Olympic- 1993

1993.1.1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau:

$$f = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|,$$

trong hình lập phương đơn vị $\{x \in R^4 \,\big|\, |x_k| \le 1, 1 \le k \le 4\}$.

1993.1.2. Tìm nghiệm phương trình vi phân ma trận $\frac{dX}{dt} = AX + XB$, với A,B là các hằng số của ma trận bậc n, thoả mãn điều kiện $X(0) = E$.

1993.2. Trong ma trận vuông A bậc 2n các phần tử của đường chéo chính bằng 0, còn các phần tử còn lại bằng ± 1. Chứng minh rằng: $\det A \neq 0$.

1993.3. Các hạt chuyển động theo đường thẳng từ điểm A đến điểm B không thay đổi hướng. Khoảng cách AB=1, thời gian chuyển động bằng 1, tại thời điểm đầu và thời điểm cuối vận tốc chuyển động bằng 0. Chứng minh rằng tại thời điểm nào đó độ lớn gia tốc tuyệt đối của hạt bằng 4.

1993.4.1. Tồn tại hay không hàm liên tục f: $R \to R$, nhận giá trị hữu tỷ tại những điểm vô tỷ và giá trị vô tỷ tại các điểm hữu tỷ?

1993.4.2. Chứng minh rằng hàm số

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos kx,$$

với $|a_0| < 1$, nhận các giá trị dương cũng như các giá trị âm.

1993.5.1. Cho A và B là các tập lồi đóng trong mặt phẳng. Từ đó có suy ra được rằng tổng của chúng

$$A + B = \{x \in R^2 \,\big|\, x = a + b, a \in A, b \in B\},$$

cũng là tâp đóng hay không?

1993.5.2. Biết rằng tất cả các nghiệm của đa thức

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n.$$

với các hệ số phức là các nghiệm ảo . Chứng minh rằng với giá trị thực bất kỳ đẳng thức sau thoả mãn

$$\left| \frac{2xP'(x)}{P(x)} - n \right| \le n.$$

1993.6.1. Có thể đặt số π như

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{k_n} - \sqrt{m_n} \right),$$

với $\{k_n\}$ và $\{m_n\}$ là các dãy số tự nhiên hay không?

Olympic- 1994.

1994.1. 1994 đường tròn chia mặt phẳng ra thành các miền, biên của chúng là các cung của các đường tròn. Cần bao nhiêu màu để tô bức tranh hình học này?

1994.2. Một hình chữ nhật đơn vị bị bỏ đi môt tập đếm được các điểm có phải luôn luôn là tập liên thông hay không?

1994.3. Tìm tất cả những hàm liên tục f : $R \to R$, thoả mãn phương trình

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

1994.4. Trong mặt phẳng cho các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, không có bất kỳ 3 điểm nào trong chúng nằm trên cùng một đường thẳng. Vẽ hai đường tròn đồng tâm: một qua các điểm A_1, A_2, A_3, một qua điểm A_4. Ký hiệu $k(A_1, A_2, A_3, A_4)$ là tích các diện tích của tam giác $A_1A_2A_3$ và vòng tròn nhận được. Chứng minh rằng độ lớn k không phụ thuộc vào việc đánh số các điểm:

$$k(A_1, A_2, A_3, A_4) = k(A_2, A_3, A_4, A_1) = k(A_3, A_4, A_1, A_2) = k(A_4, A_1, A_2, A_3).$$

1994.5.1. Cho $C(\alpha)$ - hệ số của x^{1994} trong khai triển theo công thức Maclaurin hàm $(1+x)^{\alpha}$. Tính

$$\int_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1} + \ldots + \frac{1}{y+1994}\right)dy.$$

1994.5.2. Cho rằng $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ là hệ trực chuẩn các hàm liên tục trong đoạn [0,1]. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một hàm $\varphi_i(i=1,\ldots,n)$ để bất đẳng thức sau đúng:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi_i(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{n}.$$

1994.6.1. Trong mặt phẳng cho parabol. Làm cách nào dựng trục của nó bằng thước thẳng và compac?

1994.6.2. Chứng minh rằng phương trình vi phân sau:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+1}\left(x^{k-1}y\right)^{(k)} = 0$$

chuyển đến được phương trình vi phân tuyến tính nhờ phép đặt $t = x^{-1}$ và chỉ ra phương trình này.

Olympic- 1995.

1995.1.1. Có thể hay không đồ thị hàm liên tục f : $R \to R$ cắt vô số lần mỗi đường xiên?

1995.1.2. Tồn tại hay không hàm f liên tục với x>1 thoả mãn phương trình:

$$(x^2-x)\left(f(x^2)+f(x)\right)=1?$$

1995.2. Tồn tại hay không hàm vi phân liên tục f thoả mãn điều kiện:

$$\left|f(x)\right|<2\ ,\ f(x)f'(x)\geq \sin x,\ \forall x\in R\,?$$

1995.3. Cho rằng $f_1,\ldots,f_n$ là hệ độc lập tuyến tính các hàm vi phân liên tục trong đoạn [0,1]. Chứng minh rằng trong số các đạo hàm $f_1',\ldots,f'$ tìm được n-1 các hàm độc lập tuyến tính.

1995.4. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)^n.$$

1995.5. Chứng minh rằng khi $x^2+y^2+z^2=1$ thì bất đẳng thức sau đúng:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}<1.$$

1995.6.1. Xác định tổng các tập hợp trong mặt phẳng Eclic:

$$A+B=\left\{x\in R^2\middle|\,x=a+b, a\in A, b\in B\right\}.$$

Cho rằng $A=B_r(a)\cap B_r(-a)$ với $B_r(a)=\left\{x\in R^2\middle|\,\|x-a\|\leq r\right\}$ là cung bán kính r>0 có tâm tại điểm a, $\|a\|<r$. Chứng minh rằng tìm được các điểm b_1 và b_2 sao cho:

$$A+\left(B_r(b_1)\cap B_r(b_2)\right)=B_r(0)$$

1995.6.2. Đối với tập hợp các phép toán cộng và nhân trong mặt phẳng phức xác định

$$A+B=\left\{z\in C\middle|\,z=a+b, a\in A, b\in B\right\},$$

$$A.B=\left\{z\in C\middle|\,z=ab, a\in A, b\in B\right\}.$$

cho rằng $A=\left\{z\middle|\ |z|=\dfrac{1}{1995}\right\}$. Tìm ít nhất một nghiệm phương trình A+X=A.X, thoả mãn điền kiện $0\notin X$.

Olympic- 1996

1996.1. Cho rằng a,b,c là các khoảng cách giữa 3 điểm của mạng số nguyên nằm trong đường tròn bán kính R. Chứng minh rằng $abc\geq 2R$.

1996.2. Chứng minh rằng đối với số tự nhiên bất kỳ n bất đẳng thức sau đúng

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}},$$

với $\{x\}$ là phần thập phân của số x.

1996.3.1. Cho $f \in C^{n+1}(R)$ và

$$\ln\left(\frac{f(b)+f'(b)+...+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+...+f^{(n)}(a)}\right) = b-a,$$

với a<b. Chứng minh rằng tìm được $c \in (a,b)$ sao cho

$$f^{(n+1)}(c) = f(c).$$

1996.3.2. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, nếu $a_1 = a > 0$, $a_2 = a^2$, $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ với $n \geq 3$.

1996.4.1. Chứng minh rằng với $n \geq 2$ tất cả các nghiệm dương của đa thức

$$P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

nằm trong khoảng $\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}, 2-\frac{1}{2^n}\right)$.

1996.4.2. Cho x, $\varphi_1,...,\varphi_n$ là các phần tử của không gian eclic, $c_1,...,c_n$ là các số thực tuỳ ý. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x,\varphi_i)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^2 (x,x)\left(\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|(\varphi_i,\varphi_j)\right|\right).$$

1996.5.1. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận không suy biến bậc n, $a_{ij} > 0 \,\forall i,j$. Chứng minh rằng $z_n \leq n^2 - 2n$, với z_n là số các phần tử khác 0 trong ma trận A^{-1}.

1996.5.2. Cho rằng phổ ma trận bậc n

$$A(x) = B(x) + \frac{C}{x}$$

bị giới hạn trong khoảng $x \in (0,1)$, ma trân C là ma trận hằng, còn các phần tử của ma trận B(x) bị giới hạn trong đoạn [0,1]. Chứng minh rằng ma trận C tích luỹ linh (tức là $\exists k \in N : C^k = 0$).

1996.6. Cho a,b,c là các số nguyên không âm và $ab \geq c^2$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n và các số nguyên $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a,\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c.$$

Olympic-1997

1997.1.1. Cho $a_1,...,a_n$ là các số dương. Chứng minh rằng đa thức

$$x^n - a_1x^{n-1} - ... - a_n$$

Có chính xác 1 nghiệm dương.

1997.1.2. Chứng minh rằng :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(n^2+x)^2}=\frac{1}{2}.$$

1997.2. Tìm thể tích tiết diện hinh lập phương bốn chiều

$$\left\{x\in R^4 \,\middle|\, 0\le x_k\le 1, k\in\overline{1,4}\right\}$$

bởi mặt phẳng hyperbol $x_1+x_2+x_3+x_4=2$.

1997.3.1. Chứng minh rằng $\forall\varepsilon>0$ tìm được số tự nhiên n và các số $a_1,...,a_n$ sao cho

$$\max_{x\in[0,1]}\left|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx^{2k+1}\right|<\varepsilon.$$

1997.3.2. Có phải tập hợp liên thông giới hạn trong mặt phẳng luôn luôn là tập đo được?

1997.4. Các đường tiếp tuyến với parabol $y^2=2px$ tại các điểm A, B và C tạo thành tam giác KLM. Chứng minh rằng $S_{KLM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.

1997.5. Cho $f\in C^1([0,1])$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le\int_0^1|f(x)|dx+\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx.$$

1997.6. Cho A(x) là ma trận vuông bậc 2n+1, xác định trong khoảng (0,1). Biết rằng detA(x)=1 đối với tất cả các số x và đối với ma trận hằng bất kỳ B tồn tại giới hạn $\lim_{x\to+0}A(x)BA^{-1}(x)$. Chứng minh rằng tồn tại các giới hạn

$$\lim_{x\to+0}A(x) \text{ và } \lim_{x\to+0}A^{-1}(x).$$

Olympic 1998

1998.1. Cho ánh xạ song ánh f: $N \to N$. Chứng minh rằng tìm được số tự nhiên a,b và c sao cho a<b<c và f(a)+f(b)=2f(b).

1998.2. Cho các số phức a,b và c sao cho tất cả các nghiệm của phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ nằm trong đường tròn $|z|=1$. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình $z^3+|a|z^2+|b|z+c=0$ cũng nằm trong đường tròn $|z|=1$.

1998.3.1. Tồn tại hay không biến đổi trực chuẩn mặt phẳng R^2 và tập giới hạn $S \subset R^2$ sao cho $f(S) \subset S$, nhưng $f(S) \neq S$?

1998.3.2. Cho A là ma trận 2×2 thực không suy biến, trong nó có các giá trị đặc biệt $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Chứng minh rằng đối với bất kỳ $\varepsilon>0$ tìm được ma trận S 2×2 và số $\delta \in [0,\varepsilon]$ sao cho

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda & \delta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

1998.4. (i) Chứng minh rằng tồn tại đa thức P(x) sao cho đối với số tự nhiên bất kỳ n

$$\int_{n-1}^{n} P(x)dx=n^4$$

(ii) Tìm tổng $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

1998.5. Dãy $\{x_n\}$ cho một cách truy toán: x_1 là số nào đó trong khoảng (0,1), còn $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. Tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

1998.6. Cho $e_1,...,e_n$ là cơ sở trực chuẩn trong R^n, còn $a_1,...,a_n$ là các vector độ dài đơn vị. Chứng minh rằng nếu

$$(a_1,e_1)+...+(a_n,e_n)>\sqrt{n(n-1)},$$

thì các vector $a_1,...,a_n$ độc lập tuyến tính.

Olympic- 1999

1999.1. Chứng minh rằng tất cả ánh xạ liên tục biến đường tròn thành đường thẳng sẽ biến cặp điểm nào đó của các điểm đối xứng xuyên tâm thành một điểm.

1999.2.1. Cho

$$M=\left(f\in C([0,\pi]) \middle| \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=1\right).$$

Tìm $\min\limits_{f\in M}\int_0^{\pi} f^2(x)dx$.

1999.2.2. Cho phương trình $y' = xy + f(x)$, với f: $R \to R$ là hàm liên tục giới hạn. Tìm điều kiện cần và đủ thoả mãn phương trình để phương trình có nghiệm $y(x) \to 0$ khi $x \to \infty$.

1999.3. Cho $a_1,...,a_n$ là các số dương và thoả mãn bất đẳng thức $a_1 + ... + a_n < 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(a_1 + ... + a_n)(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}{a_1a_2...a_n(1-a_1-...-a_n)} \ge n^{n+1}.$$

1999.4. Chứng minh rằng với số tự nhiên n bất kỳ tồn tại tiết diện của hình lập phương n chiều $\left\{x \in R^n \middle| \ |x_k| \le 1, k = 1,...,n\right\}$ với mặt phẳng hai chiều là tam giác 2n chiều.

1999.5. Tồn tại hay không hàm f(x), liên tục trong bán trục $(1,\infty)$ sao cho

$$\int_x^{x^2} f(t)dt = 1, \qquad \forall x \in (1,\infty)\,?$$

1999.6. Tìm ma trận bậc ba

$$T(x) = T_0 + \frac{1}{x}T_1 + ... + \frac{1}{x^n}T_n$$

(T_k là ma trận không đổi) sao cho với $x \ne 0$ thoả mãn đẳng thức detT(x)=1, còn ma trận

$$A(x) = T(x).\begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} & e^{2x} & \frac{\sin x}{x^2} \\ x^3 & \frac{\ln(x+1)}{x} & \frac{\cos x}{x^2} \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

có thể xác định đến 0 sao cho sau đó nó trở thành ma trận không suy biến liên tục trong lân cận nào đó của điểm 0.

