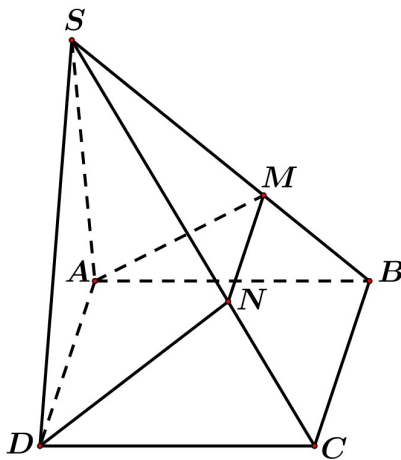
$$\left. \begin{array}{l} B'D' \subset (IBD) \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow (IBD) \cap (ABCD) = IJ \parallel BD \quad (J \in AD)$$

Thiết diện là hình thang $IJD'B'$.

- Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là
- A. Hình bình hành. B. Tam giác. C. Hình chữ nhật. D. Hình thang.

Lời giải

Chọn D



Ta có M là một điểm thuộc đoạn SB với M khác S và B .

$$\begin{cases} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx \parallel BC \parallel AD$$

Suy ra

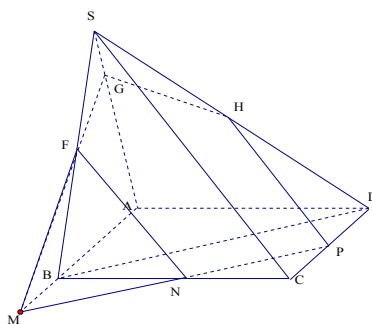
Gọi $N = Mx \cap SC$ thì (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AMND$. Vì $MN \parallel AD$ và MN với AD không bằng nhau nên tứ giác $AMND$ là hình thang.

- Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\vec{MA} = 3\vec{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (P) không cắt hình chóp.
- B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
- C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
- D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải

Chọn D



+ Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD

$$(P) \cap (ABCD) = Mx \parallel BD, Mx \cap BC = N, Mx \cap CD = P.$$

$$(P) \cap (SBC) = Ny \parallel SC, Ny \cap SB = F.$$

$$(P) \cap (SCD) = Pt \parallel SC, Pt \cap SD = H.$$

$$\text{Trong } (SAB): MF \cap SA = G$$

$$+ (P) \cap (ABCD) = NP.$$

$$(P) \cap (SCD) = PH.$$

$$(P) \cap (SAD) = HG.$$

$$(P) \cap (SAB) = GF.$$

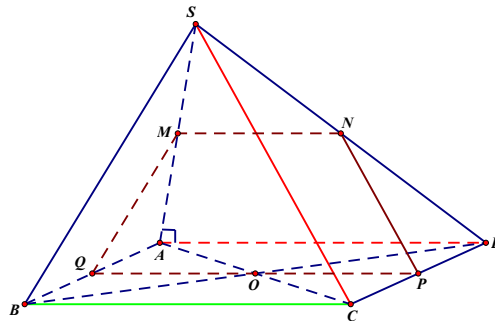
$$(P) \cap (SBC) = FN.$$

Vậy (P) cắt hình chóp theo thiết diện là ngũ giác $NPHGF$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là trung điểm SA . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , song song với SC và AD . Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?
A. Hình thang. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MN \parallel AD (N \in SD) \quad (1)$$

$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SCD) \\ (\alpha) \parallel SC; SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = NP \parallel SC (P \in CD)$$

$$\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ \parallel AD (Q \in AB) \quad (2)$$

$$(\alpha) \cap (SAB) = MQ$$

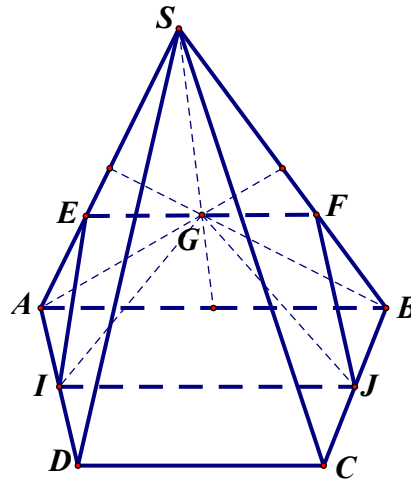
Từ (1) (2) suy ra $MN \parallel PQ \parallel AD \Rightarrow$ thiết diện $MNPQ$ là hình thang.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB . Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AB = 3CD$. B. $AB = \frac{1}{3}CD$. C. $AB = \frac{3}{2}CD$. D. $AB = \frac{2}{3}CD$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết suy ra $IJ \parallel AB \parallel CD$, $IJ = \frac{AB + CD}{2}$.

Xét 2 mặt phẳng $(IJG), (SAB)$ có G là điểm chung $\Rightarrow$ giao tuyến của chúng là đường thẳng EF đi qua G , $EF \parallel AB \parallel CD \parallel IJ$ với $E \in SA$, $F \in SB$.

