

BÀI 13. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Phương pháp giải: áp dụng định lý

$$\begin{cases} a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

Nhận xét: Thực chất của việc chứng minh 2 mặt phẳng song song là tìm 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng này song song với 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng kia. Vậy:

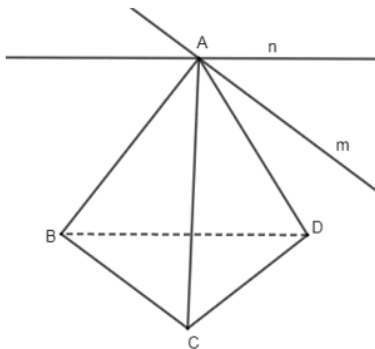
$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \not\subset (\beta), b \subset (\beta) \\ a \cap b = I \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ a \parallel c, b \parallel d \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

Chứng minh 2 mặt phẳng đó cùng song song với mặt phẳng khác.

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\gamma) \\ (\beta) \parallel (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

Câu 1. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Trong không gian, cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Qua điểm A vẽ hai đường thẳng m, n lần lượt song song với hai đường thẳng BC, BD . Chứng minh rằng $mp(m, n)$ song song với mặt phẳng (BCD) .

Lời giải

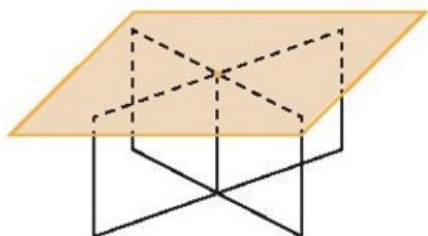


Vì $m \parallel BC$ nên $m \parallel (BCD)$.

Vì $n \parallel BD$ nên $n \parallel (BCD)$.

$mp(m, n)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau m và n (cắt nhau tại A) cùng song song với mặt phẳng (BCD) nên $mp(m, n)$ song song với mặt phẳng (BCD) .

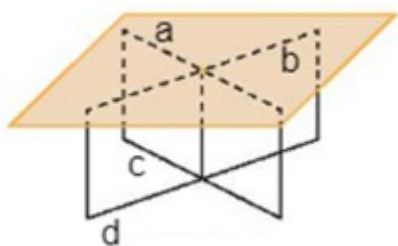
Câu 2. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Một chiếc bàn có phần chân là hai khung sắt hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục như trong Hình 4.43.



Hình 4.43

Khi mặt bàn được đặt lên phần chân bàn thì mặt bàn luôn song song với mặt đất. Hãy giải thích tại sao.

Lời giải



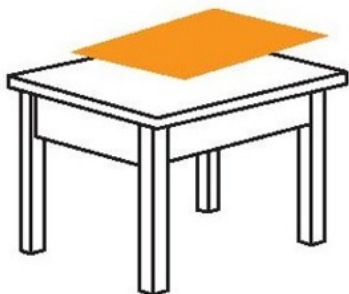
Đặt tên các đường thẳng như trong hình vẽ dưới đây.

Vì các khung sắt có dạng hình chữ nhật nên các cạnh đối diện của khung sắt song song với nhau, do đó $a \parallel c$ và $b \parallel d$.

Vì c và d là các đường thẳng của chân bàn nằm trên mặt đất, nên $a \parallel c$ thì đường thẳng a song song với mặt đất và $b \parallel d$ thì đường thẳng b song song với mặt đất.

Mặt phẳng bàn chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng song song với mặt đất nên mặt phẳng bàn song song với mặt đất.

Câu 3. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Đặt một tấm bìa cứng lên một góc của mặt bàn nằm ngang (H.4.44) sao cho mặt bìa song song với mặt đất. Khi đó mặt bìa có trùng với mặt bàn hay không?



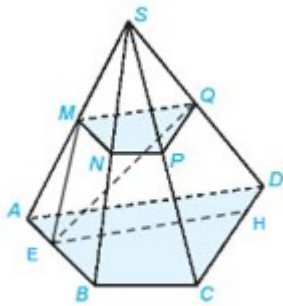
Hình 4.44

Lời giải

Mặt bàn nằm ngang thì song song với mặt đất. Khi tấm bìa cứng được đặt lên một góc của mặt bàn nằm ngang sao cho mặt bìa song song với mặt đất thì mặt bìa trùng với mặt bàn.

Câu 4. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, CD . M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (EMQ) và mặt phẳng $(ABCD)$.

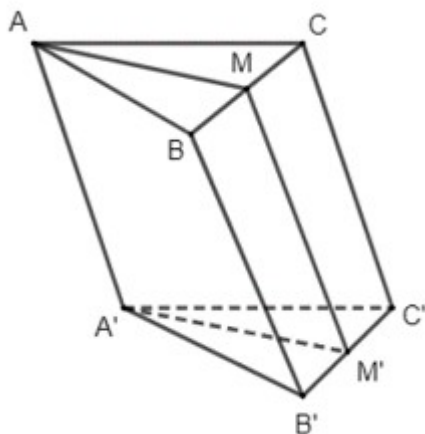
Lời giải



Trong Ví dụ 2, ta đã chứng minh được hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$ song song với nhau. Vì vậy hai giao tuyến của mặt phẳng (EMQ) với hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$ song song với nhau. Ta có $(EMQ) \cap (MNPQ) = MQ$. Trong mặt phẳng (MEQ) , qua E vẽ đường thẳng song song với MQ cắt CD tại $H (EH \parallel MQ \parallel AD)$ thì đường thẳng EH là giao tuyến của hai mặt phẳng (EMQ) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 5. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Chứng minh rằng $AMC.A'M'C'$ là hình lăng trụ.

Lời giải



Vì các cạnh bên của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đôi một song song nên AA', BB', CC' đôi một song song (1).

Ta có $BB' \parallel CC'$ nên $BCC'B'$ là hình thang.

Vì M và M' lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $B'C'$ nên MM' là đường trung bình của hình thang $BCC'B'$, suy ra MM', BB', CC' đôi một song song (2).

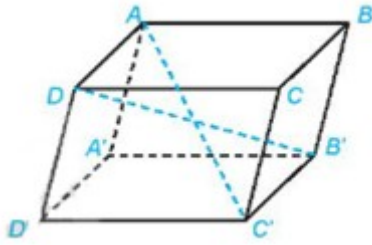
Từ (1) và (2) suy ra MM', AA', CC' đôi một song song.

Mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng $(A'B'C')$ nên mặt phẳng (AMC) song song với mặt phẳng $(A'M'C')$.

Do vậy, $AMC.A'M'C'$ là hình lăng trụ.

Câu 6. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$ song song với nhau.

Lời giải



Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình bình hành.

Ta có: $AD \parallel BC$ (do $ABCD$ là hình bình hành), do đó $AD \parallel (BCC'B')$

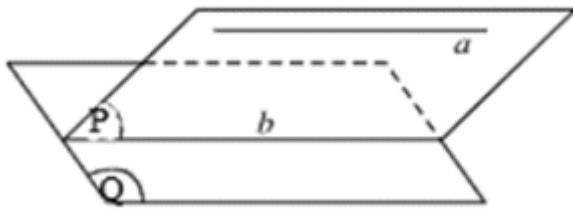
Lại có: $AA' \parallel BB'$ (các cạnh bên của hình hộp), do đó $AA' \parallel (BCC'B')$. Mặt phẳng $(ADD'A')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau AD và AA' cùng song song với mặt phẳng $(BCC'B')$ nên hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$ song song với nhau.

Câu 7. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Trong không gian cho ba mặt phẳng phân biệt $(P), (Q), (R)$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

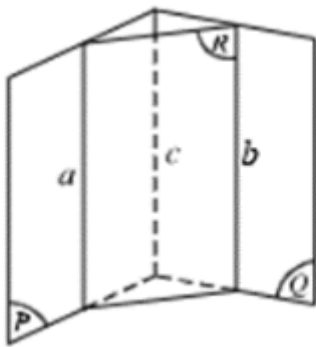
- Nếu (P) chứa một đường thẳng song song với (Q) thì (P) song song với (Q) .
- Nếu (P) chứa hai đường thẳng song song với (Q) thì (P) song song với (Q) .
- Nếu (P) và (Q) song song với (R) thì (P) song song với (Q) .
- Nếu (P) và (Q) cắt (R) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Lời giải

a) Mệnh đề a) là mệnh đề sai vì hai mặt phẳng (P) và (Q) có thể cắt nhau theo giao tuyến b song song với đường thẳng a nằm trong (P) .

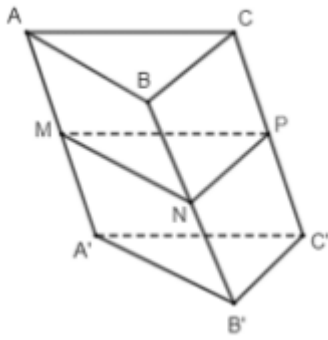


- Mệnh đề b) là mệnh đề sai vì thiếu điều kiện hai đường thẳng đó phải cắt nhau.
- Mệnh đề c) là mệnh đề đúng vì (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba là mặt phẳng (R) thì (P) và (Q) song song với nhau.
- Mệnh đề d) là mệnh đề sai vì (P) và (Q) cắt (R) thì (P) và (Q) có thể cắt nhau.



Câu 8. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC' . Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác nên $ABB'A'$ và $BCC'B'$ là các hình bình hành hay cũng là các hình thang.