Olympic-2000

2000.1. Cho họ $F = \{A \subset N \big| \, |A| < \infty\}$ sao cho $A \cap B \ne \varnothing$ đối với bất kỳ $A, B \in F$. Có thể luôn luôn tìm được tập hợp hữu hạn $X \subset N$, sao cho $A \cap B \cap X \ne \varnothing$ đối với bất kỳ $A, B \in F$?

2000.2. Cho $f \in C([0,1])$ và đối với bất kỳ $x, y \in [0,1]$ thoả mãn bất đẳng thức $xf(x) + yf(x) \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^1 f(x)dx \le \frac{\pi}{4}\ .$$

2000.3. Tồn tại hay không hàm $\pi: N \to N$, sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < +\infty\,?$$

2000.4. Cho ma trận không suy biến M bậc 2n và ma trận nghịch đảo M^{-1} được chia thành các khối vuông

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng detM.detH=detA.

2000.5. Cho L là không gian thực tuyến tính, dimL=10, L_1 và L_2 là các không gian con của L, $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Giả sử E là không gian tất cả các biến đổi tuyến tính L, mà đối với chúng L_1 và L_2 là các không gian con bất biến. Tìm chiều không gian E.

2000.6. Cho P(x) là đa thức bậc n với các hệ số thực chỉ có các nghiệm thực. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(P'(x)\right)^2 \ge nP(x)P''(x)$$

đối với bất kỳ $x \in R$.

Olympic- 2001

2001.1. Cho hàm tăng f: $[0,1] \to [0,1]$. Chứng minh rằng tìm được điểm $x \in [0,1]$, sao cho f(x)=x.

2001.2. Cho $\{x_i\}_{i=1}^n$ là dãy các số dương giảm hữu hạn. Chứng minh rằng:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}}\ .$$

2001.3. Cho hàm $f \in C(R)$, hàm f không tăng trong bất kỳ một khoảng nào. Chứng minh rằng trong một khoảng bất kỳ nào đó có các điểm cực tiểu của hàm f.

2001.4. Tìm tất cả các hàm f: $R_+ \to R_+$ (ở đây $R_+ = (0,+\infty)$), thoả mãn phương trình

$$f(x)f\left(yf(x)\right) = f(x+y), \qquad \forall x, y \in R_+\,.$$

2001.5. Cho P(x) và Q(x) là các đa thức bậc n và $G(x,y) = \sum_{k=0}^n P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(y)$. Chứng minh G(x,y)=G(y,x).

2001.6. Chứng minh rằng 1 hình vuông đơn vị có thể chia ra thành N hình vuông kích cỡ nhỏ hơn nếu N đủ lớn.

Olympic- 2002

2002.1. Tính định thức ma trận (a_{ij}) bậc n, với $a_{ij} = \delta_{ij} + x_i y_j$ (δ_{ij} là ký hiệu croneker).

2002.2. Biết rằng $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$, tính $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx$.

2002.3. Dãy liên tục $\{x_n\}$ truy hồi: $x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2002}$. Chứng minh rằng $x_{2002} < \frac{1}{2}$.

2002.4. Cho A và B là các ma trận bậc n. Chứng minh đẳng thức $P(A+B) = P(A) + P'(A)B$ thoả mãn đối đa thức bất kỳ khi và chỉ khi $AB - BA = B^2$.

2002.5. Cho $\{\varepsilon_n\}$ - dãy cấu tạo từ ± 1. Có thể hay không số

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$$

là số hữu tỷ?

2002.6. Cho $A \subset R^n$ - compac và

$$B = \left\{ x \in R^n \middle| \ \forall x \in B \ \exists! a \in A : \|x-a\| = \sup_{y \in A} \|x-y\| \right\}.$$

Chứng minh rằng tập đóng B trùng với R^n.

Olympic- 2003

2003.1. Cho a, b, c, d là các số phức, $|a| \le 1$, $|b| \le 1$, $|c| \le 1$, $|d| \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $|ac + ad + bc - bd|$.

2003.2. Chứng minh rằng đối với các vector bất kỳ $a_1, ..., a_n$ trong R^3 thoả mãn bất đẳng thức $\sum_{i,j=1}^{n} e^{(a_i, a_j)} \ge n^2$.

2003.3. Chứng minh rằng đa thức dạng $a_1 x^{k_1} + a_2 x^{k_2} + ... + a_{2003} x^{k_{2003}}$ có không nhiều hơn 2002 nghiệm dương (tính cả nghiệm bội).

2003.4. Cho f(x) là hàm chu kỳ liên tục. Chứng minh rằng đối với bất kỳ $a \in R$ phương trình f(x+a)=f(x) có ít nhất hai nghiệm trong đoạn thẳng mà độ dài của nó bằng chu kỳ của hàm.

2003.5. Ba đường thẳng $r = r_i + a_i t$ (i=1,2,3) cắt nhau từng cặp và chúng không song song với một mặt phẳng. Biểu diễn thể tích hình hộp, ba cạnh của nó nằm trong các đường thẳng đã cho qua các vector r_i và a_i.

2003.6. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \le \left[\frac{2}{n-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \right]^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

Olympic- 2004

2004.1. Các phần tử của ma trận bậc 10 là các số nguyên, ngoài ra có ít nhất 92 phần tử là số lẽ. Chứng minh rằng định thức của ma trận này là số chẵn.

2004.2. Cho hàm f(x) là hàm chu kỳ liên tục với chu kỳ T, $\int_0^T f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng tìm được số a, sao cho với số b bất kỳ thoả mãn bất đẳng thức

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

2004.3. Cho P là chu vi tam giác với các toạ độ nguyên của đỉnh nằm trong mặt phẳng Oxy, R là bán kính đường tròn mô tả gần tam giác. Chứng minh rằng $P^3 \ge 54R$.

2004.4. Tìm đa thức P(x) bậc nhỏ nhất sao cho khi x=0 đa thức P(x) bậc 10 có giá trị 0, và khi x=1 đa thức P(x) bậc 5 có giá trị 0.

2004.5. Trong mặt phẳng cho 3 đường tròn cắt nhau từng cặp, Qua các giao điểm của mối cặp đường tròn kẻ đường thẳng. Chứng minh rằng những đường thẳng này cắt nhau tại một điểm hoặc song song với nhau.

2004.6.1. Mặt phẳng z=f(x,y), với f(x,y) là đa thức bậc không nhỏ hơn 2 có tính chất: qua một điểm bất kỳ của nó có thể kẻ hai đường thẳng hoàn toàn nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng đây là mặt phẳng paraboloit hyperboloit.

2004.6.2. Cho

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix},$$

với B,C,D là các ma trận thực bậc 1, B không suy biến, B và D đối xứng. Ký hiệu n_1, n_2, n_3 là các giá trị riêng dương của các ma trận A, B, $D - C^T B^{-1} C$ tương ứng. Chứng minh rằng $n_1 = n_2 + n_3$.

Olympic- 2005

2005.1. Cho các số dương x_1, x_2, y_1, y_2 thoả mãn các biểu thức $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 < y_1^2 + y_2^2$. Chứng minh rằng:

$$x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 < y_1 \ln y_1 + y_2 \ln y_2 .$$

2005.2. Cho d_n là số hoán vị $\sigma:\ \{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ sao cho thoả mãn bất đẳng thức $\big(\sigma(i)-\sigma(i-1)\big)\big(\sigma(i-1)-\sigma(i+1)\big)>0$ với i=2,3,…,n-1. Chứng minh rằng $2d_{2004}<d_{2005}$.

2005.3. a) Cho hàm vi phân f: $[0,1]\to R$. Biết rằng $x\sin f(x)+x^2=f(x)\sin x+2f(x)^2$ với bất kỳ $x\in[0,1]$. Tìm $\left|f'_+(0)\right|$ (ở đây $f'_+(0)$ là đạo hàm bên phải điểm 0).

b) Cho hàm liên tục f: $[0,1]\to R$. Biết rằng $x\sin f(x)+x^2=f(x)\sin x+2f(x)^2$ với bất kỳ $x\in[0,1]$. Chứng minh rằng tồn tại $f'_+(0)$.

2005.4. Trong mặt phẳng cho đường trơn từng phần kín G, giới hạn miền đối xứng tâm lồi. Chứng minh rằng trong đường G có thể vẽ nội tiếp hình sáu cạnh đều afin (tức là hình sáu cạnh đều qua phép biến đổi afin nào đó).

2005.5. Cho các ma trận số nguyên A và B bậc 10. Biết rằng các ma trận A, A+B, A+2B,…, A+25B có ma trận nghịch đảo nguyên. Chứng minh rằng A+2005B cũng là ma trận nghịch đảo nguyên.

2005.6. Cho hàm số f: $R\to R$ liên tục tại điểm $x=x_0$ tức là:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\quad \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon. \qquad (*)$$

Chứng minh rằng trong điều kiện (*) đối với mỗi $\varepsilon>0$ có thể chọn được $\delta=\delta(\varepsilon)$ sao cho hàm $\delta(\varepsilon)$ sẽ liên tục với $\varepsilon>0$

Olympic- 2006

2006.1. Cho $f\in C^2([0,1])$. Chứng minh rằng hàm f có thể đặt ở dạng hiệu của hai hàm lồi dưới.

2006.2.1. Cho $x_n=\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}}_{n\ lan}$. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}6^n(2-x_n)$.

2006.2.2. Giả sử $\alpha\in(0,1)$, chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k^\alpha}$ hội tụ và $x_k\ge x_{k+1}\ge 0$ với mọi k. Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k^{1-\alpha}}$ cũng hội tụ.

2006.3.1. Cho đa thức P(x) bậc n chẵn sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}P(x)=+\infty$. Biết rằng các đa thức P(x) và P(P(x)) có chính xác n nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức P(P(P(x))) cũng có chính xác n nghiệm thực.

2006.3.2. Chứng minh rằng đối với nghiệm bất kỳ của phương trình $y''+\sin y=0$ tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$.

2006.4. Bốn phương trình bình phương $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$, $f_3(x,y)=0$, $f_4(x,y)=0$ đưa đến bốn đường tròn trong mặt phẳng, khi đó không có bất kỳ ba điểm nào của đường tròn nằm trên cùng một đường thẳng, các đường tròn không cắt nhau và không nội tiếp nhau. Chứng minh rằng các hàm

f_1, f_2, f_3, f_4 độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại đường tròn cắt bốn đường tròn ban đầu dưới những góc vuông.

2006.5.1. Giả sử $A \subset R^2$ là tập compac lồi và A_ε là lân cận của tập hợp này, tức là tập $U_{a\in A}\{x \in R^2 \big| \, \|x-a\| \le \varepsilon\}$. Chứng minh rằng diện tích $S(A_\varepsilon)$ của tập hợp A_ε là $S(A_\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ và tìm các hệ số a,b,c. Cho rằng biên A là đường nắn thẳng.

2006.5.2. Compac lồi A trong không gian eurclic R^2 có diện tích π.

$$\int_{R^2} \exp\left(-\rho(x, A)\right) dx = 5\pi ,$$

với hàm $\rho(x, A) = \min_{a\in A} \|x-a\| \forall x \in R^2$. Tìm độ dài biên ∂A của compact A.

2006.6. Cho B,C là các ma trận thực $n \times n$, A=B+iC là ma trận phức $n \times n$, $i = \sqrt{-1}$. Chứng minh rằng:

$$\det\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \left|\det A\right|^2 .$$

Olympic- 2007

2007.1. Cho $C \subset R^n$ là tập hợp giới hạn và hàm số f: $C \to R$ thoả mãn điều kiện $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \le \|x_1 - x_2\|$ đối với tất cả $x_1, x_2 \in C$. Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \inf\limits_{y\in C}\left(\|x-y\| + f(y)\right)$ thoả mãn điều kiện $\left|g(x_1) - g(x_2)\right| \le \|x_1 - x_2\|$ đối với mọi $x_1, x_2 \in R^n$ và $g(x) = f(x)$ với mọi $x \in C$.

2007.2.1. Cho $x_0 = a, x_1 = b,$ còn $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2}$, n=2,3,…, Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2007.2.2. Cho dãy $\{a_n\}$ sao cho dãy $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ hội tụ. Chứng minh rằng đối với bất kỳ $\varepsilon > 0$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}$ hội tụ.

2007.3.1. Cho B là vật compac lồi đối xứng tâm trong R^2. Chứng minh rằng tìm được hình bình hành chứa B mà trung điểm các cạnh của nó là các điểm của tập B.

2007.3.2. Chứng minh rằng bài toán Couschy $\dot{x}(t) = x(t/2) + e^t$, x(0)=1 có nghiệm duy nhất trên trục. (Nghiệm là hàm vi phân liên tục x(.), thoả mãn bài toán Causchy).

2007.4. Cho f(x) là đa thức bậc n với các hệ số thực, đa thức có n nghiệm thực khác nhau $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng đối với số tự nhiên bất kỳ $k \le n-2$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{f'(x_i)} = 0$.

2007.5. Cho $T \in R^{m\times n}$ là ma trận hạng m, $b \in R^m$ và tập hợp $A = \left\{ x \in R^n \middle| Tx = b; x_k \ge 0, 1 \le k \le n \right\}$. Chứng minh rằng nếu điểm $x \in A$ là đỉnh của tập hợp A thì tồn tại sự đánh số $\{i_k\}_{k=1}^n$ các thành phần điểm x, sao cho $x_{i_k} = 0$ đối với mọi $k \in \overline{m+1, n}$, còn các cột $\{T_{i_k}\}_{k=1}^m$ độc lập tuyến tính.

2007.6. Cho A và B là các compac lồi trong R^2 với miền bên trong không rỗng, biên của nó không chứa các đoạn thẳng. Cho $C = A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$. Chứng minh rằng tồn tại các hàm liên tục $a: [0,1] \to A$ và $b: [0,1] \to B$ sao cho

$$\left\{ a(t) + b(t) \middle| t \in [0,1] \right\} = C \ .$$

<u>Giải bài tập.</u>.