Nối các đoạn thẳng EI, FJ ta được thiết diện là tứ giác $EFJI$, là hình thang vì $EF \parallel IJ$.

Vì G là trọng tâm của tam giác SAB và $EF \parallel AB$ nên theo định lí Ta – lét ta có: $EF = \frac{2}{3}AB$

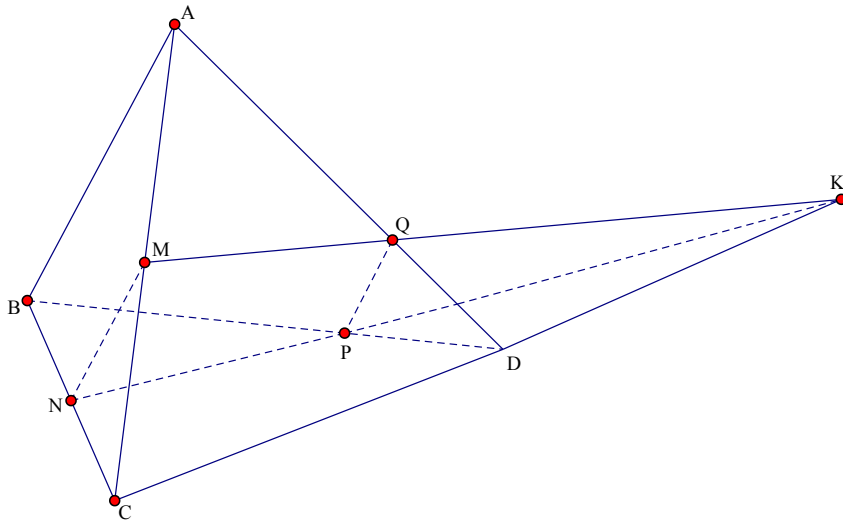
Nên để thiết diện là hình bình hành ta cần: $EF = IJ \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{3} \Leftrightarrow AB = 3CD$

Câu 50. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB ; P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là:

- A. $\frac{5a^2\sqrt{457}}{2}$. B. $\frac{5a^2\sqrt{457}}{12}$. C. $\frac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. D. $\frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

Lời giải.

Chọn B



Ta có $AB \parallel MN$ (Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC$),
 $AB \not\subset (MNP), MN \subset (MNP) \Rightarrow AB \parallel (MNP)$.

Lại có $AB \subset (ABD)$, do đó $(MNP) \cap (ABD) = PQ (Q \in AD)$ sao cho: $PQ \parallel AB \parallel MN$
 $(MNP) \cap (ABC) = MN, (MNP) \cap (BCD) = NP, (MNP) \cap (ACD) = MQ$.

Vậy thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là hình thang $MNPQ$ (vì $MN \parallel PQ$)
Mặt khác các tam giác ACD, BCD đều và bằng nhau nên $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.
 $MN = \frac{1}{2} AB = 3a; PQ = \frac{1}{3} AB = 2a$. Ta có $\frac{PQ}{MN} = \frac{2}{3}, PQ \parallel MN \Rightarrow \frac{KP}{KN} = \frac{2}{3}$ mà N là trung điểm
của $CB \Rightarrow P$ là trọng tâm tam giác $BCK \Rightarrow D$ là trung điểm của $CK \Rightarrow CK = 12a$.

$$NP = \frac{1}{3} \sqrt{CK^2 + CN^2 - 2CK \cdot CN \cdot \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{117}}{3}.$$

Chiều cao của hình thang $MNPQ$ là $h = \sqrt{NP^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2} \right)^2} = \frac{a\sqrt{457}}{6}$.

$$S_m = \frac{MN + PQ}{2} h = \frac{5a^2 \sqrt{457}}{12}.$$

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), cạnh $AB = 3a, AD = CD = a$.
Tam giác SAB cân tại $S, SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD
theo thứ tự tại M, N, P, Q . Đặt $AM = x (0 < x < a)$. Gọi x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được
đường tròn, bán kính đường tròn đó là

A. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

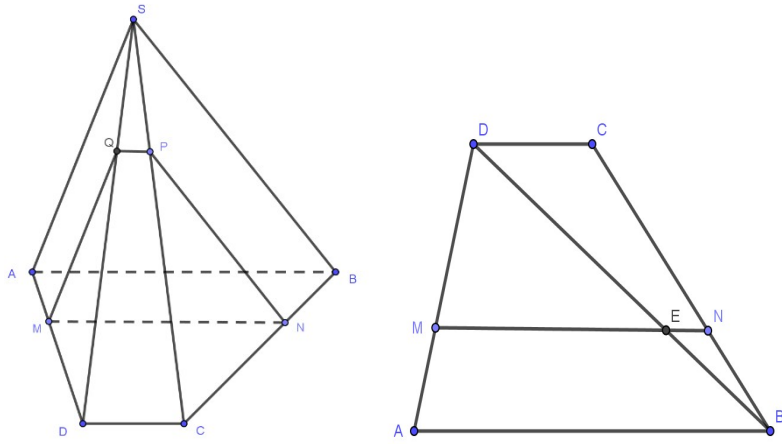
B. $\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. a .