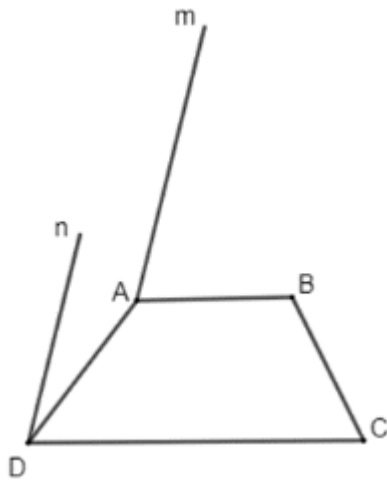
Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên MN là đường trung bình của hình thang $ABB'A'$, do đó $MN \parallel AB$, suy ra MN song song với mặt phẳng (ABC) .

Tương tự, ta chứng minh được $NP \parallel BC$, suy ra NP song song với mặt phẳng (ABC) .

Mặt phẳng (MNP) chứa hai đường thẳng cắt nhau MN và NP cùng song song với mặt phẳng (ABC) nên hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) song song với nhau.

Câu 9. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD . Qua các điểm A, D lần lượt vẽ các đường thẳng m, n song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng $mp(B, m)$ và $mp(C, n)$ song song với nhau.

Lời giải

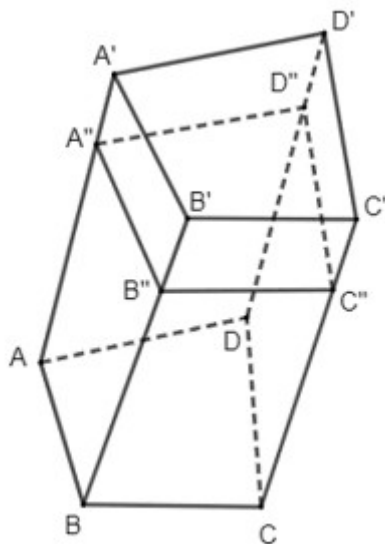


Vì $m \parallel n$ nên đường thẳng m song song với $mp(C, n)$.

Vì $ABCD$ là hình thang có hai đáy là AB và CD nên $AB \parallel CD$, suy ra đường thẳng AB song song với $mp(C, n)$. $mp(B, m)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau m và AB cùng song song với $mp(C, n)$ nên $mp(B, m)$ và $mp(C, n)$ song song với nhau.

Câu 10. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C'', D'' . Hỏi hình tạo bởi các điểm $A, B, C, D, A'', B'', C'', D''$ là hình gì?

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác nên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song với nhau, mà mặt phẳng $(A''B''C''D'')$ song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó, hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A''B''C''D'')$ song song với nhau (1).

Vì các cạnh bên của hình lăng trụ đôi một song song với nhau nên $AA''; BB''; CC''$ đôi một song song (2).

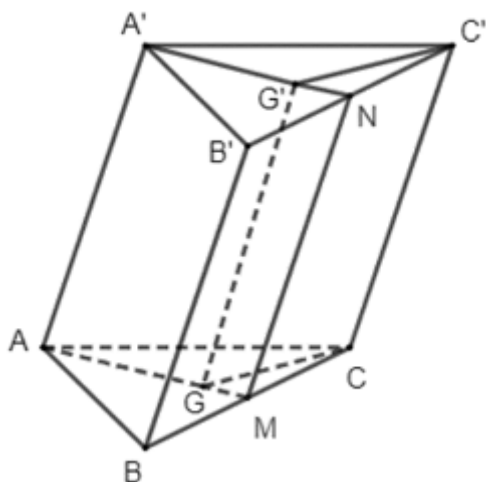
Từ (1) và (2) suy ra $ABCD.A''B''C''D''$ là hình lăng trụ tứ giác. Vậy hình tạo bởi các điểm $A, B, C, D, A'', B'', C'', D''$ là hình lăng trụ tứ giác.

Câu 11. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

Lời giải



a) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$: Khi đó ta có MN là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$, suy ra $MN \parallel BB'$ và $MN = BB'$.

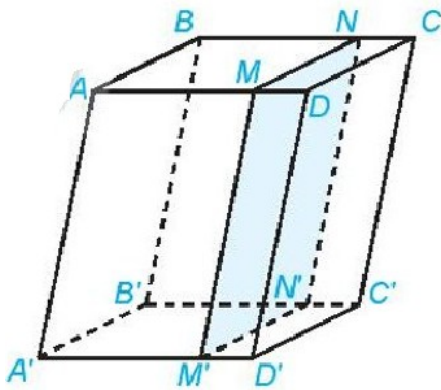
Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác nên $AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$.

Từ đó suy ra $MN \parallel AA'$ và $MN = AA'$: Do đó, $AMNA'$ là hình bình hành.

Suy ra $AM \parallel A'N$ và $AM = A'N$.

Vì G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ nên $\frac{AG'}{AN} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.
 Do đó, $AG = A'G'$ và $AG \parallel A'G'$: Từ đó suy ra tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành.
 b) Vì tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành nên $AA' \parallel GG'$.
 Tương tự ta chứng minh được $CGG'C'$ là hình bình hành nên $CC' \parallel GG'$.
 Do đó, ba đường thẳng AA', GG' và CC' đôi một song song.
 Lại có hai mặt phẳng (AGC) và $(A'G'C')$ song song với nhau.
 Vậy $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ tam giác.

Câu 12. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt bên $(ABB'A')$ của hình hộp và cắt các cạnh $AD, BC, A'D', B'C'$ lần lượt tại M, N, M', N' (H.4.54).



Hình 4.54

Chứng minh rằng $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp.

Lời giải

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên các cạnh bên AA', BB', CC', DD' đôi một song song với nhau và $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

Vì M thuộc AD và N thuộc BC nên MN nằm trong mặt phẳng $ABCD$, tương tự $M'N'$ nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Do đó, $(ABNM) \parallel (A'B'N'M')$ (1).

Ta có: $(ABB'A') \parallel (MNN'M')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ cắt $(ABB'A')$ và $(MNN'M')$ lần lượt theo các giao tuyến AB và MN , do đó $AB \parallel MN$.

Tương tự, ta chứng minh được: $M'N' \parallel A'B'; NN' \parallel BB'; MM' \parallel AA'$.

Mà $AA' \parallel BB'$ do đó bốn đường thẳng AA', BB', NN', MM' đôi một song song với nhau (2).

Từ (1) và (2) suy ra $ABNM.A'B'N'M'$ là hình lăng trụ.

Tứ giác $ABNM$ có $AB \parallel MN$ và $AM \parallel BN$ (do $AD \parallel BC$) nên $ABNM$ là hình bình hành.

Tứ giác $A'B'N'M'$ có $A'B' \parallel M'N'$ và $A'M' \parallel B'N'$ (do $A'D' \parallel B'C'$) nên $A'B'N'M'$ là hình bình hành.

Hình lăng trụ $ABNM.A'B'N'M'$ có đáy là hình bình hành nên nó là hình hộp.

Câu 13. (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cầu thang xương cá là dạng cầu thang có hình dáng tương tự như những đốt xương cá, thường có những bậc cầu thang với khoảng mở lớn, tạo được sự nhẹ nhàng và thoáng đãng cho không gian sống. Trong Hình 4.55, phần mép của mỗi bậc thang nằm trên tường song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.55

Lời giải

Các bậc cầu thang là các mặt phẳng song song với nhau từng đôi một, mặt phẳng tường cắt mỗi mặt phẳng là các bậc của cầu thang theo các giao tuyến là phần mép của mỗi bậc cầu thang nằm trên tường nên các giao tuyến này song song với nhau.

Câu 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF . Chứng minh:

a. $(ADF) \parallel (BCE)$ b. $(DIK) \parallel (JBE)$

Lời giải

a. Chứng minh: $(ADF) \parallel (BCE)$

$$AF \parallel BE \Rightarrow AF \parallel (BCE)$$

$$AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (BCE)$$

$$\text{Mà: } AF, AD \subset (ADF) \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$$

b. Chứng minh $(DIK) \parallel (JBE)$

$$IK \parallel BE \Rightarrow IK \parallel (JBE)$$

$$ID \parallel BJ \Rightarrow ID \parallel (JBE)$$

$$\text{Mà: } IK, ID \subset (DIK) \Rightarrow (DIK) \parallel (JBE)$$

Câu 15. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AB, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE .

Chứng minh $(IJK) \parallel (CDEF)$

Lời giải

Gọi P, Q, H lần lượt là trung điểm của FD, DC, EC .

$$\text{Vì } I \text{ là trọng tâm của } \triangle AFD \Rightarrow \frac{AI}{AP} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\text{Vì } J \text{ là trọng tâm của } \triangle ADC \Rightarrow \frac{AJ}{AQ} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{AI}{AP} = \frac{AJ}{AQ} \Rightarrow IJ \parallel PQ \Rightarrow IJ \parallel (CDEF)$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có:

$$\Rightarrow JK // DH \Rightarrow JK // (CDEF)$$

Mà JH, IJ cùng thuộc $(IJK) \Rightarrow (IJK) // (CDEF)$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC

a) Chứng minh rằng: $(HIK) // (ABCD)$

b) Gọi M là giao điểm của AI và KD , N là giao điểm của DH và CI . Chứng minh rằng $(SMN) // (HIK)$

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $(HIK) // (ABCD)$

$$HI // AB \Rightarrow HI // (ABCD)$$

$$KI // BC \Rightarrow KI // (ABCD)$$

Mà: $HI, KI \subset (KIH) \Rightarrow (KIH) // (ABCD)$

b) Chứng minh rằng: $(SMN) // (HIK)$

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \cap (SCD) = SM \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{array} \right\} \Rightarrow AB // CD // SM \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (SAD) \cap (SBC) = SN \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ BC // AD \end{array} \right\} \Rightarrow BC // AD // SN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SMN) // (ABCD)$

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC' . Chứng minh rằng:

a) $(EFG) // (ABCD)$ Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và $(C'D'D)$

b) Tìm giao điểm của $A'C$ và $(C'BD)$

Lời giải

a) $(EFG) // (ABCD)$ (học sinh tự giải)