Olympic- 1993

1993.1.1.

$f = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4| \le |x_1|.|x_3 + x_4| + |x_2|.|x_3 - x_4| \le |x_3 + x_4| + |x_3 - x_4|$. Không mất tính tổng quát có thể cho rằng $x_3 \ge x_4 \ge 0$, vì vậy $f \le 2x_3 = 2$. Đây là giá trị đạt được ví dụ tại điểm $x_k = 1$, $1 \le k \le 4$.

Nhận xét. Nhận thấy rằng đối với mỗi toạ độ x_k (khi cố định các điểm còn lại) hàm có dạng $|ax_k + b|$, vì vậy giá trị lớn nhất hàm nhận được khi $x_k = -1$ hay $x_k = 1$. Như vậy giá trị cực đại đạt được ở đỉnh của hình hộp bằng 16. Trường hợp này tương tự trường hợp hàm liên tục lồi đạt giá trị cực đại trong compact ở điểm nào đó của compac này.

1993.1.2. Trong phương trình thay $X = e^{At}Y(t)$:

$$\dot{X} = Ae^{At}Y + e^{At}\dot{Y} = Ae^{At}Y + e^{At}YB,$$

Suy ra $\dot{Y} = YB$, $Y = Ce^{Bt}$, với C- ma trận hằng. Nghiệm chung $X = e^{At}Ce^{Bt}$, nghiệm bài toán Couschy $X = e^{At}e^{Bt}$.

1993.2. Xét ma trận $B = A^2$. Trong ma trận này b_{ii} là số lẽ, còn b_{ij}, $i \ne j$ là số chẵn. Như vậy $\det A^2 = (\det A)^2$ là số không đếm được.

1993.3. Cho v(t) là vận tốc hạt tại thời điểm t, $t \in [0,1]$. Khi đó v(0)=v(1)=0, $\int_0^1 v(t)dt = 1$. Ở các toạ độ (t,v) xét tam giác OMN, với O(0,0), $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, N(1,0). Đồ thị hàm v(t) cắt ít nhất một trong các cạnh của tam giác OMN, vì $S_{OMN} = 1$. Như vậy trong đồ thị của hàm v=v(t) tìm được điểm $\left(t_0, v(t_0)\right)$, ở đó tiếp tuyến song song với cạnh bên tam giác, tức là $|v'(t_0)| = 4$.

1993.4.1. Cho rằng hàm tồn tại. Khi đó tập hợp f(Q) là ảnh của tập đếm được không đếm được hơn f(R\Q) vì theo điều kiện $f(R\setminus Q)\subset Q$. Như vậy tập hợp các giá trị của hàm không đếm được hơn và chứa ít nhất hai điểm khác nhau. Đây là điều ngược với lý thuyết Bolsman-Causchy về giá trị trung gian của hàm liên tục.

1993.4.2. Xét hai tích phân:

$$I_{\pm}=\int_0^{2\pi}T(x)(1\pm\cos x)dx=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}\pm\cos^2 x\right)dx=\pi(a_0\pm 1).$$

Vì $|a_0|<1$, nên $I_+>0$, $I_-<0$. Nhưng nếu cho rằng $T\geq 0(\leq 0)$ thì cả hai tích phân sẽ $\geq 0(\leq 0)$, vì $1\pm\cos x\geq 0$. Như vậy hàm T(x) nhận những giá trị với dấu khác nhau.

1993.5.1. Không. Ví dụ nếu $A=\{(x,y)|\ y=0\}$, còn $B=\{(x,y)|\, x>0, y>0, xy>1\}$, thì $A+B=\{(x,y)|\ y>0\}$.

1993.5.2. Giả sử $P(x)=(x-a_1)^{k_1}...(x-a_m)^{k_m}$, với $\operatorname{Re}a_s=0$ và $\sum_{s=1}^{m}k_s=n$ thì

$$\left|\frac{2xP'(x)}{P(x)}-n\right|=\left|2x\sum_s\frac{k_s}{x-a_s}-\sum_s k_s\right|=\left|\sum_s k_s\frac{x+a_s}{x-a_s}\right|\leq k_s\left|\frac{x+a_s}{x-a_s}\right|=\sum_s k_s=n.$$

1993.6.1. Với mỗi số tự nhiên n

$p\left(\sqrt{n+1)}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{p^2(n+1)}-\sqrt{p^2n},\quad p=1,2,...$ tạo thành một cấp số số học với sai phân $d_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Như vậy một số bất kỳ trong $(0,\infty)$ có thể xấp xỉ bởi chúng với độ chính xác đến d_n. Vì $d_n\to 0$ khi $n\to\infty$, thì số bất kỳ trong số này và π có thể đặt ở dạng $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{k_n}-\sqrt{m_n}\right)$.

1993.6.2. Kết quả cần nhận được ngay lập tức nếu tích phân ban đầu biểu diễn thành hai tích phân và sau đó tích phân thứ hai thực hiện tích phân từng phần:

$$\int_0^{\pi/2}\cos ax(\cos x)^{a-2}dx=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(\cos(a-1)x\cos x-\sin(a-1)x\sin x\right)\left(\cos\right)^{a-2}dx=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\cos(a-1)x(\cos x)^{a-1}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(a-1)x}{a-1}d(\cos x)^{a-1}=$$
$$=\frac{\sin(a-1)x}{a-1}(\cos x)^{a-1}\Big|_0^{\pi/2}=0.$$

Olympic- 1994

1994.1. Mỗi điểm nằm hoặc bên trong số chẵn đường tròn hoặc bên trong số lẽ đường tròn

1994.2. Luôn luôn. Giả sử A và B là các điểm của tập đã cho. Tồn tại số R_0, sao cho đối với bất kỳ R> R_0 cung nhỏ của đường tròn bán kính R, kẻ qua các điểm A vá B, nằm trong hình vuông đơn vị. Tập hợp những cung như thế là không đếm được, vì vậy có ít nhất một trong chúng không có các điểm của tâp bỏ đi.

1994.3. Bằng phương pháp hệ số không xác định tìm được nghiệm trong lớp các hàm tuyến tính: $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$. Chỉ ra rằng f_1 là nghiệm duy nhất.

Giả sử $g(x) = f(x) - f_1(x)$, khi đó $g \in C(R)$ và thoả mãn phương trình 3g(2x+1)=g(x). Nhận thấy rằng trong phương trình này x nằm trong $\frac{x-1}{2}$: $g(x) = \frac{1}{3} g\left(\frac{x-1}{2}\right)$. Trong phương trình cuối một lần nữa nhận thấy x nằm trong $\frac{x-1}{2}: g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} g\left(\frac{x-3}{4}\right)$ v.v. Chúng ta nhận được

$$g(x) = \frac{1}{3^n} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

Vì tính không liên tục của g đối với x bất kỳ

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right) = g(-1)$$

Nên g(x)=0.

1994.4. Cho (x_i, y_i) là toạ độ của điểm A_i trong hệ toạ độ vuông góc nào đó Oxy. Xét định thức

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix}.$$

Nhận thấy rằng khi chuyển gốc toạ độ Δ không thay đổi, chuyển gốc toạ độ sang điểm là tâm của các đường tròn đồng tâm đối với sự phân chia (A_1, A_2, A_3, A_4). Khi đó trong hệ toạ độ mới

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & R^2 \end{vmatrix} = \left(R^2 - r^2\right) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_3 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Suy ra

$$|\Delta| = \left|R^2 - r^2\right|.2S_{A_1A_2A_3} = \frac{2}{\pi} k\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right).$$

1994.5.1.

$$\frac{1}{1994!}\int_0^1\left(\prod_{k=1}^{1994}(y+k)\right)' dy = 1994 .$$

1994.5.2. Ứng dụng bất đẳng thức Berceler đối với các hàm đặc trưng $\chi_k(x)$ các đoạn $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, với $\chi_k(x)=1$ khi $x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ và $\chi_k(x)=0$ khi $x\notin\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\chi_k,\varphi_i\right)^2 \le \left(\chi_k,\chi_k\right) = \frac{1}{n},\quad k=1,\dots,n .$$

Như vậy

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\chi_k,\varphi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_k,\varphi_i\right)^2\right) \le 1,$$

Vì tìm được i: $\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_k,\varphi_i\right)^2 \le \frac{1}{n}$.

1994.6.1. Như đã biết trung điểm các dây cung song song của parabol nằm trong đường kính, vì vậy có thể tìm được phương án xây dựng sau:

1) vẽ hai dây cung song song, khi đó đường thẳng kẻ qua trung điểm của chúng là đường kính,

2) xây dựng cung vuông góc với đường kính này, sau đó qua trung điểm của nó vã đường thẳng song song với đường kính.

1994.6.2. Cho $D=\frac{d}{dx}$ là toán tử vi phân. Đồng nhất thức sau đúng

$$x^{n+1}D^n x^{n-1} = \left(x^2D\right)^n . \qquad (*)$$

Chứng minh (*) theo quy nạp. Khi n=1 đẳng thức đúng. Khi chuyển từ n đến n+1 chúng ta có

$$\begin{aligned}
&x^{n+2}D^{n+1}x^n y = \\
&= x^{n+2}D^{n+1}\left(x.x^{n-1}y\right) = x^{n+2}\left((n+1)D^n x^{n-1}y + xD^{n+1}x^{n-1}y\right),\\
&\left(x^2D\right)^{n+1} y = x^2D\left(x^2D\right)^n y = x^2D\left(x^{n+1}D^n x^{n-1}y\right) = \\
&= x^2\left((n+1)x^n D^n x^{n-1}y + x^{n+1}D^{n+1}x^{n-1}y\right),
\end{aligned}$$

suy ra (*).

Bây giờ có thể biến đổi phương trình ban đầu:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+1}D^k x^{k-1} y \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k \left(x^2D\right)^k y = 0 ,$$

nếu $t = x^{-1}$,thì $x^2 D = -Dt$ và phương trình có dạng

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (-1)^k \frac{d^k y}{dy^k} = 0 .$$

Olympic- 1995

1995.1.1. Đúng. Ví dụ , $f(x) = x^2 \sin x$.

1995.1.2. Đúng. Khi x>1 chúng ta có

$$\frac{1}{x^2 - x} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k},$$

chuỗi hội tụ tuyệt đối và đều trong compac bất kỳ từ {x>1}. Để nhận được f(x), cần xây dựng sự phân chia

$$\left\{ n \in N \middle| \, n \geq 2 \right\} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \bigcup \{2n_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Công thức rõ ràng:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-2^{2^{n+1}}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^{-2^{2^n}(2k+1)} .$$

1995.2. Không tồn tại. Chúng ta có

$$f^2(x) - f^2(0) = \int_0^x 2 f(t) f'(t) dt \geq 2 \int_0^x \sin t dt = 2(1 - \cos x),$$

như vậy $f^2(\pi) \geq 4$.

1995.3. Giả sử $f_1', \dots, f_n'$ độc lập tuyến tính (trong trường hợp ngược lại không rõ ràng) ví dụ, $c_1 f_1' + \dots + c_{n-1} f_{n-1}' = f_n'$. Khi đó $c_1 f_1 + \dots + c_{n-1} f_{n-1} + c = f_n$, với $c \neq 0$ vì hệ độc lập tuyến tính $\{ f_k \}_{k=1}^{n}$. Chỉ ra rằng các hàm $\{ f_k' \}_{k=1}^{n-1}$ độc lập tuyến tính. Nếu $a_1 f_1' + \dots + a_{n-1} f_{n-1}' = 0$, thì $a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + A = 0$, A=const. Suy ra $(Ac_1 - ca_1) f_1 + \dots + (Ac_{n-1} - ca_{n-1}) f_{n-1} = Af_n$. Như vậy A=0 chỉ khi $a_k = 0$ với $1 \leq k \leq n-1$.

1995.4. Giả sử $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k}$. Khi n đủ lớn

$$a_n > \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n} = 1 + \frac{2}{n},$$

$$a_n < 1 + \frac{2}{C_n^1} + \frac{2}{C_n^2} + \frac{n-5}{C_n^3} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{1995}{n^2}.$$

như vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = e^2$.

1995.5. Kí hiệu định thức bằng W. Cần chứng minh rằng $W^2 < 1$. Chúng ta có

$$W^2 = (y-x)^2(z-x)^2(z-y)^2 \le \left(\frac{(y-x)^2+(z-x)^2+(z-y)^2}{3}\right)^3 \le \left(\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{3}\right)^3 = 1,$$

ngoài ra bất đẳng thức thứ nhất chuyển thành đẳng thức chỉ khi x=y=z, và khi đó W=0.

1995.6.1. Cho b và –b là những giao điểm của các đường tròn $\|x \pm a\| = r$. Khi đẳng thức (*) thoả mãn đối với $b_1 = b, b_2 = -b$. Dễ dàng nhìn thấy rằng nếu $p \in R^2$ là vector đơn vị thì

$$\max\{(p,x) | x \in A\} + \max\{(p,x) | x \in B_r(b) \cap B_r(-b)\} = r, \qquad (**)$$

Như vậy $\max\{(p,x) | x \in C\} = \max\{(p,x) | x \in B_r(0)\}$, với $C = A + B_r(b) \cap B_r(-b)$. Vì C là compac lồi nên $C = B_r(0)$. Như vậy nhận thấy rằng tồn tại điểm $x_0 \in C \setminus B_r(0)$. Giả sử b_0 là hình chiếu metric của điểm x_0 lên $B_r(0)$, $p_0 = \frac{x_0 - b_0}{\|x_0 - b_0\|}$. Nếu cho rằng đối với điểm bất kỳ $b \in B_r(0)(p_0, b - b_0) > 0$, thì vì tính lồi $B_r(0)$ đối với bất kỳ $\lambda \in (0,1)\, \lambda b + (1-\lambda)b_0 \in B_r(0)$ và $\left\|x_0 - \left(\lambda b + (1-\lambda)b_0\right)\right\|^2 = \|x_0 - b_0\|^2 - 2\lambda\left(x_0 - b_0, b - b_0\right) + \lambda^2\|b - b_0\|^2 < \|x_0 - b_0\|^2$ khi $\lambda > 0$ nhỏ. Như vậy $\left(p_0, b - b_0\right) \le 0 \quad \forall b \in B_r(0)$, còn $\left(p_0, x_0\right) > \left(p_0, b_0\right)$. Điều này mâu thuẫn với công thức (**).