Lời giải

Chọn B



$$(P) \parallel SA \Rightarrow MQ \parallel SA, (P) \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AB;$$

$$(P) \parallel AB \Rightarrow (P) \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$$

Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

$$(P) \parallel SA; (P) \parallel AB \Rightarrow (P) \parallel (SAB) \Rightarrow PN \parallel SB \Rightarrow \frac{PN}{SB} = \frac{CN}{CB}$$

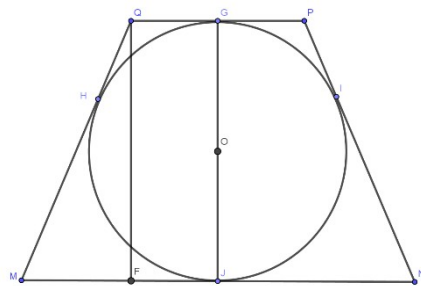
$$MQ \parallel SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}$$

$$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow \frac{PN}{SB} = \frac{QM}{SA} \Rightarrow PN = QM \Rightarrow MNPQ \text{ là hình thang cân.}$$

$$MQ \parallel SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x)$$

$$PQ \parallel CD \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$$

$$\text{Gọi } E = MN \cap BD \Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow ME = 3(a-x); \frac{EN}{CD} = \frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EN = x \\ \Rightarrow MN = ME + EN = 3a - 2x$$



Hình thang cân $MNPQ$ có đường tròn nội tiếp $\Rightarrow MN + PQ = MQ + NP$ (Tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow 3a - 2x + x = 4(a - x) \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$MN = \frac{7a}{3}; PQ = \frac{a}{3}; QM = \frac{4a}{3} \Rightarrow MF = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}PQ = a$$

$$\Rightarrow QF = \sqrt{MQ^2 - MF^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} - a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp hình thang $MNPQ$ là $R = \frac{1}{2}QF = \frac{a\sqrt{7}}{6}$

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , I là trung điểm của AC , J là một điểm trên cạnh AD sao cho $AJ = 2JD$. (P) là mặt phẳng chứa IJ và song song với AB . Tính diện tích thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) .

A. $\frac{3a^2\sqrt{51}}{144}$

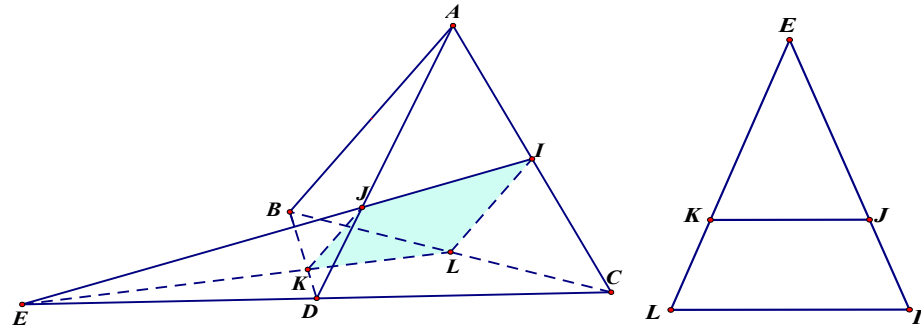
B. $\frac{3a^2\sqrt{31}}{144}$

C. $\frac{a^2\sqrt{31}}{144}$

D. $\frac{5a^2\sqrt{51}}{144}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $K = (P) \cap BD$, $L = (P) \cap BC$, $E = (P) \cap CD$.

Vì $(P) \parallel AB$ nên $IL \parallel AB$, $JK \parallel AB$. Do đó thiết diện là hình thang $IJKL$ và L là trung điểm

cạnh BC , nên ta có $\frac{KD}{KB} = \frac{JD}{JA} = \frac{1}{2}$.

Xét tam giác ACD có I, J, E thẳng hàng. Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt ta có:

$$\frac{ED}{EC} \cdot \frac{IC}{IA} \cdot \frac{JA}{JD} = 1 \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow D \text{ là trung điểm } EC.$$

Dễ thấy hai tam giác ECI và ECL bằng nhau theo trường hợp c-g-c.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ICE ta có:

$$EI^2 = EC^2 + IC^2 - 2EC \cdot IC \cdot \cos 60^\circ = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow EI = EL = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Áp dụng công thức Hê-rông cho tam giác ELI ta có: $S_{ELI} = \sqrt{p(p-x)^2(p-y)} = \frac{\sqrt{51}}{16}a^2$

Với $p = \frac{EI + EL + IL}{2} = \frac{2\sqrt{13} + 1}{4}a$, $x = EI = EL = \frac{\sqrt{13}}{2}a$, $y = IL = \frac{a}{2}$.

Hai tam giác ELI và tam giác EKJ đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$ nên

Do đó: $S_{IJKL} = S_{ELI} - S_{EKJ} = S_{ELI} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ELI} = \frac{5\sqrt{51}}{144}a^2$