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và $(C'D'D)$

Nhận thấy: $(ABD) = (ABCD)$ và $(C'D'D) = (C'D'DC)$

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N, P là trung điểm $A'B', BC, DD'$. Chứng minh $(MNP) // (CB'D')$

Lời giải

Gọi O là trung điểm của $B'C$

*) Tam giác $BB'C$: $NO // = \frac{1}{2}BB'(1)$

*) $BB' // = DD' \Rightarrow D'P // = \frac{1}{2}BB'(2)$

*) từ (1) và (2) $\Rightarrow NO // = D'P \Rightarrow$

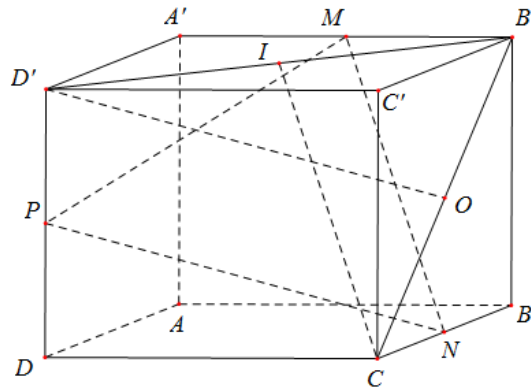
tứ giác $PNOD'$ là hình bình hành

$\Rightarrow PN // D'O(3)$

*) Và I là trung điểm của $B'D'$.

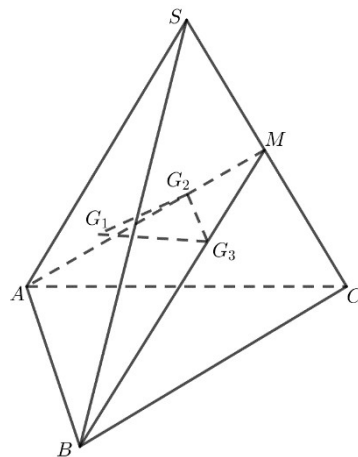
Tương tự: $MN // CI(4)$

*) Từ (3), (4) $\Rightarrow (MNP) // (CB'D')$



Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SAC . Chứng minh $(G_1G_2G_3) // (ABC)$.

Lời giải



*) Gọi M là trung điểm của $SC \Rightarrow \frac{MG_3}{MA} = \frac{MG_2}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_2G_3 // (ABC) (1)$

*) Ta chứng minh: $G_1G_2 // AC (2)$

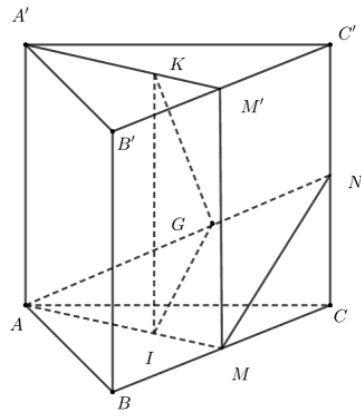
*) Từ (1), (2) $\Rightarrow (G_1G_2G_3) // (ABC)$

Câu 20. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Chứng minh:

a) $(IKG) // (BCC'B')$

b) $(A'KG) // (AIB')$

Lời giải



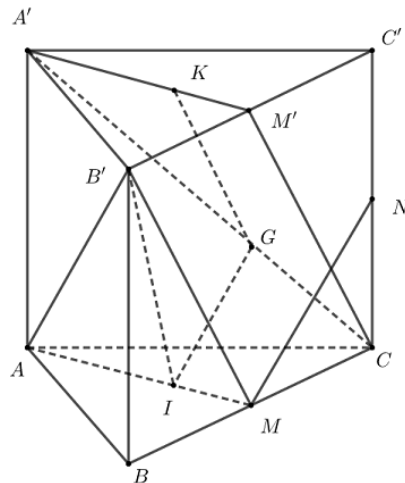
- a) Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C' \Rightarrow KM' // IM$ hoặc $KM' \equiv IM$
 $\Rightarrow$ tứ giác $KIMM'$ là hình bình hành $\Rightarrow IK // MM'$ (1)

Gọi N là trung điểm của CC' , theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{AG}{AN} = \frac{1}{3} = \frac{AI}{AM}$

Theo Ta-let $\Rightarrow IG // MN$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (IGK) // (BCC'B')$

b)



Ta có $A'K // AI$ (1)

*) Nối $AI \cap BC = M \Rightarrow M$ là trung điểm của BC .

*) Nối $A'K \cap B'C' = M' \Rightarrow M'$ là trung điểm của $B'C'$.

*) Theo bổ đề $A'G$ qua C .

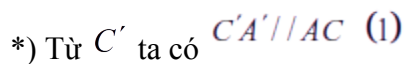
$\Rightarrow (A'GK) \equiv (A'M'C) \quad (AIB') \equiv (B'AM)$

*) $B'C' // (\equiv) BC \Rightarrow B'M' // (\equiv) CM \Rightarrow$ Tứ giác $B'C'CM$ là hình bình hành $\Rightarrow B'M // CM'$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (A'KG) // (AIB')$

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB' . Chứng minh $C'I // (ACD')$.

Lời giải



*) Từ I ta có $A'B // CD'$ (2)

*) Từ (1), (2) ta có $\begin{cases} (D'AC) // (BA'C') \\ C'I \in (BA'C') \end{cases} \Rightarrow C'I // (D'AC)$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD , $N \in AC$, điểm E đối xứng với D qua A . Chứng minh $MN \parallel (SEB)$.

Goi $K = DN \cap EB$

Ta có: $\begin{cases} AE \parallel BC \\ AE = BC \end{cases} \Rightarrow AEBC$

là hình bình hành

$$\Rightarrow AC \parallel EB \Rightarrow AN \parallel BE \Rightarrow N \text{ là trung điểm của } DK$$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $SDK \Rightarrow MN // SK, SK \subset (SEB)$.

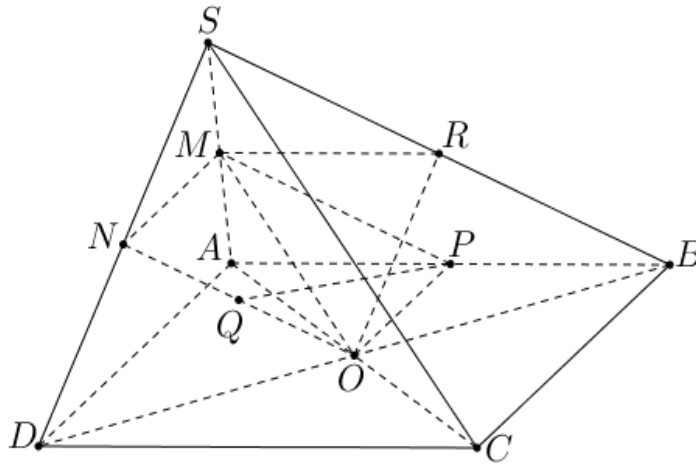
Vậy $MN \parallel (SEB)$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

a) Chứng minh $(SBC) // (OMN)$.

b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB . Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$ và $(OMR) \parallel (SCD)$

Lời giải



a) Ta có: MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN \parallel AD$ hay $MN \parallel BC$.

$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \not\subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel (SBC) \quad (1) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$$

Tương tự OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM \parallel SC$.

$$\begin{cases} OM \parallel SC \\ OM \not\subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC) \quad (2) \\ SC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$MN \cap OM = M \text{ trong } (OMN) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $(SBC) \parallel (OMN)$.

b) Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$

Ta có: OP là đường trung bình của tam giác ABC nên $OP \parallel BC, OP = \frac{1}{2}BC$.

MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN \parallel AD, MN = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác $BC = AD, BC \parallel AD$

suy ra $MN \parallel OP, MN = OP$ hay $MNOP$ là hình bình hành.

Vậy $PQ \subset (OMN), (OMN) \parallel (SBC)$ nên $PQ \parallel (SBC)$.

Chứng minh $(OMR) \parallel (SCD)$

Ta có: MR là đường trung bình của tam giác SAB nên $MR \parallel AB$ hay $MR \parallel CD$.

$$\begin{cases} MR \parallel CD \\ MR \not\subset (SCD) \Rightarrow MR \parallel (SCD) \quad (1) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

Tương tự OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM \parallel SC$.

$$\begin{cases} OM \parallel SC \\ OM \notin (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD) (2) \\ SC \subset (SCD) \end{cases}$$

$$MR \cap OM = M \text{ trong } (OMR) (3)$$

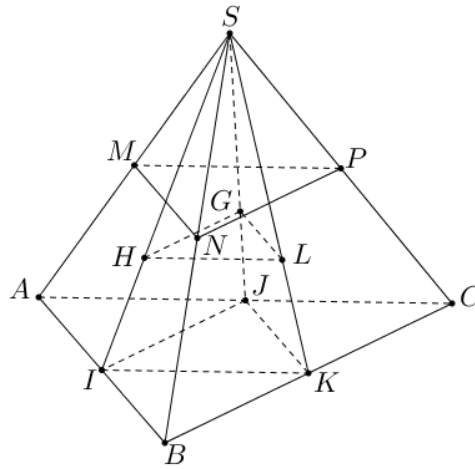
Từ (1), (2), (3) suy ra $(SCD) \parallel (OMR)$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC .

a) Chứng minh $(MNP) \parallel (ABC)$.

b) Gọi H, G, L lần lượt là trọng tâm tam giác SAB, SAC, SBC . Chứng minh $(HGL) \parallel (MNP)$.

Lời giải



a) Ta có: MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.