Tương tự chỉ ra rằng đẳng thức $B_r(0) \setminus C \ne \varnothing$ không thể xảy ra. Như vậy $C = B_r(0)$.

Người đọc tự kiểm tra công thức (**) với mọi p.

1995.6.2. Ví dụ $X = \left\{ z \middle| |z| \ge \frac{1}{1994} \right\}$.

Olympic-1996

1996.1. Giả sử S là diện tam giác có đỉnh tại các nút mạng, khi đó $S \ge \frac{1}{2}$ (vì $S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$, với $\left(x_i, y_i\right)$ là các toạ độ của hai đỉnh đối với đỉnh thứ ba). Trong trường hợp này $S = \frac{abc}{4R}$.

1996.2. Chúng ta có $k = [n\sqrt{2}] < n\sqrt{2}$, như vậy

$$1 \le 2n^2 - k^2 = \left(n\sqrt{2} - k\right)\left(n\sqrt{2} + k\right) < \left\{n\sqrt{2}\right\}.2n\sqrt{2}.$$

1996.3.1. Cho $g(x)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)$, khi đó $g(b)=g(a)e^{b-a}$. Ứng dụng lý thuyết Rolle đối với hàm $h(x)=e^{-x}g(x)$ trong đoạn [a,b]: $\exists c\in(a,b)$ sao cho $h'(c)=-e^{-c}g(c)+e^{-c}g'(c)=0$. Như vậy $g'(c)=g(c)$.

1996.3.2. Xét chuỗi luỹ thừa $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Khi đó

$$f(z)=\sum_{n-1}^{\infty}\left(\sum_{i-1}^{n-1} a_i a_{n-1}\right) z^n = a_1 z + f^2(z).$$

Suy ra với tính toán điều kiện f(0)=0 chúng ta tìm được $f(z)=\frac{1-\sqrt{1-4az}}{2}$. Bán kính hội tụ của chuỗi Taylor hàm f(z) tại điểm 0 bằng $\frac{1}{4a}$, vì vậy $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=4a$.

1996.4.1. Khi $x\neq 1$ $P(x)=\frac{x^{n+1}-2x^n+1}{x-1}$. Xét đa thức $Q(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ khi x>0. Vì Q(0)=Q(2)=1, Q(1)=0 và $Q'(x)=x^{n-1}[(n+1)x-2n]$, nên nghiệm dương thứ hai của đa thức nằm trong khoảng $\left(2-\frac{1}{2^{n-1}},2-\frac{1}{2^n}\right)$, vì $Q\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=-2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n+1<-2\left(1-\frac{n}{2^n}\right)+1\leq -2.\frac{1}{2}+1=0$, còn $Q\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+1>0$.

1996.4.2. Chúng ta có đánh giá

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\left(x,\varphi_i\right)\right)^2=\left(x,\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)^2\leq (x,).\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i,\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j\right)=$$

$$(x,x)\sum_{i,j} c_i c_j(\varphi_i,\varphi_j)\leq\frac{1}{2}(x,x)\sum_{i,j}\left(c_i^2+c_j^2\right)\left|(\varphi_i,\varphi_j)\right|\leq$$

$$\leq (x,x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)\left(\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|(\varphi_i,\varphi_j)\right|\right).$$

1996.5.1. Giả sử $A^{-1}=(b_{ik})$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}=0 \text{ với } i\neq j,$$

vì $a_{kj}>0$, thì giữa các phần tử của dòng thứ i ma trận A^{-1} có ít nhất hai phần tử khác 0. Như vậy tất cả các phần tử khác 0 không nhỏ hơn 2n và suy ra $z_n\leq n^2-2n$.

1996.5.2. Từ điều kiện suy ra rằng các hệ số $q_i(x)$ của đa thức đặc trưng

$$P(\lambda)=\det\left(\lambda E-A(x)\right)=\lambda^n+q_1(x)\lambda^{n-1}+...+q_n(x)$$

bị chặn trong khoảng (0,1). Từ lý thuyết haminton- keli, suy ra rằng

$$P\left(A(x)\right)=\frac{C^n}{x^n}+\frac{D_1(x)}{x^{n-1}}+...+D_n(x)=0$$

thêm vào những phần tử của tất cả các ma trận $D_i(x)$ bị chặn trong khoảng (0,1). Vì vậy

$$C^n=\lim_{x\to+0}\left(-xD_1(x)-...-x^nD_n(x)\right)=0\,.$$

1996.6. Chứng minh khẳng định bằng phương pháp quy nạp theo a+b. Cơ sở khi a+b=0 rõ ràng.

Giả sử khi $a+b\le N$ khẳng định đúng. Cho rằng a+b=N+1 và xác định $a\ge b$. Nếu $c\le b$, thì các vector $x=(\underbrace{1,...,1}_{c},\underbrace{1,...,1}_{a-c},\underbrace{0,...,0}_{b-c})$ và $y=(\underbrace{1,...,1}_{c},\underbrace{0,...,0}_{a-c},\underbrace{1,...,1}_{b-c})$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Bây giờ cho rằng $a\ge c>b$ (trường hợp c>a không thể). Các số $a_0=a+b-2c$, $b_0=b$, $c_0=c-b$ là các số không âm, vì $a+b-2c\ge 2\sqrt{ab}-2c\ge 0$, và $a_0b_0\ge c_0^2$. Khi đó $a_0+b_0<a+b=N+1$, tức là $a_0+b_0\le N$. Vì theo quy nạp nghiệm {x,y} tồn tại đối với bộ ba (a+b-2c,b,c-b). Nhưng khi đó {x+y,y} là nghiệm đối với (a,b,c).

Olympic- 1997

1997.1.1. Xét hàm số

$$f(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}\,.$$

Trong bán trục hàm f(x) giảm nghiêm ngặt từ $+\infty$ đến 0. Như vậy tồn tại số dương duy nhất x_0 sao cho $f(x_0)=1$, tức là

$$\frac{a_1}{x_0}+\frac{a_2}{x_0^2}+...+\frac{a_n}{x_0^n}=1.$$

1997.1.2. Từ chứng minh dấu hiệu hội tụ tích phân của các chuỗi suy ra rằng:

$$0\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(n^2+x)^2}-\int_1^{+\infty}\frac{tx}{(t^2+x)^2}dt\le\frac{x}{(1+x^2)}\,.$$

Vì vậy

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(n^2+x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{tx}{(t^2+x)^2}dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\int_{1+x}^{+\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{2}.$$

1997.2. Các giao điểm của mặt cắt ngang với các trục toạ độ tạo thành tứ diện đều với các cạnh $2\sqrt{2}$. Các mặt phẳng $x_k = 1$ cắt nó ra làm 4 tứ diện với các cạnh $\sqrt{2}$. Vì thể tích tứ diện đều với các cạnh a bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, nên thể thích lát cắt bằng

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

1997.3.1. Xét hàm số $f(x) = x\left(1-x^2\right)^n$. Trong đoạn [0.1]

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^2.$$

khi $n \to \infty$ $f_{\max} \to 0$, vì vậy với vai trò đa thức cần tìm có thể lấy $P(x) = x - x\left(1-x^2\right)^n$ với n đủ lớn.

1997.3.2. Không. Giả sử $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là tập hợp tất cả các điểm của hình vuông $[0,1]^2$, chúng có hai toạ độ hữu tỷ. Cho $\varepsilon > 0$ có thể bọc điểm đã cho s_n bằng hình tròn nhỏ $B_n(s_n)$, mà tổng diện tích các hình tròn lân cận B_n và B_{n+1} với diện tích hình tròn liên kết Côriôlit của chúng (có thể ví dụ kẻ hai tiếp tuyến ngoài) sẽ nhỏ hơn $\varepsilon / 2^n$ đối với mọi $n \in N$. Cho G là hợp tất cả các ống nhỏ. Vì chỉ số dưới $\mu_* G \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, còn G nằm hoàn toàn trong hình vuông $[0,1]^2$ (và chỉ số trên $\mu_* G = 1$), nên G không đo được theo Jordan.

1997.4.Các tiếp tuyến với parabol tại các điểm $\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$(i=1,2,3) cho bởi phương trình $yy_i = px + \frac{y_i^2}{2}$. Các tiếp tuyến cắt nhau tại các điểm $\left(\frac{y_i y_j}{2p}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$. Như vậy,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_3^2/2p & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Lúc này

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} y_1 y_2/2p & \left(y_1+y_2\right) & 1 \\ y_2 y_3/2p & \left(y_2+y_3\right) & 1 \\ y_3 y_1/2p & \left(y_3+y_1\right) & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Suy ra chúng ta tìm được $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

1997.5. Cần kiểm tra rằng bất đẳng thức sau đúng:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^{1/2} xf'(x)dx + \int_{1/2}^1 (x-1)f(x)dx,$$

Còn đối với nó thực hiện tích phân từng phần.

1997.6. Cho $C = AE_{ij}A^{-1}$, với E_{ij} là ma trận mà giao điểm cột thứ i và dòng thứ i là 1, còn tất cả các phần tử còn lại bằng 0. Khi đó

$$c_{kl}(x) = a_{ki}(x)A_{lj}(x), \qquad (*)$$

với A_{ij} là phần tử đại số bổ sung a_{ij} trong detA. Nhận thấy rằng biểu thức $\left(A_{lj}(x)\right)^{2n+1}.\det A(x)$ là tổng các tích dạng (*), vì vậy nó có giới hạn khi $x \to +0$. Nhưng detA(x)=1, như vậy tồn tại giới hạn $\lim_{x\to+0} A_{lj}(x) \quad (\forall l, j)$.

Olympic- 1998

1998.1. Lấy a=1 và ký hiệu b là số nhỏ nhất trong các số $n \in N$ sao cho f(n)>f(1). Giả sử $c = f^{-1}\left(2f(b) - f(1)\right)$. Vì 2f(b)-f(1)>f(b)>f(1), nên c>b.

1998.2. Giả sử z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Khi đó

$$b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -c\overline{a}.$$

Vì $|c| = |z_1z_2z_3| = 1$, nên $|a| = |b|$, và phương trình thứ hai nhận dạng $z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = 0$. Một trong các nghiệm của phương trình này bằng -1, còn hai nghiệm khác là các số phức liên hợp, tích của chúng bằng 1. Như vậy chúng nằm trong đường tròn $|z| = 1$.

1998.3.1. Gỉa sử f là phép quay mặt phẳng xung quanh điểm O một góc $\pi\sqrt{2}$. Cho rằng $A_0 \neq O$ là điểm tuỳ ý, $A_n = f(A_{n-1})$ khi $n \in N$. Khi đó $A_n \neq A_m$ với $n \neq m$ vì số $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ không phải là số nguyên. Cho $S = \{A_0, A_1, \ldots\}$, khi đó $f(S) = \{A_0, A_1, \ldots\} \subset S$, nhưng $f(S) \neq S$.

1998.3.2. Nếu ma trận không đối xứng thì không mất tính tổng quát xét ô Jordan với $\lambda \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Khi đó S có thể chọn

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}.$$

1998.4. (i) Chúng ta sẽ tìm đa thức bậc 4: $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Khi tính tích phân và cân bằng các hệ số bậc n ở vế trái và vế phải chúng ta nhận được hệ tuyến tính đối với các biến a, b, c, d, e với ma trận tam giác:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3/2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

suy ra tìm được $P(x)=x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}$. (ii)

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\int_0^n P(x)dx=\frac{n}{30}(6n^4+15n^3+10n^2-1).$$

1998.5. Rõ ràng rằng x_n giảm đơn điệu và tiến tới 0.

$$\frac{1}{1+x_n}=\frac{1}{\ln\left(1+x_n\right)}=\frac{1}{x_n\left(1-\frac{x_n}{2}+o(x_n)\right)}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}+o(1),$$

Hay $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}+y_n$, với $y_n\to 0$ khi $n\to\infty$. Suy ra rằng $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_1}+\frac{n}{2}+y_1+...+y_n$, $\frac{1}{nx_{n+1}}=\frac{1}{nx_1}+\frac{1}{2}+\frac{y_1+...+y_n}{n}$. Vì $y_n\to 0$, nên $\frac{y_1+...+y_n}{n}\to 0$ vì vậy $\frac{1}{x_{n+1}}\to\frac{1}{2}$.

1998.6. Giả sử $a_i=\left(a_{i1},a_{i2},...,a_{in}\right)$. Cho rằng các vector $a_1,...,a_n$ độc lập tuyến tính. Khi đó trong ma trận (a_{ij}) độc lập tuyến tính không chỉ các dòng mà cả các cột. Vì vậy tồn tại các số $\alpha_1,...,\alpha_n$ (có thể xem rằng $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2=1$) sao cho $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_{ij}=0$ khi $1\le i\le n$. Vì vậy

$$\alpha_j^2a_{ij}^2=\left(-\sum_{j\ne i}\alpha_j a_{ij}\right)^2\le\left(\sum_{j\ne i}\alpha_j^2\right)\left(\sum_{j\ne i}a_{ij}^2\right)=\left(1-\alpha_i^2\right)\left(1-a_{ii}^2\right),$$

tức là $a_{ii}^2+\alpha_i^2\le 1$. Như vậy

$$(a_i,e_i)+...+(a_n,e_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\le\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\alpha_i^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(1-\alpha_i^2\right)}=\sqrt{n(n-1)}\ .$$

Olympic- 1999

1999.1. Cho f: $S\to R$ liên tục trong đường tròn đơn vị của mặt phẳng phức. Xét trong đoạn [0,1] hàm liên tục $\varphi(t)=f\left(e^{\pi i(t+1)}\right)-f\left(e^{\pi it}\right)$. Khi đó $\varphi(0)=f(-1)-f(1)$, $\varphi(1)=f(1)-f(-1)=-\varphi(0)$ và theo lý thuyết Cauchy tìm được điểm $t_0\in[0,1]$ sao cho $\varphi(t_0)=0$, tức là $f\left(e^{\pi it_0}\right)=f\left(-e^{\pi it_0}\right)$.