$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN \notin (ABC) \Rightarrow MN \parallel (ABC) (1) \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$$

Tương tự MP là đường trung bình của tam giác SAC nên $MP \parallel AC$.

$$\begin{cases} MP \parallel AC \\ MP \notin (ABC) \Rightarrow MP \parallel (ABC) (2) \\ AC \subset (ABC) \end{cases}$$

$$MN \cap MP = M \text{ trong } (MNP) (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $(MNP) \parallel (ABC)$.

b) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, AC, BC . Khi đó ta có:

$$* HG \parallel IJ \text{ (vì trong tam giác } SIJ \text{ có } \frac{SH}{SI} = \frac{SG}{SJ} = \frac{2}{3} \text{) và } IJ \subset (ABC), HG \notin (ABC)$$

$$\text{Do đó } HG \parallel (ABC) (4)$$

$$* HL \parallel IK \text{ (vì trong tam giác } SIK \text{ có } \frac{SH}{SI} = \frac{SL}{SK} = \frac{2}{3} \text{) và } IK \subset (ABC), HL \notin (ABC)$$

$$\text{Do đó } HL \parallel (ABC) (5)$$

$$HG \cap HL = H \text{ trong } (HGL) \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra $(HGL) \parallel (MNP)$

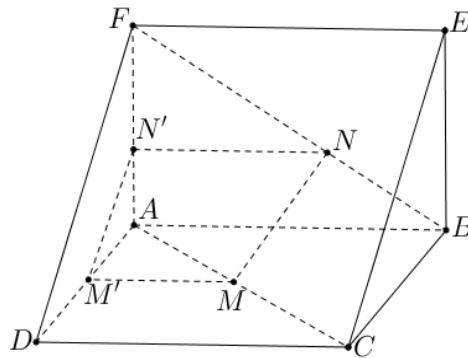
Mà $(ABC) \parallel (MNP)$ nên $(HGL) \parallel (MNP)$ (đpcm).

Câu 25. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' . Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$

b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE)$

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1)

Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$ (2)

$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$
 $\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$

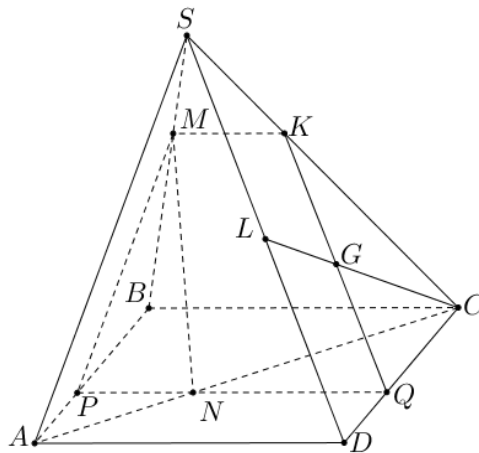
Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các điểm M, N lần lượt thuộc các

cạnh SB, AC sao cho $\frac{BM}{MS} = \frac{CN}{NA} = x, (0 < x \neq 1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tìm x để $(MNG) // (SAD)$.

Lời giải



Gọi các giao điểm của (MNG) với các cạnh hình chóp như hình vẽ.

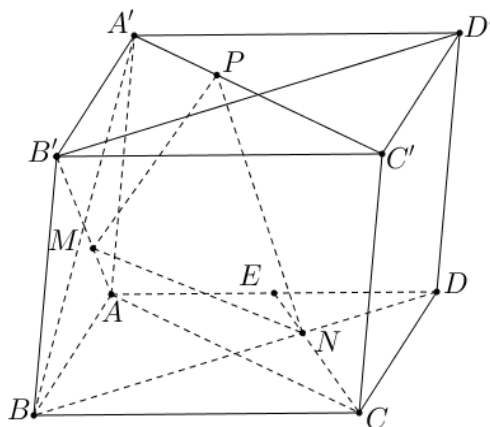
Ta có $\frac{BM}{MS} = \frac{CN}{NA} = x, (0 < x \neq 1)$ nên BC, MN, SA lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MN \parallel (SAD), \forall x \in (0 < x \neq 1)$. Do đó

$$(MNG) \parallel (SAD) \Leftrightarrow NQ \parallel AD \Leftrightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{QC}{QD} \Leftrightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{GC}{GL} = 2$$

Vậy với $x=2$ thì $(MNG) \parallel (SAD)$.

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác $AA'B, ACD, A'B'D'$. Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (BCC'B')$.

Lời giải

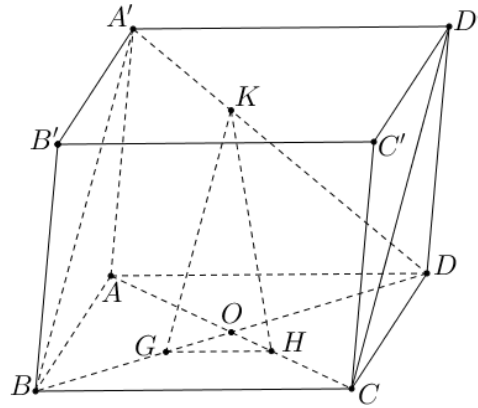


Ta có M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác $AA'B, ACD$ nên $\frac{MA}{MB'} = \frac{NE}{NC} = \frac{1}{2}$, suy ra $AE, MN, B'C$ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MN \parallel (BCC'B')$ (1).

Tương tự ta có $\frac{MA}{MB'} = \frac{PA'}{PC'} = \frac{1}{2}$, $\frac{MA}{MB'} = \frac{NE}{NC} = \frac{1}{2}$, suy ra AA' , MP , $B'C'$ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MP \parallel (BCC'B')$ (2).
 Từ (1) và (2) suy ra: $(MNP) \parallel (BCC'B')$.

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G, H, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC , BCD , $A'AD'$. Chứng minh rằng $(GHK) \parallel (A'BCD')$.

Lời giải



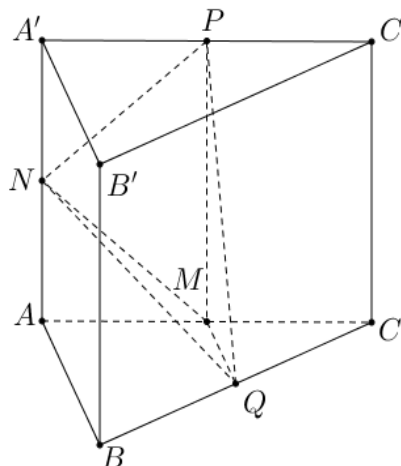
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có G, H lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, BCD nên $\frac{OG}{OB} = \frac{OH}{OC} \Rightarrow GH \parallel BC \Rightarrow GH \parallel (A'BCD')$. Tương tự G, K lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'AD'$

nên $\frac{DG}{DB} = \frac{DK}{DA'} \Rightarrow KG \parallel A'B \Rightarrow KG \parallel (A'BCD')$

Vậy $(GHK) \parallel (A'BCD')$.

Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, AA', A'C', BC$. Chứng minh rằng $(MNQ) \parallel (A'B'C)$.

Lời giải



Ta có: $QM \parallel AB \parallel A'B'$ (vì QM là đường trung bình trong tam giác ABC) $\Rightarrow QM \parallel (A'B'C)$ (1).

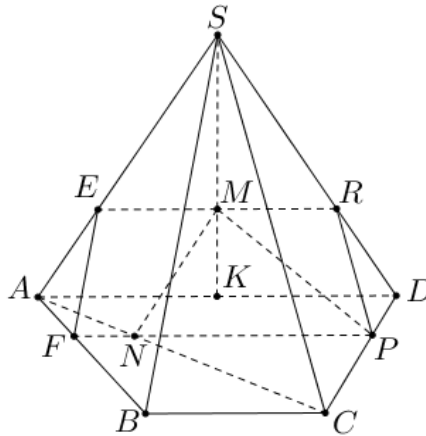
Mặt khác $MN \parallel A'C$ (vì MN là đường trung bình của tam giác ACA') $\Rightarrow MN \parallel (A'B'C)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (MNQ) \parallel (A'B'C)$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là AD . Gọi M là trọng tâm tam

giác SAD , N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD = \frac{PC}{2}$. Chứng minh rằng $MN \parallel (SBC)$ và $(MNP) \parallel (SBC)$.

Lời giải



Trong tam giác CAD có:
$$\begin{cases} NA = \frac{NC}{2} \\ PD = \frac{PC}{2} \end{cases} \Rightarrow NP \parallel AD \parallel BC$$

$M \in (SAD) \cap (MNP)$.

Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) là đường thẳng d qua M song song với BC , AD và NP .

Gọi R là giao điểm của d với SD .

Ta có: $\frac{DR}{DS} = \frac{DP}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow PR \parallel SC$.

$$\begin{cases} NP \not\subset (SBC), PR \not\subset (SBC) \\ NP \cap PR = P \in (MNP) \\ NP \parallel BC, PR \parallel SC \\ BC, SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SBC)$$

$$\begin{cases} (MNP) \parallel (SBC) \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBC)$$

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẪNG VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT MẶT PHẪNG ĐÓ SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẪNG CHO TRƯỚC.

Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau

- Khi $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng.

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = d \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = d' \parallel d, M \in d' \\ M \in (\alpha) \cap (\gamma) \end{cases}$$

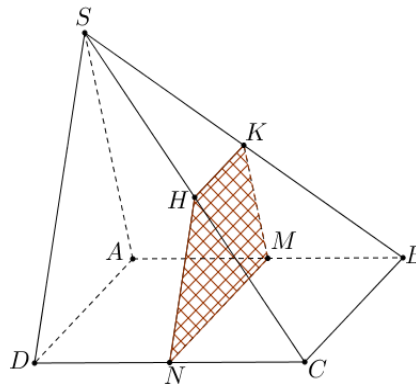
- Sử dụng

- Tìm đường thẳng d nằm trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d , khi đó $(\alpha) \parallel d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d .