1999.2.1. Cho $f_0(x)=\dfrac{2}{\pi}(\sin x+\cos x)$. Thứ nhất $f_0\in M$, thứ hai, đối với hàm bất kỳ $f\in M$ $\int_0^{\pi}\left(f(x)-f_0(x)\right)^2dx\ge 0$ vì vậy

$$\int_0^{\pi}f^2(x)dx\ge 2\int_0^{\pi}f(x)f_0(x)dx-\int_0^{\pi}f_0^2(x)dx=\frac{8}{\pi}-\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}=\int_0^{\pi}f_0^2(x)dx\,.$$

Như vậy cực tiểu đạt được khi $f\ =\ f_0$.

1999.2.2. Chúng ta có $y(x)=e^{x^2/2}\left(\int_{x_0}^{x}e^{-t^2/2}f(t)dt+C\right)$. Nếu $y(x)\to 0$ khi $x\to\infty$, thì

$$\int_{x_0}^{\infty}e^{-t^2/2}f(t)dt=-C=-\int_{-\infty}^{x_0}e^{-t^2/2}f(t)dt\,,$$

Suy ra nhận được điều kiện cần

$$P(z)=z^n+c_1z^{n-1}+...+c_n$$

$$\int_{-\infty}^{x_0}e^{-t^2/2}f(t)dt=0\,.$$

Chứng minh rằng khi thoả mãn điều kiện này nghiệm $y(x)=e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}f(t)dt=-e^{-x^2/2}\int_{x}^{+\infty}e^{-t^2/2}f(t)dt$ tiến tới 0 khi $x\to\infty$. Khi $x\to-\infty$ theo quy tắc Lopitan

$$\left|y(x)\right|\le\frac{\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\left|f(t)\right|dt}{e^{-x^2/2}}\sim\frac{e^{-x^2/2}\left|f(x)\right|}{xe^{-x^2/2}}=-\frac{\left|f(x)\right|}{x}\to 0\,.$$

Khi $x\to+\infty$ sử dụng phép đặt $y(x)=-e^{-x^2/2}\int_{x}^{+\infty}e^{-t^2/2}f(t)dt$ và thực hiện tương tự.

1999.3. Đặt $a_{n+1}=1-a_1-...-a_n$. Khi đó $a_{n+1}>0$, và bất đẳng thức cần chứng minh nhận dạng sau:

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1})}{a_1a_2...a_n(a_{n+1})}\geq n^{n+1}.$$

Ứng dụng bất đẳng thức trung bình nhận được đối với mỗi i=1,2,…,n+1: $1-a_i=a_1+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_{n+1}\geq n\sqrt[n]{a_1+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_{n+1}}$

Nhân các bất đẳng thức này với nhau ,

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1})\geq n^{n+1}a_1a_2...a_na_{n+1}.$$

1999.4. Kẻ qua gốc toạ độ trong mặt phẳng R^n sinh ra bởi các vector a và b. Nó cắt hình hộp theo tập hợp $\{\alpha a+\beta b\,|\,|\alpha a_k+\beta b_k|\leq 1, k=1,...,n\}$. Các vector a và b cần chọn sao cho thoả mãn các tính chất sau:

1) $\|a\|=\|b\|$ và (a,b)=0;

2) trong mặt phẳng hai chiều với các toạ độ (α,β) bất đẳng thức $|\alpha a_k+\beta b_k|\leq 1, k=1,...,n$, cho 2n eke chuẩn.

Cả hai tính chất thoả mãn ví dụ khi $a_k=\sin\frac{k\pi}{n},\ b_k=\cos\frac{k\pi}{n}$: $(a,b)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$,

$$\|a\|^2=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{n}{2},\ \|b\|^2=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{n}{2}.$$

1999.5. Bài toán đưa đến nghiệm phương trình phiếm hàm $2xf(x^2)=f(x)$. Một trong các nghiệm của chúng là hàm $f(x)=\frac{A}{x\ln x}$. Sau khi đặt trong tích phân chúng ta tìm được $A=\frac{1}{\ln 2}$.

1999.6. Tiếp cận ma trận

$$T(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{x}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{x}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{x}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=T_2T_1.$$

Sau khi nhân cho T_1 và ước lượng trong mỗi dòng .v.v. Ma trận T(x) không phải là ma trận đơn vị.

Olympic- 2000

2000.1. Không chắc chắn. Giả sử $A_n=\{1,3,...,2n-3,2n-1,2n\}$,

$$A_n = \{2, 4, ..., 2n-2, 2n, 2n+1\},\ F = \{A_1, B_1, A_2, B_2, ...\}.$$

Khi đó

$$A_k \cap B_m = \begin{cases} \{2k\}, & khi \quad m \ge k \\ \{2m+1\}, & khi \quad m < k. \end{cases}$$

2000.2. Nhận thấy rằng

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

Suy ra rằng

$$2I = \int_0^{\pi/2} \left(f(\sin\varphi)\cos\varphi + f(\cos\varphi)\sin\varphi \right) d\varphi \le \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

2000.3. Không tồn tại theo Cauchy. Chỉ ra rằng $\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{9}$ với bấtkỳ $N \ge 1$. Giữa 2N số $\pi(N+1), ..., \pi(3N)$, có ít nhất N số lớn hơn N. Như vậy,

$$\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{(3N)^2} \sum_{n=N+1}^{3N} \pi(n) > \frac{1}{9N^2}.N.N.$$

2000.4. Cho I là ma trận đơn vị bậc n. Khi đó ứng dụng quy tắc nhân hai ma trận, chúng ta nhận được

$$\det M.\det H = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \det A.$$

2000.5. Giả sử $\{e_1, e_2, ..., e_{10}\}$ là cơ sở trong L mà $\{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở trong L_1, còn $\{e_1, ..., e_6\}$ là cơ sở trong L_2. Trong cơ sở này ma trận biến đổi từ E có dạng

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Như vậy, dimE=3.3+3.6+4.10=67.

2000.6. Cần chứng minh bất đẳng thức khi n>1 và khi $x \neq x_i$, với $x_1, ..., x_n$ là các nghiệm của đa thức P(x), Chúng ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}, \qquad \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}.$$

Như vậy,

$$(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} =$$

$$= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 - n \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{(x - x_i)^2} -$$

$$- \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)} = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{1}{(x - x_i)} - \frac{1}{(x - x_j)}\right)^2 \ge 0.$$

Olympic- 2001

2001.1. Nếu 0=f(0), thì bài toán giải xong. Nếu 0<f(0), thì tập hợp $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$ không rỗng. Cho rằng a=supA, b=f(a). Chỉ ra rằng a=b.

Giả sử ngược lại: a<b hay a>b.

1) Nếu a<b, thì $b = f(a) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{a+b}{2} < b$.

2) Nếu a>b=f(a), thì $a \notin A$. Theo định nghĩa supA $\forall c < a \quad \exists x_c \in A : a \ge x_c > c$. Lấy c=b, nhận được $b = f(a) \ge f(x_b) > x_b > b$. Vì trong cả hai trường hợp nhận được điều mâu thuẫn nghĩa là a=b.

2001.2. Có đánh giá

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{j}}\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{j}}\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.i.\frac{x_i}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

2001.3. Lấy khoảng tuỳ ý $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Vì f không phải là hàm tăng trong đoạn $[x_0 - \delta, x_0]$, nên tìm các điểm $p, q \in [x_0 - \delta, x_0]$ sao cho p<q và f(p)>f(q). Tương tự tìm được các điểm $r, s \in [x_0, x_0 + \delta]$: r<s, f(r)<f(s) (vì f không phải là hàm giảm trong đoạn $[x_0, x_0 + \delta]$). Theo lý thuyết Vayerstrac trong đoạn [p,s] hàm f đạt được biên dưới của mình, và các điểm p, s không thể là điểm này của cực tiểu địa phương. Như vậy trong khoàng $(p, s) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ có điểm cựuc tiểu của hàm f.

2001.4. Nhận thấy rằng nếu $\exists x \in R_+ : \ f(x) > 1$, thì khi $y = \frac{x}{f(x) - 1}$ từ phương trình phiếm hàm suy ra rằng f(x)=1- mâu thuẫn.

Như vậy, $f(x) \le 1$ đối với tất mọi $x \in R_+$. Suy ra thoả mãn bất đẳng thức

$$\forall x, y \in R_+ \qquad \frac{f(x+y)}{f(x)} = f\left(y(f(x)\right) \le 1,$$

tức là hàm f giảm đơn điệu.

Nếu $\exists x \in R_+ :\ f(x) > 1$, thì f(y)=f(x+y) đối với mọi y>0, và vì tính đơn điệu suy ra rằng f=1 đồng nhất. Đây là nghiệm tầm thường.

Nếu f(x)<1 đối với mọi $x \in R_+$, thì f là hàm giảm nghiêm ngặt. Trong trường hợp này chúng ta có

f(x)f(y(f(x))=f(x+y)=f(y(f(x)+x+y(1-f(x)))=f(yf(x))f((x+y(1-f(x)))f(yf(x))).

Vì tính giảm nghiêm ngặt của hàm f suy ra rằng x=(x+y(1-f(x)))f(yf(x)). Trường hợp riêng đặt x=1, z=yf(1), chúng ta nhận được $f(x) = \dfrac{1}{1+ax}$, với $a = \dfrac{1-f(1)}{f(1)} > 0$. Nhận thấy rằng khi a=0 nhận được nghiệm tầm thường. Kiểm tra chỉ ra rằng $f(x) = \dfrac{1}{1+ax}$, $a \ge 0$ thoả mãn phương trình phiếm hàm.

2001.5. Cần kiểm tra rằng

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}G(x,y) = P^{(n)}(x)Q^{(1)}(y) + \ldots + P^{(1)}(x)Q^{(n)}(y).$$

2001.6. Nhận thấy rằng hình vuông có thể chia làm k^2 các hình vuông kích cở nhỏ hơn, $k \ge 2$.

Số này có thể tăng đến $k^2 + p(m^2-1) + q(n^2-1)$, với m, n, p, q là các số tự nhiên.

Nếu các số tự nhiên a,b là các số nguyên tố với nhau thì số nguyên bất kỳ c có thể đặt ở dạng c=ax+by ($x, y \in Z$). Khi đó nếu số tự nhiên c đủ lớn thì tìm được các nghiệm không tầm thường. Như vậy, {0,a,….(b-1)a} là hệ toàn bộ các thặng dư theo độ lớn b. Như vậy $ax \equiv c(\operatorname{mod} b)$ khi đó $x \in \{0,1,\ldots b-1\}$. Nếu $c \ge (b-1)a$, thì số $y = \dfrac{c-ax}{b}$ là nghiệm không tầm thường.

Lấy m=2, n=3 nhận được cặp các số nguyên tố cùng nhau $a = m^2 - 1 = 3$ và $b = n^2 - 1 = 8$. Tồn tại thác triển dạng $N = k^2 + 3p + 8q$ đối với số N đủ lớn suy ra từ đánh giá đưa vào ở trên.

Olympic- 2002

2002.1. Cho Δ_j là định thức của ma trận nhận được từ ma trận đơn vị bằng việc thay cột j cho $(x_1 y_j, \ldots, x_n y_j)^T$. Vì tính tuyến tính của định thức theo cột chúng ta có

$$\det A = \det E + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

2002.2. Cho

$$I_k = \int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^k\right)}{x}dx = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{\ln\left(1-y\right)}{y}dy.$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x\right)}{x}dx = I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}I_1, \text{ còn } I_3 = \frac{1}{3}I_1 = -\frac{2}{3}I = -\frac{\pi^2}{18}.$$

2002.3. Rõ ràng rằng $0 < x_n < 1$ với mọi n. Khi độ lớn đủ nhỏ hiệu quả khi thay bằng các nghịch đảo của chúng, vì vậy

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n^2/2002}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{2002x_{n+1}} = \frac{1}{2002 - x_n} \in \left(\frac{1}{2002}, \frac{1}{2001}\right).$$

Suy ra $\frac{1}{x_{2002}} = \Delta_{2002} + ... + \Delta_1 + \frac{1}{x_0} \in \left(1 + \frac{2002}{2002}, 1 + \frac{2002}{2001}\right)$.

Như vậy, $\frac{2001}{4003} < x_{2002} < \frac{1}{2}$.

2002.4. Điều kiện cần: đặt đa thức $P(x) = x^2$.

Tính cần của điều kiện được chỉ ra bằng phương pháp quy nạp:

$$\begin{aligned}
&(A+B)^{n+1} = (A+B)^n(A+B) = (A^n + nA^{n-1}B)(A+B) = \\
&= A^{n+1} + nA^{n-1}(BA + B^2) + A^nB = \\
&= A^{n+1} + nA^{n-1}AB + A^nB = A^{n+1} + (n+1)A^nB.
\end{aligned}$$

2002.5. Không thể. Nếu cho rằng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$ thì $q!\left(\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}\right) = k - \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}$,

với $k \in Z$. Chỉ ra rằng $0 < \left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| \le 1$. Như vậy,

$0 < \left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| \le \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + ... = \frac{1}{q} \le 1$; và suy ra rằng

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| < \frac{1}{q(q+1)} \le \frac{1}{q+1} = \left|\frac{\varepsilon_{q+1}q!}{(q+1)!}\right|.$$

2002.6. Lấy một điểm tuỳ ý $x \in R^n$. Vì tính không liên tục của chuẩn và tính compac của tập hợp A tìm được $a \in A$: $\|x-a\| = \sup_{y\in A}\|x-y\|$. Cho $l = \{x + \lambda(x-a) | \lambda > 0\}$. Kí hiệu $B_r(x) = \{y \in R^n | \|y-x\| \le r\}$. Khi đó đối với mọi $z \in L$ có

$$A \subset B_{\|x-a\|}(x) \subset B_{\|z-a\|}(z),$$

Thêm vào đó tiết diện các mặt của hai quả cầu lân cận là tập đơn {a}. Như vậy, $l \subset B$. Nhưng $x \in \overline{l}$, nên $x \in \overline{B}$.

Olympic- 2003

2003.1. $|ac+ad+bc-bd| \le |a|.|c+d|+|b|.|c-d| \le |c+d|+|c-d| \le 2\sqrt{2}$. Giá trị $2\sqrt{2}$ đạt được ví dụ khi a=b=1, $c=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $d=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

2003.2. Vì $e^x \ge 1+x$ đối với mọi $x \in R$ nên

$$\sum_{i,j=1}^{n} e^{(a_j,a_j)} \ge \sum_{i,j=1}^{n}\left(1+(a_i,a_j)\right) = n^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \ge n^2 .$$

2003.3. Lý thuyết Decarter khẳng định rằng đa thức dạng $P_n(x) = a_1x^{k_1}+...+a_nx^{k_n}$ $(k_1<k_2<...<k_n)$ có không ít hơn n-1 nghiệm dương, chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n. Khi n=2 $P_2(x) = x^{k_1}\left(a_1+a_2x^{k_2-k_1}\right)$. Chỉ ra rằng từ tính đúng đắn khẳng định đối với bậc n suy ra nó đúng đối với n+1. Cho N_f là số không dương của hàm trơn f(x). Khi đó theo lý thuyết Roll $N_{f'} \ge N_f - 1$. Vi phân đa thức $Q(x) = P_{n+1}(x)/x^{k_1}$, nhận được đánh giá

$$N_{P_{n+1}} = N_Q \le N_{Q'}+1 \le (n-1)+1 = n .$$

2003.4. Xét hàm số g(x)=f(x+a)-f(x). Cho rằng T>0 là chu kỳ của hàm f. Khi đó $\int_0^T g(x)dx = 0$. Như vậy, hoặc g(x)=0, hoặc g nhận giá trị có dấu khác nhau trong đoạn [0,T]. Giả sử $\xi < n,\ g(\xi)>0$, còn $g(\eta)<0$. Khi đó $g(\xi+\eta)>0$ và theo lý thuyết Cauchy trong mỗi tích phân (ξ,η), và $(\eta,\xi+T)$ hàm g có giá trị 0.

2003.5. Tìm đường thẳng song song đường thứ ba và cắt đường thứ nhất và đường thứ hai. Đoạn thẳng giới hạn bởi các giao điểm sẽ là cạnh của hình bình hành. Đối với điều này cần tìm γ sao cho đối với α và β nào đó thoả mãn đẳng thức $r_1+\alpha a_1+\gamma a_3 = r_2+\beta a_2$. Số α, β và γ xác định không duy nhất, vì các vector a_1,a_2,a_3 không đồng phẳng. Nhân đẳng thức cho $[a_1,a_2]$, nhận được $\gamma = (a_1,a_2,r_2-r_1)/(a_1,a_2,a_3)$. Như vậy vector đưa đến một trong các cạnh có dạng $a_3.(a_1,a_2,r_2-r_1)/(a_1,a_2,a_3)$. Các vector khác nằm tương tự. Tìm tích hỗn hợp các vector này nhận được câu trả lời.

$$V = \left|\frac{(a_1,a_2,r_2-r_1)(a_1,a_2,r_3-r_2)(a_1,a_2,r_1-r_3)}{(a_1,a_2,a_3)^2}\right|.$$

2003.6. Kí hiệu định thức ở phần trái là W_n. Đây là định thức Vandermon và nó bằng $W_n = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$. Chứng minh rằng $W_n^{\frac{4}{n(n-1)}} \le \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Để đánh giá phần bên trái trong đẳng thức cuối ứng dụng bất đẳng thức trung bình:

$$\left(\prod_{i>j}(x_i - x_j)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \le \frac{\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2}{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

nhưng $\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ vì bất đẳng thức cuối tương đương với $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \ge 0$.

Olympic- 2004

2004.1. Tìm ít nhất hai dòng , tất cả các phần tử của nó là số lẽ. Trừ dòng này cho dòng kia nhận được dòng gồm các số chẵn.

2004.2. Xác định $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Hàm F(x) là hàm liên tục và có chu kỳ. Giả sử a là cực tiểu địa phương của F(x). Khi đó đối với bất kỳ $b \in R$ có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ge 0.$$

2004.3. Cho a, b, c là các cạnh của tam giác khi đó

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc = 4SR \ge 2R,$$

Vì diện tích tam giác với các đỉnh là các số không nguyên không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

2004.4. Dễ dàng nhìn thấy rằng $P(x) = 1 + (x-1)^5 Q(x)$ ngoài ra $P(x) = O(x^{10})$ khi $x \to 0$. Khi đó

$$Q(x) = (1-x)^{-5} + O(x^{10}) = \sum_{k=0}^{9} C_{-5}^{k}(-x)^k + O(x^{10}).$$

Rõ ràng rằng Q(x) sẽ có bậc nhỏ nhất nếu

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{9} C_{-5}^{k}(-x)^k.$$

Như vậy,

$$P(x)=1+(x-1)^5\sum_{k=0}^{9}C_{-5}^k(-x)^k .$$

2004.5. Mỗi đường tròn phủ bởi parabol dạng $z=R_i^2-(x-x_i)^2-(y-y_i)^2$. Mỗi cặp parabol cắt nhau tạo ra một parabol mà hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy là đường thẳng. Nhưng mỗi parabol như thế hoặc cắt parabol thứ ba tại một điểm duy nhất hoặc không cắt nó.

2004.6.1. Chọn gốc toạ độ O là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng. Trục Ox hướng theo một đường sinh, trục Oy theo đường sinh khác còn trục Oz không đổi. Trong hệ toạ độ mới phương trình bề mặt có dạng z=g(x,y), với g là đa thức bậc không nỏ hơn 2, g(0,y)=g(x,0)=0, tức là g(x,y)=xyh(x,y). Còn lại chứng minh rằng h(x,y)=const.

Nhận thấy rằng nếu l là đường sinh nào đó, còn l_1 là hình chiếu của nó trong mặt phẳng Oxy, thì hàm g trên đường thẳng l_1 là tuyến tính. Như vậy giả sử l_1 có phương trình $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$ khi đó $g(x_0+at, y_0+bt)=z_0+ct$.

Xét điểm $(0,y_0,0)$ trong mặt phẳng, $y_0\neq 0$. Ngoài ra trục Oy qua điểm này còn đi qua một đường sinh l. Viết phương trình của nó có dạng $y=y_0+ax,\ z=bx$. Khi đó có một cách đồng nhất theo x:

$$bx=x(y_0+ax)h(x,y_0+ax) \qquad (*)$$

chỉ ra rằng a=0. Nếu điều này không xảy ra thì từ (*) suy ra rằng $h(x,y_0+ax)=0$ đồng nhất theo x, tức là đa thức g tiến đến 0 trong cả ba đường thẳng : x=0, y=0, $y=y_0+ax$. Chọn điểm tuỳ ý (x_1,y_1) trong tam giác, giới hạn bởi các đường thẳng này. Xét một trong hai đường sinh tạo thành, kẻ qua điểm $\left(x_1,y_1,g(x_1,y_1)\right)$. Hình chiếu của đường sinh cắt cạnh của tam giác tại hai điểm, ở những điểm này g tiến đến 0. Vì g trong hình chiếu của đường sinh, nên $g(x_1,y_1)=0$ bên trong tam giác, còn có nghĩa là khắp nơi vì g là đa thức. Điều này mâu thuẫn với $g\neq 0$.

Khi a=0 từ (*) chúng ta nhận được $h(x,y_0)=\alpha(y_0)$. Tương tự xét điểm $(x_0,0,0)$, nhận được $h(x_0,y)=\beta(x_0)$. Khi đó đối với bất kỳ điểm (x_0,y_0) có $h(x_0,y_0)=\alpha(y_0)=\beta(x_0)$ và h=const.

2004.6.2. Chúng ta có

$$A=\begin{pmatrix} B & C\\ C^T & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0\\ C^TB^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & D-C^TB^{-1}C\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} E & B^{-1}C\\ 0 & E\end{pmatrix}.$$

Như vậy ma trận A và ma trận $A_1=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & D-C^TB^{-1}C\end{pmatrix}$ là ma trận chỉ có dạng vuông trong các cơ sở khác nhau. Khẳng định của bai toán suy ra từ định luật quán tính dạng vuông.

Olympic- 2005

2005.1. Giả sử h(x)=xlnx+(1-x)ln(1-x), $g(x)=x^2+(1-x)^2.g'(x)=2(2x-1)$. Nếu $0\le x,y\le 1/2$ thì g(x)<g(y) chạy x>y, từ đó suy ra h(x)<h(y), vì

$$h'(x)=1+\ln x-1-\ln(1-x)=\ln\frac{x}{1-x}<0, \text{ vì } \frac{x}{1-x}<1 \text{ khi } 0<x<1/2.$$

2005.2. Chúng ta sẽ gọi phép giao hoán thoả mãn điều kiện là phép giao hoán hình răng cưa. Rõ ràng rằng số phép giao hoán hình răng cưa với điều kiện $\sigma(1)<\sigma(2)$ bằng một nữa số lượng chung. Khi đó số phép giao hoán hình răng cưa với điều kiện $\sigma(2006)=2006$ bằng $d_{2005}/2$, và trong mỗi phép giao hoán bất kỳ như thế $\sigma(2005)<2005$, nói cách khác $\sigma(2004)$ không xác định. So sánh phép giao hoán σ, $\sigma(2006)=2006$ với phép giao hoán σ' sao cho $\sigma'(i)=\sigma(i)$ khi $\sigma(i)<2005$, $\sigma'(2006)=2005$, $\sigma'(j)=2006$, với $\sigma(j)=2005$. Khi đó σ' cũng là phép giao hoán hình răng cưa, thêm vào đó những σ' khác nhau tương ứng khác nhau với σ. Vì vậy $d_{2006}\ge 2d_{2005}$. Còn lại nhận thấy rằng tồn tại ít nhất một phép giao hoán với $\sigma(2005)<\sigma(2006)<2005$.

2005.3. a) Giả sử $a=f'_+(0)$. Khi đó f(x)= ax+o(x), $x\to+0$,suy ra $x\left(ax+o(x)\right)+x^2=\left(ax+o(x)\right)\left(x+o(x)\right)+2\left(ax+o(x)\right)^2$, hay $x^2(2a^2-1)=o(x^2)$, tức là $a^2=1/2$, $|a|=1/\sqrt{2}$.

b) Nhận thấy rằng f(x)=0 $\Rightarrow$ x=0, vì vậy f(x) có dấu không đổi. Sẽ xem rằng $f(x)\ge 0$.

Cho rằng $F(x,y)=x\sin y+x^2-y\sin x-2y^2$. Theo công thức Taylor $F(x,y)=x^2-2y^2+o(x^2+y^2)$ khi $x,y\to 0$. Đặt y=f(x) nhận được $x^2-2f^2(x)=o\left(f^2(x)+x^2\right)$. Suy ra khi $x\to+0$ nhận được

$$\frac{x^2-2f^2(x)}{f^2(x)+x^2}\to 0 \quad \frac{3x^2}{f^2(x)+x^2}\to 2, \quad \frac{f^2(x)+x^2}{x^2}\to\frac{3}{2}, \quad \frac{f^2(x)}{x^2}\to\frac{1}{2}.$$

Khi không đổi dấu nhận được $f(x)/x\to 1/\sqrt{2}$.

2005.4. Cho O là tâm đối xứng, các điểm $A_0B_0\in G: A_0B_0=diam\,G$ (*). Khi đó các đường thẳng l_{10} và l_{20} ($A_0\in l_{10}, B_0\in l_{20}$; $l_{10},l_{20}\perp A_0B_0$) cắt G tại một điểm (cắt l_{10} tại điểm A_0, cắt l_{20} tại điểm B_0), vì nói cách khác theo lý thuyết Pitagor nhận được điều mâu thuẫn với điều kiện (*). Giả sử đường thẳng $l_0 // l_{10}$ và kẻ qua điểm O, A_1, và A_2 là các giao giểm của l_0 với G. Cho $l_1\cap G=\{B_1,B_2\}$ và $B_1B_2=\frac{1}{2}A_1A_2$ (tồn tại theo lý thuyết về giá trị trung gian của hàm lien tục trong đoạn). Cho rằng l_2 đối xứng l_1 đối với l_0, $l_2\cap G=\{C_1,C_2\}$, $C_1C_2=\frac{1}{2}A_1A_2$. Cho phép biến đổi Afin T biến hình bình hành $B_1B_2A_2O$ thành hình thoi $B_1B_2A_2O$ với cạnh bằng 1 và góc $\angle B_1OA_2=2\pi/3$. Khi đó T biến $B_1B_2A_2C_2C_1A_1$ thành hình sáu cạnh đều, nghĩa là $B_1B_2A_2C_2C_1A_1$ là hình cần tìm.

2005.5. Vì $\det(A+tB)^{-1} = \left(\det(A+tB)\right)^{-1}$là số nguyên nên nhận được $f(t) = \det(A+tB) = \pm 1$ khi t=0,1,…,25. Khi đó $f(t)^2 - 1$ là đa thức bậc không lớn hơn 20, có 26 nghiệm,vì vậy nó là đa thức không đồng nhất. Suy ra $\det(A+2005B) = \pm 1$và theo ký thuyết Camera các phần tử của ma trận $(A+2005B)^{-1}$ là các số nguyên.