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) .
- Thiết diện vừa tìm được là hình gì?

Lời giải



$$\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$$

- Ta có

$$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB.$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC \end{cases}$$

Để thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện cần tìm là tứ giác $MNHK$.

- Ba mặt phẳng $(ABCD)$, (SBC) và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN , HK , BC .

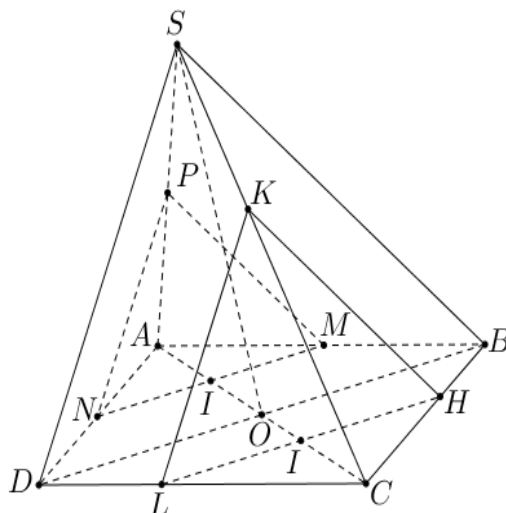
Mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) đi động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua

điểm I trên đoạn AC và $AI = x$ ($0 < x < a$).

- a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) .
 b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x .

Lời giải



a) **Trường hợp 1.** Xét I thuộc đoạn OA

$$\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$$

Ta có

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \parallel BD, I \in MN.$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP \parallel SD, P \in SN. \end{cases}$$

Vậy thiết diện là tam giác MNP .

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \Rightarrow MP \parallel SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases}$$

Do . Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC , tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL (như hình vẽ).

b) **Trường hợp 1.** I thuộc đoạn OA

$$S_{BCD} = \frac{BD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}, \quad \frac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\frac{MN}{BD} \right)^2$$

Ta có

$$\text{Do } MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \left(\frac{2x}{a} \right)^2 S_{BCD} = \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}.$$

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC , tính tương tự ta có

$$S_{MNP} = \left(\frac{HL}{BD} \right)^2 \cdot S_{BCD} = \left[\frac{2(a-x)}{a} \right]^2 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{b^2 (a-x)^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

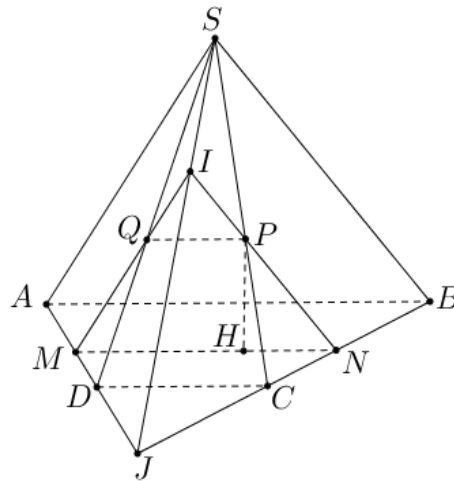
$$S_{\alpha} = \begin{cases} \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}; & I \in (OA) \\ \frac{b^2 (a-x)^2 \sqrt{3}}{a^2}; & I \in (OC) \end{cases}$$

Vậy

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$. Trên cạnh AD lấy điểm M .

- a) Gọi N, P, Q theo thứ tự là giao điểm của mặt phẳng (α) và các cạnh BC, SC, SD . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Thiết diện là hình gì?
- b) Gọi I là giao điểm của MQ và NP . Chứng minh rằng điểm I nằm trên một đường thẳng cố định.
- c) Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Tìm x để $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



- a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α)

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAD) \cap (SAB) = SA \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = d_1 \quad (M \in d_1, d_1 \parallel SA) \\ M \in (SAD) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } Q = d_1 \cap SD$$

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = d_2 \quad (M \in d_2, d_2 \parallel AB) \\ M \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } N = d_2 \cap BC$$

$$+ \begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = d_3 \quad (N \in d_3, d_3 \parallel SB) \\ N \in (SBC) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } P = d_3 \cap SC.$$

Vậy thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

$$\text{b) Vì } \begin{cases} MQ \subset (SAD) \\ NP \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \\ MQ \cap NP = I \end{cases}$$

Gọi $J = AD \cap BC$, khi đó I nằm trên đường thẳng cố định SJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

c) Để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn thì điều kiện là $MN + PQ = MQ + NP$.

Ta có $\frac{DM}{DA} = \frac{MQ}{SA} \Leftrightarrow MQ = \frac{DM}{DA} \cdot SA \Leftrightarrow MQ = \frac{a-x}{a} \cdot 2a = 2(a-x)$ (do $MNPQ$ là hình thang cân nên ta có $MQ = NP$).

$$\frac{AM}{AD} = \frac{PQ}{CD} \Leftrightarrow PQ = \frac{AM}{AD} \cdot CD \Leftrightarrow PQ = \frac{x}{a} \cdot a = x$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{JM}{JA} \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{JD + DM}{JD + DA} \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{\frac{a}{2} + a - x}{\frac{a}{2} + a} = \frac{3a - 2x}{3a} \Leftrightarrow MN = \frac{3a - 2x}{3a} \cdot 3a = 3a - 2x$$

$$\text{Vậy: } MN + PQ = MQ + NP \Leftrightarrow 3a - 2x + x = 4(a - x) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$\text{Với } x = \frac{a}{3} \text{ thì } MQ = NP = \frac{4a}{3}, PQ = \frac{a}{3}, MN = \frac{7a}{3}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của P trên MN .

$$\text{Ta có } PH = \sqrt{PN^2 - HN^2} = \sqrt{PN^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} - a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

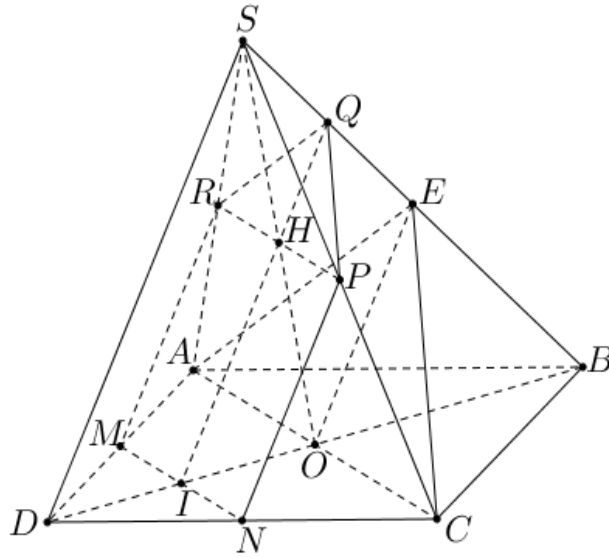
$$\text{Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác } MNPQ \text{ là } r = \frac{PH}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{6}.$$

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi E là trung điểm của SB . Biết tam giác ACE đều và $AC = OD = a$. Một mặt phẳng (α) đi động song song với mặt phẳng (ACE) và đi qua điểm I trên đoạn OD .

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x (với $DI = x$). Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

$$+ \begin{cases} (\alpha) \parallel (ACE) \\ (ABCD) \cap (ACE) = AC \Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = d_1 (I \in d_1, d_1 \parallel AC) \\ I \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } \begin{cases} M = d_1 \cap AD \\ N = d_1 \cap CD \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} (\alpha) \parallel (ACE) \\ (SBD) \cap (ACE) = OE \Rightarrow (SBD) \cap (\alpha) = d_2 (I \in d_2, d_2 \parallel OE) \\ I \in (SBD) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } Q = d_2 \cap SB$$

$$+ \begin{cases} (\alpha) \parallel (ACE) \\ (SAB) \cap (ACE) = AE \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = d_3 (Q \in d_3, d_3 \parallel AE) \\ Q \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } R = d_3 \cap SA$$

$$+ \begin{cases} (\alpha) \parallel (ACE) \\ (SBC) \cap (ACE) = CE \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = d_4 (Q \in d_4, d_4 \parallel CE) \\ Q \in (SBC) \cap (\alpha) \end{cases} \quad \text{Gọi } P = d_4 \cap SC$$

Vậy thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

b) + Tính diện tích thiết diện trên.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNPQR) \parallel (ACE) \\ (SAC) \cap (MNPQR) = PR \Rightarrow PR \parallel AC \\ (SAC) \cap (ACE) = AC \end{cases}$$

-

Do đó $QR \parallel AE$, $QP \parallel CE$, $PR \parallel AC$ nên tam giác PQR là tam giác đều.

- Ta có $RP \parallel MN$ (vì cùng song song với AC).

$$\text{Mặt khác } IQ \parallel OE \Rightarrow IQ \parallel SD \text{ nên } \begin{cases} SD \parallel (MNPQR) \\ (SCD) \supset SD \Rightarrow PN \parallel SD \\ (MNPQR) \cap (SCD) = PN \end{cases}$$

Tương tự ta có $MR \parallel SD$. Như vậy $MNPR$ là hình bình hành.

Lại có $EO \perp AC \Rightarrow HI \perp MN$ hay $PN \perp MN$, $RM \perp MN$. Vậy $MNPR$ là hình chữ nhật.

- Ta có $\frac{MN}{AC} = \frac{DN}{DC} = \frac{DI}{DO} \Leftrightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow MN = x$, suy ra $RP = MN = x$. Tam giác PQR đều

cạnh x nên diện tích của nó là $S_1 = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$.

- Tam giác ACE đều cạnh a nên $EO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SD = 2EO = a\sqrt{3}$.