2005.6. Cho $\varepsilon > 0$

$$\Delta(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 \big| \forall x \in U_\delta(x_0) \quad \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon\}.$$

dễ dàng nhận thấy rằng $\forall \varepsilon > 0\ \Delta(\varepsilon) \in (0, +\infty]$, thậm chí nếu $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, thì $\Delta(\varepsilon_1) \le \Delta(\varepsilon_2)$ (cho rằng $+\infty \le +\infty$). Nếu đối với bất kỳ $\varepsilon > 0\ \Delta(\varepsilon_0) = +\infty$, thì $f(x) = f(x_0)$ và khẳng định đã rõ ràng.

Cho rằng $\exists \varepsilon_0 : \Delta(\varepsilon_0) < +\infty$. Khi đó hàm số

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \Delta(t)dt, & 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^{\varepsilon_0} \Delta(t)dt, & \varepsilon_0 \le \varepsilon, \end{cases}$$

là hàm số cần tìm.

Olympic- 2006

2006.1. Giả sử $h_2(x) = \max\{f''(x), 0\}$, $g_2(x) = \max\{-f''(x), 0\}$. Cho rằng

$$h_1(x) = \int_0^x \left(\int_0^t h_2(\tau)d\tau \right) dt, \quad g(x) = \int_0^x \left(\int_0^t g_2(\tau)d\tau \right) dt.$$

Vì $f''(x) = h_2(x) - g_2(x)$, thì tìm được số a,b sao cho $f(x) = h_1(x) - g(x) + ax + b$. Khi đó f(x)=h(x)-g(x), với $h(x) = h_1(x) + ax + b$, tính lồi h và g suy ra từ tính không âm của các đạo hàm bậc hai.

2006.2.1. Chúng ta có $x_n \ge \sqrt[3]{6} > 1$ và $x_n \le \sqrt[3]{6 + ... + \sqrt[3]{8}} = 2$ đối với mọi n. Ngoài ra $\{x_n\}$ tăng đơn điệu nghiêm ngặt, vì vậy theo lý thuyết Vayerstrass suy ra $\lim x_n = 2$. Nhận thấy rằng

$$0 \le 2 - x_{n+1} = \frac{8 - x_{n+1}^3}{4 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} = \frac{2 - x_n}{4 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} \le \frac{2 - x_n}{7}$$

chúng ta nhận được $\lim 6^n (2 - x_n) = 0$.

2006.2.2. Vì $\{x_k\}$ giảm đơn điệu đến 0, nên dãy $\alpha_k = \frac{x_k}{k^\alpha}$ cũng giảm đơn điệu đến 0. Vì $\sum_{m=k+1}^{2k} \alpha_m \geq \alpha_{2k}.k$ và chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ hội tụ, vì tiêu chuẩn Cauchy tính hội tụ của chuỗi số chúng ta nhận được $2k.\alpha_{2k} \to 0$. Suy ra vì tính đơn điệu của $\{\alpha_k\}$ chúng ta có $\alpha_k = \frac{\varepsilon_k}{k}$, $\varepsilon_k \to 0$.

$$\frac{x_k}{k^\alpha} = \frac{\varepsilon_k}{k} \Rightarrow x_k = \frac{\varepsilon_k}{k^{1-\alpha}} \Rightarrow x_k^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\varepsilon_k^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k} \leq \frac{\varepsilon_k}{k},$$

bất đẳng thức cuối cùng tin được với mọi k đủ lớn. Như vậy chuỗi số $\sum x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}$ hội tụ theo dấu hiệu so sánh.

2006.3.1. Theo lý thuyết Gaus và Roll đa thức P' có n-1 nghiệm $\{e_j\}_{j=1}^{n-1}$, thêm vào đó mỗi trong các điểm e_j ở hàm P hoặc cực tiểu địa phương hoặc cực đại địa phương. Giả sử $M = \max\{f(e_j)\}_{j=1}^{n-1}$, $m = \min\{f(e_j)\}_{j=1}^{n-1}$. Giả sử $z_1 = \max\{x \mid P(x) = M\}$, $z_0 = \min\{x \mid P(x) = m\}$. Cho rằng $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ là nghiệm của đa thức P(x)=0. Nếu đối với k nào đó thoả mãn $x_k \in [m, M]$, thì tồn tại không ít hơn hai nghiệm của $P(y) = x_k$; vì đối với mỗi k tồn tại mâu thuẫn với điều kiện P(P(x))=0 có n nghiệm. Vì vậy đối với mỗi k $x_k < m$ hay $x_k > M$.

Giả sử $P(y_k) = x_k$, tức là $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ là nghiệm của P(P(x))=0. Nếu ví dụ đối với k đã cho $x_k > M$, thì $y_k > z_1 \geq x_k > M$, bất đẳng thức đầu tiên vì tính tăng đơn điệu nghiêm ngặt của P trong khoảng $[z_1, +\infty)$. Tương tự nếu $x_k < m$, thì $y_k < z_0 \leq x_k < m$. Như vậy phương trình $P(x) = y_k$ có một nghiệm đối với mọi $k \in \overline{1,n}$. Như vậy phương trình P(P(P(x)))=0 có n nghiệm.

2006.3.2. Viết tích phân thứ nhất

$$\frac{(y')^2}{2} - \cos y = \frac{\left(y'(0)\right)^2}{2} - \cos y(0) = C.$$

Suy ra $(y')^2 = 2C + 2\cos y$. Nếu $C \leq 1$, thì nghiệm y(x) bị giới hạn và $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = 0$. Giả sử C>1. Khi đó nghiệm không giới hạn. Cho $y' = \sqrt{2C + 2\cos y}$. Suy ra

$$\frac{dy}{\sqrt{2C + 2\cos y}} = dx \Rightarrow \int_{y(0)}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2C + 2\cos y}} = x(y) - x\left(y(0)\right).$$

Từ điều này khi $y \to \infty$ nhận được

$$\int_{y(0)}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}} \sim \frac{y-y(0)}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}} = \frac{y-y(0)}{2\pi}A,$$

$$A = \int_{0}^{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}}.$$

Suy ra $x(y) \sim \dfrac{y-y(0)}{2\pi}A$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{2\pi}{A}$.

2006.4. Có thể cho rằng ở cả 4 hàm phần bình phương bằng x^2+y^2. Trong trường hợp này đối với điểm p nằm ngoài đường tròn, cho bởi phương trình f(x)=0, giá trị hàm f(p) bằng bình phương độ dài tiếp tuyến với đường tròn.

Chứng minh rằng nếu tồn tại đường tròn vuông góc, thì các phương trình độc lập tuyến tính. Cho rằng tâm của đường tròn này nằm ở gốc toạ độ. Khi đó độ lớn các tiếp tuyến từ gốc toạ độ đến tất cả các đường tròn bằng bán kính đường tròn vuông góc, nghĩa là tất cả các phương trình của các đường tròn có dạng

$$f_i(x) = x^2 + y^2 + a_i x + b_i y + C$$

và biểu diễn tuyến tính qua ba hàm x^2+y^2+C, x, y. Vì 4 phương trình nên chúng không độc lập tuyến tính.

Trong trường hợp ngược lại. Từ tính chuẩn hoá phần bình phương suy ra sự phụ thuộc

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0$$

tổng $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$. Xác định $\lambda_4 \neq 0$. Tìm được điểm p, tại đó $f_1(p)=f_2(p)=f_3(p)$. Điểm như vậy tìm được vì điều kiện tại điểm p đưa đến hệ phương trình tuyến tính với định thức khác không (vì không có bất kỳ hai tâm nào nằm trên cung một đường thẳng); nói cách khác có thể chỉ ra rằng p là tâm chính của ba đường tròn thứ nhất. Khi đó

$$f_4(p) = -\frac{\lambda_1 f_1(p) + \lambda_2 f_2(p) + \lambda_3 f_3(p)}{\lambda_4} = f_1(p) = f_2(p) = f_3(p),$$

Ngoài ra, từ điều kiện suy ra rằng p nằm ngoài cả 4 đường tròn và độ dài các tiếp tuyến với 4 đường tròn xuất phát từ p đều bằng l. Khi đó đường tròn với tâm p và bán kính l vuông góc với 4 đường đã cho.

2006.5.1. Ban đầu cho A là đa giác lồi $a_1a_2...a_n$. Tập hợp $A_\varepsilon = U_{a\in A}\left(a + B_\varepsilon(0)\right)$ nhận được nếu tại mỗi đỉnh lấy quả cầu $B_\varepsilon(a_k)$ và sau đó lấy lớp vỏ lồi $U_{1\le k\le n}\left(a_k + B_\varepsilon(0)\right)$ (tức là tập lồi nhỏ nhất chứa liên kết n quả cầu). Tập hợp nhận được A_ε khác với A bởi sự tồn tại n góc hình chữ nhật rộng ε, được dựng ở các cạnh của A, thậm chí n hình quạt của đường tròn bán kính ε, thêm vào đó kích cỡ xuyên tâm tổng cộng của tất cả các hình quạt bằng 2π, tức là trong tổng hình quạt tương ứng đường tròn.

Tổng diện tích tất cả các hình chữ nhật, hình quạt và chính tập hợp A là $S(A_\varepsilon) = S(A) + l(\partial A)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$, với $l(\partial A)$ là độ dài biên A. Như vậy đối với hình chữ nhật A nhận được

$$a = S(A),\ b = l(\partial A),\ c = \pi \qquad (*)$$

Chứng minh rằng công thức (*) tin được cả trong trường hợp compac lồi tuỳ ý A.

Theo điều kiện $\partial A = \{r(s) | \ s \in [0, l(\partial A)]\}$, s là sự tham số hoá tự nhiên của biên (thực tế điều này tin được đối với compac lồi tuỳ ý). Đối với n tự nhiên xác định $r_k = r\left(\frac{k}{n} l(\partial A)\right)$, $1 \le k \le n$; G_n là gấp khúc với các đỉnh r_k, k=0,1,…,n. Theo những gì đã xây dựng $|G_n| \to l(\partial A)$ khi $n \to \infty$. Cố định $s \in \left[\frac{k}{n} l(\partial A), \frac{k+1}{n} l(\partial A)\right]$. Khoảng cách từ r(s) đến G_n là $\rho\left(r(s), G_n\right) \le \|r(s) - r_k\| \le \max\limits_{s \in [0, l(\partial A)]} \|r'(s)\| . \frac{l(\partial A)}{n} = \varepsilon_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Như vậy nếu A_n là hình chữ nhật giới hạn bởi G_n thì

$$A_n \subset A \subset \bigcup_{a \in A_n} \left(a + B_{\varepsilon_n}(0)\right),$$

Như vậy,

$$S(A_n) \le S(A) \le S(A_n) + |G_n| \varepsilon_n + \pi \varepsilon_n^2 \le S(A_n) + 2l(\partial A)\varepsilon_n + \pi \varepsilon_n^2 \qquad (**)$$

với mọi n đủ lớn. Như vậy, $S(A_n) \to S(A), |G_n| \to l(\partial A)$.

Khi đưa ra (**) dễ dàng chỉ ra rằng $\forall \varepsilon > 0$

$$\left(A_n\right)_\varepsilon \subset A_\varepsilon \subset \bigcup_{a \in (A_n)_\varepsilon} \left(a + B_{\varepsilon_n}(0)\right)$$

Và

$$S\left((A_n)_\varepsilon\right) \le S(A_\varepsilon) \le S\left((A_n)_\varepsilon\right) + 2l(\partial A_\varepsilon)\varepsilon_n + \pi \varepsilon_n^2$$

đối với n đủ lớn (ở đây $\varepsilon_n = \max\limits_{s \in [0, l(\partial A_\varepsilon)]} \|r'(s)\| . \frac{l(\partial A_\varepsilon)}{n}$. Chuyển đẳng thức $S\left((A_n)_\varepsilon\right) = S(A_n) + l(\partial A_n)\varepsilon + \pi \varepsilon^2$ đến giới hạn khi $n \to \infty$ nhận được $S(A_\varepsilon) = S(A) + l(\partial A)\varepsilon + \pi \varepsilon^2$.

2006.5.2. Chia tích phân thành hai phần:

$$\int\limits_{R^2} \exp\left(-\rho(x, A)\right) dx = \int\limits_A e^0 dx + \int\limits_{R^2 \setminus A} \exp\left(-\rho(x, A)\right) dx,$$

tức là tích phân bằng

$$\int_{R^2\setminus A} \exp\left(-\rho(x,A)\right)dx,$$

với S(A) là diện tích tập hợp A. Tập hợp các điểm mà khoảng cách từ chúng đến ∂A là $\varepsilon > 0$ đây là biên của tập hợp $A_\varepsilon = U_{a\in A}\left(a + B_\varepsilon(0)\right)$. Biên của ∂A_ε là đường trơn với độ dài $l(\partial A) + 2\pi = 2\pi\varepsilon$. Suy ra

$$\int_{R^2\setminus A} \exp\left(-\rho(x,A)\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon}\left(l(\partial A) + 2\pi\varepsilon\right)d\varepsilon = l(\partial A) + 2\pi = 5\pi - S(A) = 4\pi .$$

Như vậy, $l(\partial A) = 2\pi$ (vậy tập hợp A là đường tròn bán kính bằng 1).

2006.6. Cho $\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$. $\det \tilde{A}$ và $\left|\det A\right|^2$ là đa thức từ $N = 2n^2$ biến b_{jk} và c_{jk}. Cho rằng V là lân cận điểm R^N, sao cho $b_{jk} = 0\ \ \forall j,k, c_{jk} = 0$ khi $j \ne k$, $c_{kk} = k, 1 \le k \le n$. Ma trận tương ứng $A = diag\{i, 2i, ..., ni\}$.

Nếu V đủ nhỏ sao cho mỗi ma trận A tương ứng với điểm trong V có n giá trị riêng khác nhau. Cho rằng A là ma trận, λ là một trong các giá trị riêng của nó, còn z là vector riêng tương ứng.

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az \\ -iAz \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix},$$

Như vậy, λ là giá trị riêng của $\tilde{A}$, còn vì $\tilde{A}$ thực nên $\overline{\lambda}$ cũng là giá trị riêng của $\tilde{A}$. Cho $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng khác nhau của A. Thì $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, ..., \lambda_n, \overline{\lambda_n}$ là các giá trị riêng khác nhau của $\tilde{A}$ và trong lân cận V thoả mãn $\left|\det A\right|^2 = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k . \overline{\lambda_k} = \det \tilde{A}$. Vì các đa thức $\left|\det A\right|^2$ và $\det \tilde{A}$ trùng với tập mở V nên chúng đồng nhất bằng nhau.

Olympic- 2007

2007.1. Cho $x \in C$, khi đó $f(x) \le \|x - y\| + f(y)$ đối với bất kỳ $y \in C$, vì vậy $f(x) \le \inf_{y\in C}\left(\|x-y\| + f(y)\right) = g(x)$. Vì $g(x) \le \|x - x\| + f(x) = f(x)$, nên g(x)=f(x).

Cho $x_1, x_2 \in R^n$ và $g(x_1) \le g(x_2)$. Đối với bất kỳ $\varepsilon > 0$ tìm được $y_1 \in C$: $g(x_1) > \|x_1 - y_1\| + f(y_1) - \varepsilon$. Từ đó và từ bất đẳng thức $g(x_2) \le \|x_2 - y_1\| + f(y_1)$ suy ra rằng :

$$g(x_1) > \|x_2 - y_1\| - \|x_1 - y_1\| + \varepsilon \le \|x_1 - x_2\| + \varepsilon.$$

Vì tính tuỳ ý $\varepsilon > 0$ nhận được $g(x_1) \le g(x_2)$ $\varepsilon > 0$.

2007.2.1. Vì

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}) = ... = \frac{x_0 - x_1}{n!}(-1)^n,$$

Nên

$$\lim x_n = x_0 + \sum_{n\ge 1}(x_n - x_{n-1}) = x_0 + \left(x_0 - x_1\right)\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^n}{n!} = a + (a-b)(e^{-1}-1).$$

2007.2.2. Cố định $\varepsilon > 0$. Cho rằng $\frac{a_1 + ... + a_n}{n} = a + \varepsilon_n$, $a \in R, \varepsilon_n \to \infty$.

Nhớ lại dấu hiệu Abel: Cho α_n và β_n là các dãy số, $B_n = \beta_1 + ... + \beta_n$ $\{\alpha_n B_n\}$ và giả sử dãy $\{\alpha_n B_n\}$ hội tụ . Khi đó chuỗi $\sum \alpha_n B_n$ và $\sum(\alpha_n - \alpha_{n+1})B_n$ đồng thời hội tụ và phân kỳ.

Ứng dụng dấu hiệu Abel đối với $\alpha_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \beta_n = a_n$. Khi đó $B_n = na + n\varepsilon_n, \alpha_n B_n = \frac{a+\varepsilon_n}{n^{\varepsilon}} \to 0$. Vì vậy chuỗi từ điều kiện bài toán có tính hội tụ vậy chuỗi $\sum\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\right)(a+\varepsilon_n)n$, hội tụ theo dấu hiệu so sánh (thành phần thứ n tiệm cận bằng $\frac{1+\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}}(a+\varepsilon_n)$).

2007.3.1. Bổ đề. Cho a,b không song song với nhau. Khi đó $\exists\varepsilon > 0 : \forall z \in B_\varepsilon(a), \forall y \in B_\varepsilon(b)$ các vector x và y không song song với nhau.

Chứng minh. Giả sử điều ngược lại: $\forall k\, \exists x_k \in B_{1/k}(a)$ và $\exists y_k \in B_{1/k}(b)$: x_k và y_k song song với nhau. Vì $a, b \ne 0$, nên $x_k, y_k \ne 0$ (đối với các chỉ số k đủ lớn) và $\lambda_k x_k + y_k \ne 0$ đối với $\lambda_k = \pm\|y_k\|/\|x_k\|$ (đối với một trong các dấu). Vì tính hội tụ $x_k \to a, y_k \to b$ chúng ta nhận được giới hạn $\lambda a + b = 0$, với $\lambda = \lim\lambda_k = \pm\|b\|/\|a\|$. Điều mâu thuẫn.

Cho P_k là dãy các hình bình hành với các đỉnh $\left\{x_k^i\right\}_{i=1}^4$ sao cho $B \subset P_k$ đối với mọi k và

$$\lim S(P_k) = S = \inf\{S(P) \mid P - hinh\,binh\,hanh, B \subset P\} \qquad (*)$$

Vì { P_k } bị chặn nên cho rằng $\lim x_k^i = x^i$, $1 \le i \le 4$. Vì bổ đề các điểm $\left\{x^i\right\}_{i=1}^4$ là các đỉnh của hình bình hành P, ở đó vì tính liên tục diện tích đạt được giá trị S trong (*). Chứng minh rằng trung điểm các cạnh P là các điểm từ B.

Giả sử điều ngược lại. Cho O là tâm đối xứng của B (và P), $y = \frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right)$. Cho rằng $[x^1, x^2] \cap B = [a,b]$ (vì tính lồi của B) và $y \notin [a,b]$. Khi đó $\exists\varepsilon > 0 : [a,b] \cap B_\varepsilon(y) = \varnothing$. Cho $[a,b] \subset [x^1, y]$, $y_\varepsilon = y + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x^1 - x^2}{\|x^1 - x^2\|}$. Vì tính lồi của B thoả mãn $[y_\varepsilon, x^2] \cap B = \varnothing$, vì vậy (vì tính compac của tập hợp trong đẳng thức cuối) $\exists\delta > 0$: δ là lân cận $[y_\varepsilon, x^2]$ không cắt B.

Cho $z = x^2 + \frac{\delta}{2}\frac{x^3 - x^2}{\left\| x^3 - x^2 \right\|}$. Theo xây dựng $[y_\varepsilon, z] \cap B = \varnothing$. Cho w là giao điểm của đường thẳng $aff\{y_\varepsilon, z\}$ và đường thẳng $aff\{x^1, x^4\}$. Cho w' và z' là các điểm đối xứng bởi các điểm w và z đối với điểm O. Vì diện tích tam giác wx_1y_ε nhỏ hơn hẳn diện tích tam giác zx^2y_ε nên hình bình hành $wzw'z'$ chứa B (vì tính đối xứng tâm) và có diện tích nhỏ hơn P.

2007.3.2. Rõ ràng rằng nghiệm (nếu tồn tại) được vi phân vô hạn lần trên R và

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{2^k} x^{(k-1)}(t/2) + e^t,$$

Nói riêng

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2^k} x^{(k-1)}(0) + 1$$

Và theo quy nạp $0 \le x^{(k)}(0) \le 2$ đối với mọi số tự nhiên k.

Cố định M>0 và đoạn [-M,M]. Cho $C = e^M$. Vì $x(.) \in C^\infty([-M, M])$, nên tìm được $L_k > 0$:

$$\left| x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2) \right| \le L_k.\left| t_1 - t_2 \right|, \quad \forall t_1, t_2 \in [-M, M].$$

$$\left| x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2) \right| \le \left| x^{(k-1)}(t_1/2) - x^{(k-1)}(t_2/2) \right| + \left| e^{t_1} - e^{t_2} \right| \le \frac{L_{k-1}}{2}\left| t_1 - t_2 \right| + C\left| t_1 - t_2 \right|,$$

tức là có thể xem rằng $L_k \le \frac{L_{k-1}}{2} + C$. Tiếp tục hạ xuống theo k, Nhận được $L_k \le L_0 + 2C$. Từ đó và từ $0 \le x^{(k)}(0) \le 2$ suy ra rằng $x^{(k)}(t)$ bị chặn đều trong đoạn [-M,M]. Vì tính tuỳ ý M>0 hàm số x(t) được đặt bởi chính chuỗi taylor $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ trên trục số. Có thể đặt chuỗi trong phương trình và tìm các hệ số $a_0 = 1 = x(0)$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1).2^n} a_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

2007.4.1. Xét hàm số hữu tỷ $r(x) = \frac{x^k}{f(x)}$ và khai triển nó ở dạng tổng các phần tử. Khai triển sẽ có dạng

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x - x_i}$$

từ chỗ $k \le n - 2$ suy ra rằng:

$$\lim_{x \to \infty} xr(x) = 0,$$

từ đó chúng ta nhận được $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$. Còn lại nhận thấy

$$c_i = \lim_{x \to x_i} (x - x_i) r(x) = \frac{x_i^k}{f'(x_i)}.$$

2. Nghiệm này đối với tất cả những ai quen với lý thuyết hàm biến số phức. Hàm $g(z) = z^k / f(z)$ khi $k \le n-2$ bằng 0 trừ đi vô hạn điểm, vì $g(z) \sim \frac{1}{z^{n-k}}$ khi $z \to \infty$.

Còn lại nhận thấy rằng $res_{z=x_i} g(z) = \frac{x_i^k}{f'(x_i)}$, còn tổng tất cả các thặng dư bằng 0.

2007.5. Cho x là đỉnh của A. Nếu x=0 thì chọn m các cột độc lập tuyến tính của ma trận T (hạng của T bằng m) trong vai trò $T_1, ..., T_m$, nhận được điều kiện cần.

Cho $x \in A \setminus \{0\}$ là đỉnh. Rõ ràng rằng có thể đánh số các phần tử x như sau $x_1 > 0, ..., x_r > 0$, còn $x_k = 0$ khi $r+1 \le k \le n$.

Chỉ ra rằng trong tổng

$$Tx = \sum_{k=1}^{r} T_k x_k + \sum_{k=r+1}^{n} T_k x_k$$

các cột $\{T_k\}_{k=1}^r$ độc lập tuyến tính. Điều này chứng minh được.

Giả sử, $\{T_k\}_{k=1}^r$ độc lập tuyến tính khi đó tìm được vector $a \in R^n$: $a = (\alpha_1, ..., \alpha_r, 0, ..., 0) \ne 0$ sao cho $\sum_{k=1}^{r} T_k x_k = 0$. Chọn $\varepsilon > 0$, sao cho đối với mọi k từ 1 đến r thoả mãn bất đẳng thức $x_k \pm \varepsilon \alpha_k \ge 0$, Chúng ta có

$$T(x \pm \varepsilon a) = \sum_{k=1}^{r} T_k \left(x_k \pm \varepsilon \alpha_k \right) + \sum_{k=r+1}^{n} T_k x_k = \sum_{k=1}^{r} T_k x_k \pm \varepsilon \sum_{k=1}^{r} T_k \alpha_k = b,$$

Như vậy, $[x - \varepsilon a, x + \varepsilon a] \subset A$ và có nghĩa là x không phải là đỉnh. Điều mâu thuẫn.

2007.6.1. Vì tính nội tiếp của tất cả các tập hợp không rỗng, nên xem rằng $0 \in \operatorname{int} A, 0 \in \operatorname{int} B, 0 \in \operatorname{int} C$ (nếu điều này không như vậy thì bị lệch tập hợp ra khỏi vector tương ứng).

Đối với vector đơn vị $p \in R^2$ xác định điểm x_p^A (duy nhất!) là điểm của tập hợp A, trong đó đạt cực đại tích vô hướng (p,x) theo mọi $x \in A$. Ý nghĩa tương tự sẽ đưa đến cho x_p^B đối với tập hợp B và x_p^C đối với tập hợp C.

Cho S là đường tròn đơn vị với tâm tại 0. Chỉ ra rằng ánh xạ $S \ni p \to x_p^A$ liên tục. Giả sử điều ngược lại: $\exists \varepsilon > 0$ và $p_k \to p_0$ là các vector đơn vị, thêm vào đó $x_{p_k}^A \notin B_\varepsilon(x_{p_0}^A)$. Khi đó vì tính compac có thể xem rằng $x_{p_k}^A \to x_0 \in \partial A \setminus B_\varepsilon(x_{p_0}^A)$. Các điểm x_0 và $x_{p_0}^A$ đưa đến các cực đại của tích vô hướng (p_0 ,x) theo $x \in A$, vì vậy đoạn $[x_0, x_{p0}^A] \subset \partial A$, điều này mâu thuẫn ở chỗ biên A không chứa các đoạn.

Cho $\left(\lambda(t), \varphi(t)\right)$ là các thành phần của đường Piano, ánh xạ (liên tục) [0,1] vào hình chữ nhật $[0,1]_\lambda \times [0, 2\pi]_\varphi$. Cho $p(t) = \left(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\right)$.

Vì $\lambda x_p^A + \lambda x_p^B = \lambda x_p^C$ với mọi $p \in S$, $\lambda \in [0,1]$ và $C = \{\lambda x_p^C \,\big|\, \lambda \in [0,1], p \in S\}$, nên $a(t) = \lambda(t) x_{p(t)}^A$, $b(t) = \lambda(t) x_{p(t)}^B$.

2. Chứng minh một cách đơn giản nếu sử dụng việc tất cả các compac lồi một chiều toàn hình, xem [12] T.1, câu 11.3.1.

Cho $K = [0,1]^2, \varphi : K \to A$ là phép đồng phôi, biến K thành A, $\psi : K \to B$ là phép đồng phôi biến K thành B. Cho $\left(x(\tau), y(\tau)\right)$ là các thành phần của đường liên tục chuẩn Piano. Khi đó rõ ràng rằng

$$\{\varphi\left(x(\tau), y(\tau)\right) + \psi\left(x(\mu), y(\mu)\right) \big| \, (\tau, \mu) \in K\} = C .$$

Bây giờ chọn $\tau = x(t),\ \mu = y(t)$, khi đó $a(t) = \varphi\left(x\left(x(\tau)\right), y\left(y(\tau)\right), b(t) = \psi\left(x\left(x(\mu)\right), y\left(y(\mu)\right)\right)\right)$.