Ta có $\frac{PN}{SD} = \frac{CN}{CD} = \frac{OI}{OD} \Leftrightarrow \frac{PN}{SD} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow PN = \sqrt{3}(a-x)$

Vì $MNPR$ là hình chữ nhật nên diện tích của nó là $S_2 = PN \cdot MN = \sqrt{3}x(a-x)$.

- Vậy diện tích của thiết diện $MNPQR$ là

$$S_0 = S_1 + S_2 = \sqrt{3}x(a-x) + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{4\sqrt{3}ax - 3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}x(4a-3x)$$

+ Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất?

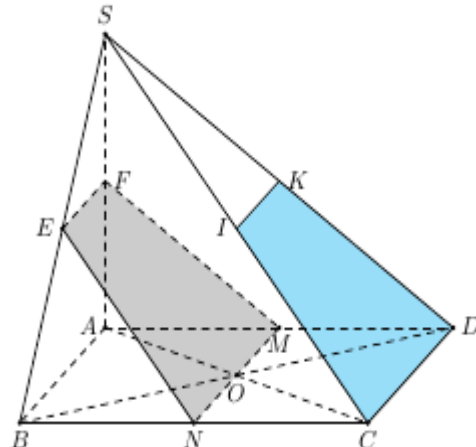
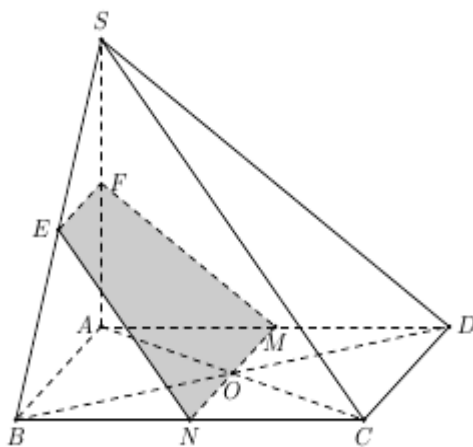
$$\frac{\sqrt{3}x(4a-3x)}{4} = \frac{\sqrt{3}[3x(4a-3x)]}{12} \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{3x+4a-3x}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}x(4a-3x)}{4} \leq \frac{\sqrt{3}a^2}{3} \quad 3x = 4a - 3x \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

- Như vậy diện tích thiết diện lớn nhất là $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}$ đạt được khi $x = \frac{2a}{3}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm giữa hai đường chéo. Tam giác SCD là tam giác đều cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SCD) . Tính diện tích thiết diện tạo thành bởi mặt phẳng (P) và hình chóp.

Lời giải



Do mặt phẳng $(P) \parallel (SCD)$ nên $(P) \cap AD = M$, $(P) \cap BC = N \Rightarrow MN \parallel CD$.

Ta có MN đi qua O nên M , N lần lượt là trung điểm của AD , BC .

Tương tự như vậy $(P) \cap SB = E$, $(P) \cap SA = F$ suy ra E, F lần lượt là trung điểm SB, SA . Nên thu được thiết diện là tứ giác $MNEF$.

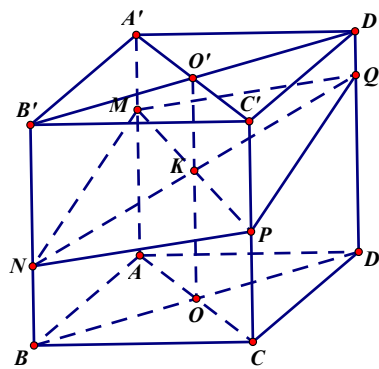
Gọi I, K lần lượt là trung điểm SC, SD .

Khi đó tứ giác $CDKI$ là ảnh qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{NC}$ của tứ giác $NMFE$.

Vì thế ta có được diện tích thiết diện là $S_{MNEF} = S_{DCIK} = \frac{3}{4} S_{SCD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}$, $\frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}$, $\frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q . Tính tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} (BB'C'C) \parallel (AA'D'D) \\ (MNP) \cap (BB'C'C) = NP \Rightarrow NP \parallel MQ \\ (MNP) \cap (AA'D'D) = MQ \end{cases}$

Tương tự: $\begin{cases} (AA'B'B) \parallel (CC'D'D) \\ (MNP) \cap (AA'B'B) = MN \Rightarrow MN \parallel PQ \\ (MNP) \cap (CC'D'D) = PQ \end{cases}$

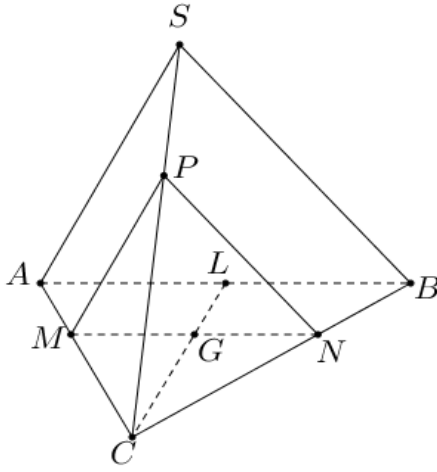
Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Gọi O, O', K lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', MNPQ$ thì O, O', K thẳng hàng.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B'N + D'Q &= 2.O'K = A'M + C'P \Rightarrow \frac{B'N}{BB'} + \frac{D'Q}{DD'} = \frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'} \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , mặt phẳng (α) qua G và song song với mặt phẳng (SAB) , $(\alpha) \cap SC = P$. Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$.

Lời giải



Gọi giao điểm của (α) với CA, CB lần lượt là M, N và gọi trung điểm AB là L . Ta có

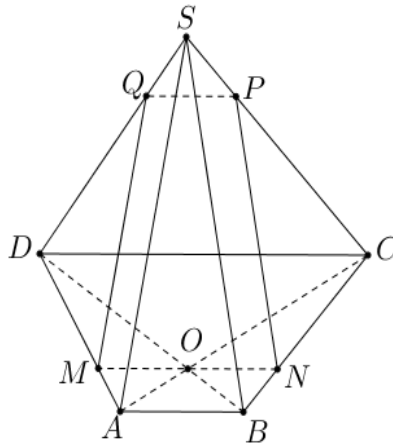
$$(\alpha) \parallel (SAB) \Rightarrow MN \parallel AB, MP \parallel SA \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{AM}{AC} = \frac{LG}{LC} = \frac{1}{3}.$$

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$. Đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn CD bằng hai lần đáy nhỏ AB .

Gọi $O = AC \cap BD$, mặt phẳng (α) qua O và song song với mặt phẳng (SAB) , $(\alpha) \cap SC = P$.

Tính tỷ số $\frac{SP}{PC}$.

Lời giải



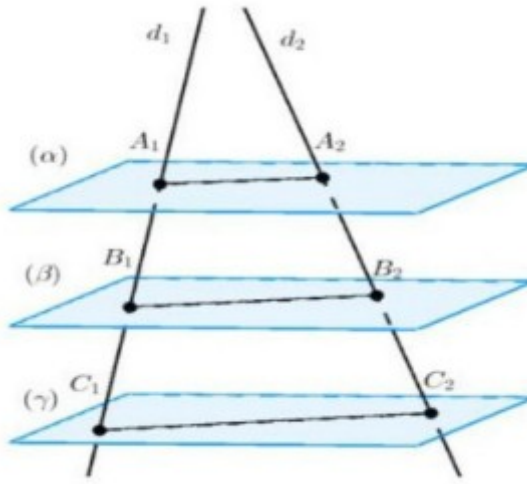
Gọi các giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh hình chóp như hình vẽ. Ta có

$$(\alpha) \parallel (SAB) \Rightarrow PN \parallel SB \Rightarrow \frac{SP}{PC} = \frac{BN}{NC} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}.$$

DẠNG 3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT

Định lý Ta-let trong không gian

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai đường thẳng những đoạn thẳng tỷ lệ.



$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \parallel (\gamma) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\gamma) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\gamma) = C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

Định lý đảo của định lý Thales trong không gian.

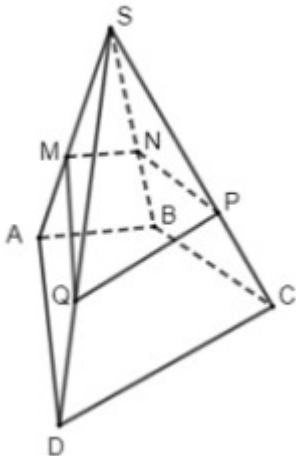
Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm $A_1, B_1, C_1 \in d_1$ và $A_2, B_2, C_2 \in d_2$ sao cho

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

Khi đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng. Hơn nữa, mặt phẳng này không duy nhất

Câu 39. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $\frac{MA}{MS} = \frac{NB}{NS} = \frac{PC}{PS} = \frac{QD}{QS} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải

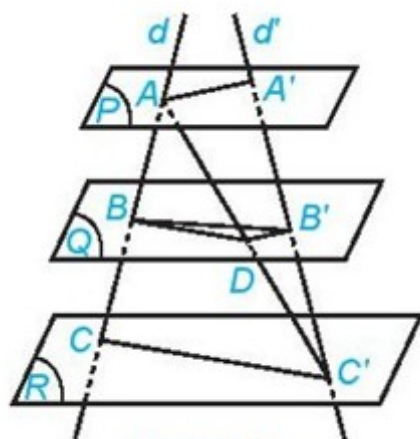


Xét tam giác SAB có $\frac{MA}{MS} = \frac{NB}{NS} = \frac{1}{2}$ hay $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$, suy ra $MN \parallel AB$ (theo định lý Thalés). Do đó MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Tương tự, $NP \parallel BC$ nên NP song song với mặt

phẳng $(ABCD)$. Vậy mặt phẳng (MNP) chứa hai đường thẳng cắt nhau MN và NP cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ nên mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Lập lập tương tự ta có mặt phẳng (MPQ) cũng song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Hai mặt phẳng (MNP) và (MPQ) cùng đi qua điểm M và cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ nên hai mặt phẳng đó trùng nhau, tức là bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Câu 40. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho ba mặt phẳng $(P), (Q)$ và (R) đôi một song song. Hai đường thẳng phân biệt d và d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A, B, C và A', B', C' (C khác C'). Gọi D là giao điểm của AC' và BQ (H.4.48)



Hình 4.48

a) Các cặp đường thẳng BD và CC' , BD và AA' có song song với nhau không?

b) Các tỉ số $\frac{AB}{BC}, \frac{AD}{DC'}$ và $\frac{A'B'}{B'C'}$ có bằng nhau không?

Lời giải

a) Mặt phẳng (ACC') lần lượt cắt hai mặt phẳng song song (Q) và (R) theo hai giao tuyến BD và CC' . Do đó, $BD \parallel CC'$.

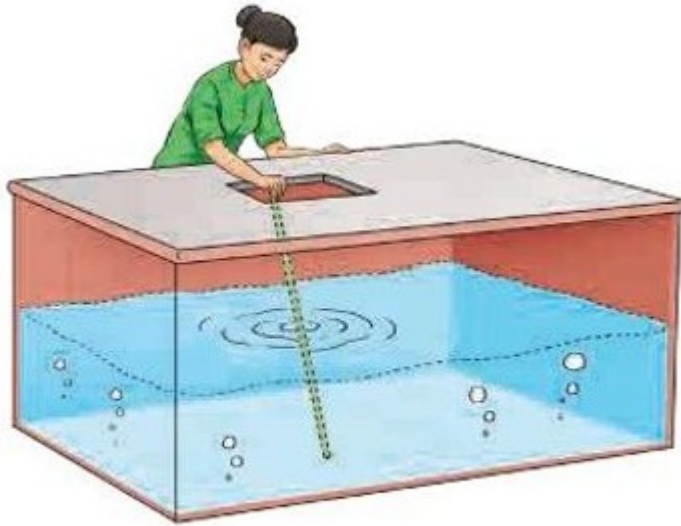
Mặt phẳng $AC'A'$ lần lượt cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến AA' và $B'D$. Do đó, $B'D \parallel AA'$.

b) Xét tam giác ACC' có $BD \parallel CC'$, theo định lý Thalés trong tam giác ta suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC'}$

Tương tự, xét tam giác $AA'C'$ có $B'D \parallel AA'$, ta suy ra $\frac{AD}{DC'} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Vậy $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC'} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Câu 41. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Để xác định mực nước trong một chiếc bể có dạng hình hộp, bác Hà đặt một thanh gỗ đủ dài vào trong bể sao cho một đầu của thanh gỗ dựa vào mép của nắp bể, đầu còn lại nằm trên đáy bể (H.4.53).



Hình 4.53

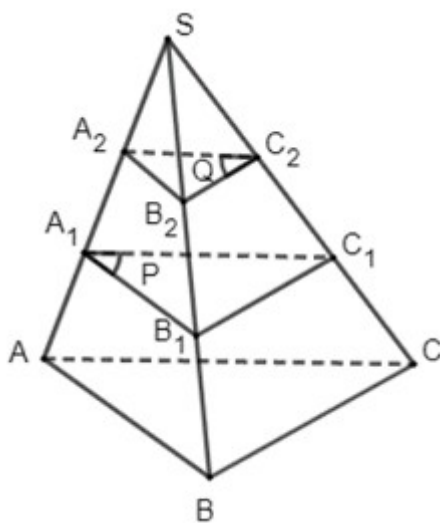
Sau đó bác Hà rút thanh gỗ ra ngoài và tính tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngập trong nước và độ dài của cả thanh gỗ. Tỉ lệ này chính bằng tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể. Hãy giải thích vì sao.

Lời giải

Vì bể nước có dạng hình hộp nên nắp bể và đáy bể nằm trong hai mặt phẳng song song. Khi mặt nước yên lặng thì mặt nước, nắp bể và đáy bể nằm trong ba mặt phẳng đôi một song song. Khi đó, thanh gỗ và chiều cao của bể đóng vai trò như hai đường thẳng phân biệt cắt ba mặt phẳng đôi một song song trên. Vậy áp dụng định lý Thalès trong không gian, ta khẳng định được tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể chính là tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngập trong nước và độ dài của cả thanh gỗ.

Câu 42. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hình tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $AA_1 = A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$ và $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

Lời giải



Vì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với mặt phẳng (ABC) nên $(P) \parallel (Q)$, do đó ba mặt phẳng $(ABC), (P)$ và (Q) đôi một song song. Theo định lý Thalès trong không gian, ta suy ra

$$\frac{A_2A_1}{AA_1} = \frac{B_2B_1}{BB_1} = \frac{C_2C_1}{CC_1}.$$

Mà $AA_1 = A_1A_2$ nên $\frac{A_2A_1}{AA_1} = 1$, suy ra $\frac{A_2A_1}{AA_1} = \frac{B_2B_1}{BB_1} = \frac{C_2C_1}{CC_1} = 1$, do đó $BB_1 = B_1B_2$ và $C_1 = C_1C_2$.

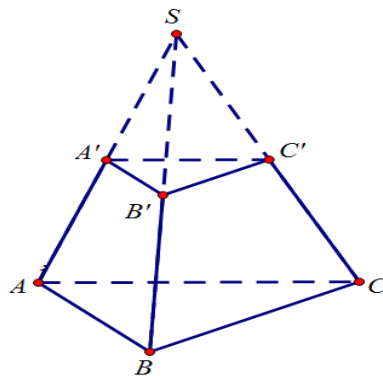
Sử dụng định lý Thalès ta cũng chứng minh được $\frac{A_2S}{A_2A_1} = \frac{B_2S}{B_2B_1} = \frac{C_2S}{C_2C_1}$.

Mà $A_1A_2 = A_2S$ nên $\frac{A_2S}{A_2A_1} = 1$, suy ra $\frac{A_2S}{A_2A_1} = \frac{B_2S}{B_2B_1} = \frac{C_2S}{C_2C_1} = 1$, do đó $B_1B_2 = B_2S$ và $C_1C_2 = C_2S$.

Vậy $B_1 = B_1B_2 = B_2S$ và $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

Câu 43. Cho hình chóp cắt tam giác $ABC.A'B'C'$ trong đó ABC là đáy lớn. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC' . Chứng minh $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}$.

Lời giải



$\triangle SAB$ có $A'B' \parallel AB$. Định lý Ta – lét trong mặt phẳng cho: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}$ (1)

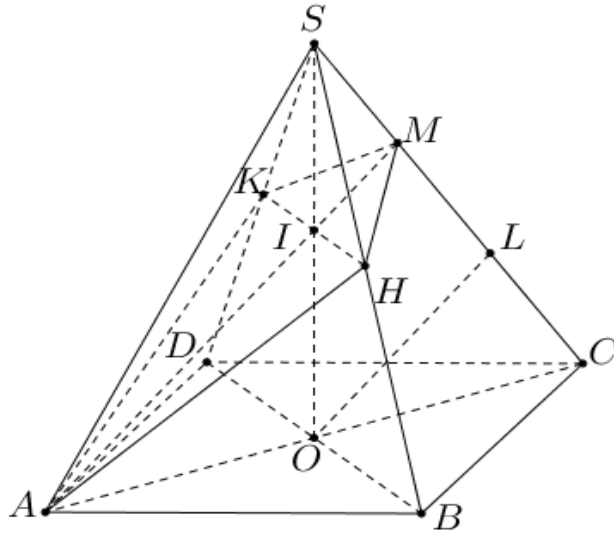
$\triangle SAC$ có $A'C' \parallel AC$ nên $\frac{SA'}{SA} = \frac{SC'}{SC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O , M là một điểm di động trên SC , (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD . Tìm giao điểm H và K của (α) với SB, SD .

Chứng minh rằng $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} = \frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

Lời giải



Giả sử AM cắt SO tại I .

(α) qua AM và song song với BD , nên (α) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến HK qua I và $HK \parallel BD$ (H trên SB và K trên SD).

$$\text{Ta có: } \frac{SB}{SH} = \frac{SD}{SK} = \frac{SO}{SI} \Rightarrow \frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} = \frac{2SO}{SI}.$$

Dựng $OL \parallel AM$, ta có L là trung điểm CM (vì O là trung điểm của AC) $\Rightarrow LM = LC$.

$$\text{Ta có: } \frac{SO}{SI} = \frac{SL}{SM} = \frac{SC - LC}{SM} = \frac{SC}{SM} - \frac{LC}{SM}.$$

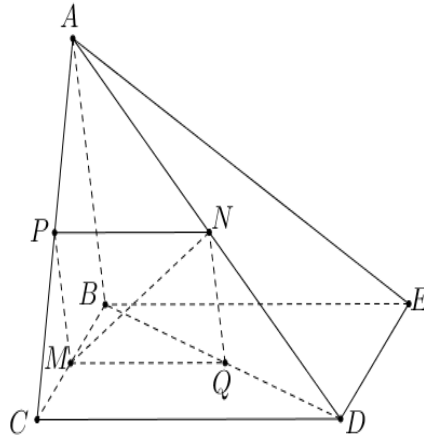
$$\Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{SC}{SM} - \frac{ML}{SM} \quad (\text{thay } LC = ML)$$

$$\text{Mà } \frac{ML}{MS} = \frac{OI}{SI} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{SL}{SM} = \frac{SC}{SM} - \frac{IO}{SI} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{SC}{SM} - \frac{SO - SI}{SI} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{SC}{SM} - \frac{SO}{SI} + \frac{SI}{SI} \Rightarrow \frac{2SO}{SI} - \frac{SC}{SM} = 1$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM} = 2 \frac{SO}{SI} - \frac{SC}{SM} = 1.$$

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm lần lượt di động trên BC, AD sao cho $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải



Áp dụng định lý Ta - lét đảo cho $B, M, C \in BC$ và $A, N, D \in AD$, từ tỉ lệ $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ ta suy ra AB, MN, CD cùng song song với một mặt phẳng (β) nào đó.

Ta chọn mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD . Mặt phẳng (α) chính là mặt phẳng (ABE) với $E \in (BCD)$ sao cho $(BCDE)$ là hình bình hành.

Khi đó $MN \parallel (\alpha) \parallel (\beta)$, mặt phẳng (α) cố định vì AB, CD cố định. Vậy (α) là mặt phẳng cần tìm.

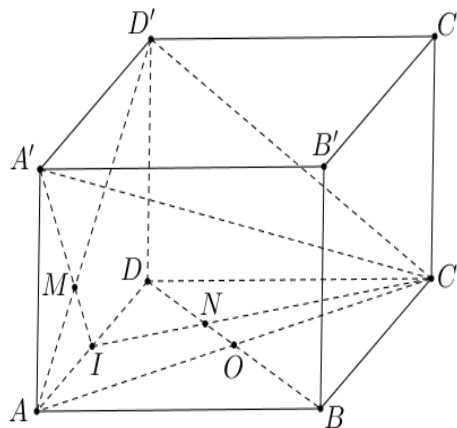
Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh bằng a . Các điểm

M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

a) Chứng minh rằng khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

Lời giải



$$\frac{AM}{DN} = \frac{MD'}{NB} = \frac{AD'}{DB}$$

a) Từ giả thiết ta có $\frac{AM}{DN} = \frac{MD'}{NB} = \frac{AD'}{DB}$, theo định lý Ta - lét đảo, suy ra $AD, MN, D'B$ luôn song song với một mặt phẳng. Vậy MN luôn song song với một mặt phẳng (P) , mà mặt phẳng (P) song song với AD và $D'B$ nên ta chọn mặt phẳng (P) là mặt phẳng $(A'D'CB)$ cố định.

b) Gọi O là giao điểm của DB và AC . Ta có

$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO$$

Suy ra N là trọng tâm của tam giác ADC .

Chứng minh tương tự, ta có M là trọng tâm tam giác $A'D$. Vậy CN và $A'M$ cắt nhau tại I là trung điểm của AD . Ta có

$$\frac{IM}{IA'} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel A'C$$

Nhận xét: Trong phần a) có thể giải theo cách khác như sau:

Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mặt phẳng $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt DB tại N' . Theo định lí

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB} \quad (*)$$

Ta – lét ta có

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$. Từ $(*)$ ta có $AD = DN'$

Suy ra $DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$. Mà $(Q) \parallel (A'D'CB)$ suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

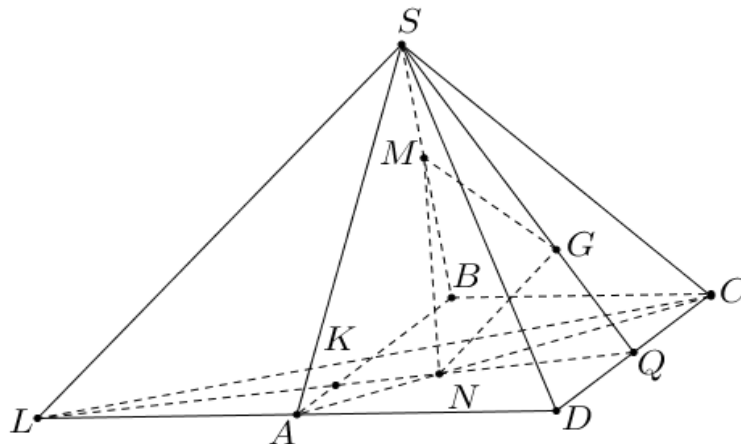
Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên SB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{BM}{MS} = \frac{NC}{NA} = x$, $0 < x < 1$. Gọi G là trọng tâm $\triangle SCD$.

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng cố định khi x thay đổi.

b) Tìm x để $(MNG) \parallel (SAD)$

c) Tìm x để $NG \parallel (SAB)$

Lời giải



a) Ta có $\frac{BM}{MS} = \frac{NC}{NA} \Rightarrow BC, MN, SA$ song song với mặt phẳng (P) nào đó. Mà $BC \parallel AD \Rightarrow AD, MN, SA$ song song với mặt phẳng (P) nào đó. $AD \cap SA = \{A\} \Rightarrow MN \parallel (P) \parallel (AD, SA) \equiv (SAD)$ - cố định
 $\Rightarrow MN \parallel (SAD)$ cố định.

b) Tìm x để $(MNG) // (SAD)$.

$$\left. \begin{array}{l} (MNG) // (SAD) \\ MN // (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow NG // (SAD) \quad (1)$$

$NG \subset (NGQ)$ (Q là trung điểm của DC).

$$(NGQ) \equiv (QGL) \quad (\text{vì } NQ \cap AD = \{L\}), \quad (GQL) \equiv (SLQ) \quad (\text{vì } QG \equiv SQ)$$

$$\Rightarrow NG \subset (SLQ) \cap (SAD) = SL \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow NG // SL$. Theo định lý Ta-let ta có:

$$\frac{NG}{SL} = \frac{QG}{QS} = \frac{QN}{QL} = \frac{1}{3} \quad (\text{vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle SLQ)$$

Mà Q là trung điểm $DC \Rightarrow N$ là trọng tâm $\triangle LCD \Rightarrow A$ là trung điểm $LD \Rightarrow \frac{NC}{NA} = 2 \Rightarrow x = 2$.

c) Tìm x để $NG // (SAB)$

$$NG \subset (NGQ) \equiv (SKQ) \quad \text{với } \{K\} = LQ \cap AB \quad \text{mà } (SKQ) \cap (SAB) = SK,$$

$$NG // (SAB) \text{ (gt)} \Rightarrow NG // SK,$$

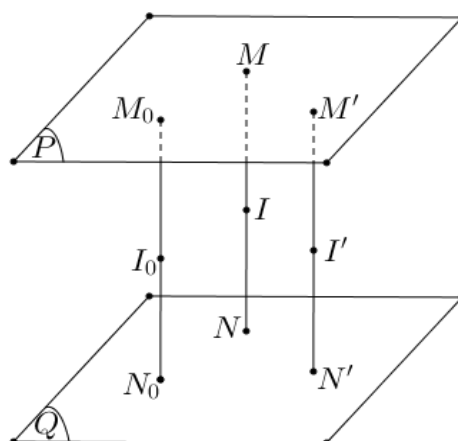
Theo định lý Talet $\Rightarrow \frac{QN}{NK} = \frac{QG}{GS} = \frac{1}{2}$ mà $AB // CD \Rightarrow \frac{NQ}{NK} = \frac{NC}{NA} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ thì $NG // (SAB)$.

Câu 48. Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song $(P), (Q)$. Tìm tập hợp các

điểm I thuộc đoạn MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k, k \neq 0$.

Lời giải



Thuận: Giả sử $M \in (P), N \in (Q)$ và điểm I thuộc đoạn MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$.

Trên hai mặt phẳng (P) và (Q) ta lần lượt lấy hai điểm cố định M_0 và N_0 rồi lấy điểm I_0 thuộc

đoạn M_0N_0 sao cho $\frac{M_0I_0}{N_0I_0} = k$. Khi đó I_0 cố định. Suy ra $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0}$.

$$\Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{IM + IN}{I_0M_0 + I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}$$

Áp dụng định lý Talet đảo, suy ra $I_0I \subset (R), (R) \parallel (P), (R) \parallel (Q)$, mặt phẳng (R) cố định vì nó đi qua điểm cố định I_0 và song song mặt phẳng cố định (P) . Vậy $I \in (R)$ cố định.

Đảo: Ngược lại, lấy điểm I' bất kì trên mặt phẳng (R) , qua I' ta kẻ một đường thẳng cắt $(P), (Q)$ lần lượt tại M', N' . Xét cát tuyến M_0N_0, MN và ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$. Theo

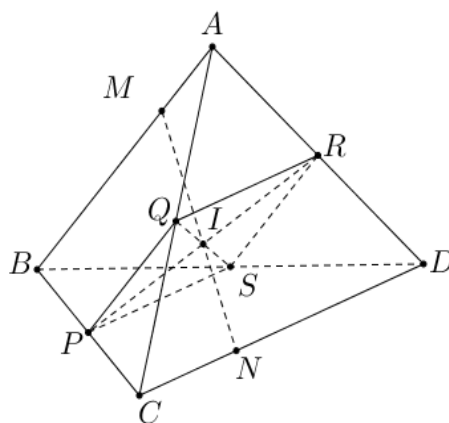
định lý Ta – lét ta có $\frac{I'M'}{I_0M_0} = \frac{I'N'}{I_0N_0} = \frac{M'N'}{M_0N_0}$.

Từ đó suy ra I' thuộc $M'N'$ và $\frac{I'M'}{I'N'} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$.

Vậy tập hợp I thuộc đoạn MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$ là mặt phẳng (R) nói trên.

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh AB và CD . Tìm tập hợp trung điểm I của MN .

Lời giải



Giả sử I là trung điểm của MN . Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD và DB .

Vì $\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$ nên theo định lý Ta – lét đảo thì BM, PI, CN cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với AB và CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng đó thì rõ ràng $I \in (\alpha)$. Mặt phẳng này cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là hình bình hành $PQRS$. Vì M chỉ chạy trên đoạn AB , N chạy trên CD nên điểm I luôn nằm trong tứ diện, tức là I luôn nằm trong hình bình hành $PQRS$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>