

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ SỐ 42

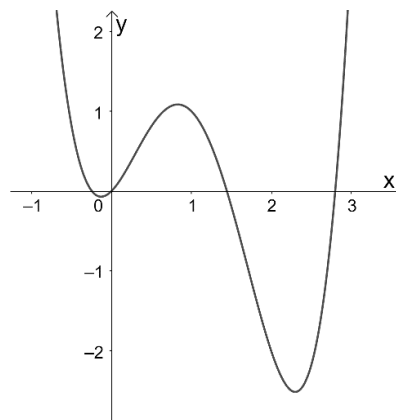
Câu 1. (7,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+3)x^2 + 12m$, m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

b) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (xy+1)x^2 + (x+1)^2 = x^2y + 5x \\ 4x^3y + 7x^2 + 4x^2\sqrt{y+1} = 2x+1 \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Một nhóm gồm 25 học sinh đứng thành 1 vòng tròn cùng tham gia trò chơi. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong số đó để tham gia trò chơi. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn không có bất kì 2 học sinh nào đứng cạnh nhau.



Câu 3. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(x)$ là một đa thức và có đồ thị như hình vẽ bên. Hãy cho biết tập nghiệm của phương trình $f(x^2 - x) + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x = 0$ có bao nhiêu phân tử?

Câu 4. (6 điểm)

Cho hình hộp $ABCD.A'B'CD'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và các góc phẳng đỉnh A đều bằng 60° .

a) Chứng minh $BD \perp (A'ACC')$.

b) Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$ bằng $\sqrt{22}$, tính thể tích khối tứ diện $A'BDC'$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, tam giác ABD đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SDA vuông tại D . Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi P là trung điểm của SC . Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMPN$.

Câu 6. (1,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $y^2(x-z) + z^2(x-y) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{2yz(1-x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

----- HẾT -----

Hướng dẫn

1a) (3đ) TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+3)x = 4x(x^2 - (m+3))$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A, B, C khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Hay ta có điều kiện $m+3 > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Khi đó: $A(0; 12m)$; $B(\sqrt{m+3}; -(m-3)^2)$; $C(-\sqrt{m+3}; -(m-3)^2)$ là các điểm cực trị.

Gọi H là trung điểm BC , ta có $H(0; -(m-3)^2)$ và các cạnh của tam giác là

$$AB = AC = \sqrt{m+3 + (m+3)^2}; BC = 2\sqrt{m+3}; AH = (m+3)^2$$

Theo bài ra ta có $S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AH \cdot BC = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m+3}(m+3)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -1$.

$$\text{Đặt } t = x^2 - x. \text{ Ta có } x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x = (x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x).$$

Phương trình đã cho có dạng $f(t) = -t^2 + 3t$ (1).

$$1.b) (4đ) \text{ Đk } y \geq -1, \text{ từ PT (1) ta có } x^2(xy+1) + (x-1)^2 - x(xy+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2y+2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2y+2x-1=0 \end{cases}$$

Với $x=1$ thay vào (2) ta được $4y+4+4\sqrt{y+1}=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{y+1}(\sqrt{y+1}+1)=0 \Leftrightarrow y=-1$

Với $x^2y+2x-1=0 \Leftrightarrow y = \frac{1-2x}{x^2}$ (do $x=0$ không thỏa mãn) thay vào (2) ta được

$$4x^3 \left(\frac{1-2x}{x^2} \right) + 7x^2 + 4x^2 \sqrt{\frac{1-2x}{x^2} + 1} = 2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4x^2 \left| \frac{x-1}{x} \right| = 0 \Leftrightarrow |x-1|^2 - 4|x(x-1)| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x-1|(|x-1|-4|x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|=0 \\ |x-1|=4|x| \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-1; x=-\frac{1}{3} \Rightarrow y=15; x=\frac{1}{5} \Rightarrow y=15$$

Vậy nghiệm của hệ là $(1; -1); \left(-\frac{1}{3}; 15\right); \left(\frac{1}{5}; 15\right)$

2) (2đ)

Lời giải

Ta đánh số các học sinh là $a_1, a_2, \dots, a_{25}$. Việc chọn ra 5 HS trong 25 HS sao cho không có 2 HS nào đứng cạnh nhau cũng tương tự như việc chọn ra 5 số trong 25 số trong đó không có 2 số tự nhiên nào liên tiếp, ở đây chúng ta để ý tới 2 số 1 và 25 không cùng được chọn.

Giả sử 5 số được chọn là a, b, c, d, e ($1 \leq a < b < c < d < e \leq 25$).

Vì chúng là 5 số tự nhiên không liên tiếp nên ta có

$1 \leq a < b' = b-1 < c' = c-2 < d' = d-3 < e' = e-4 \leq 21$. Bài toán trở thành chọn ra 5 số tự nhiên phân biệt từ 1 đến 21, nên có C_{21}^5 cách chọn.

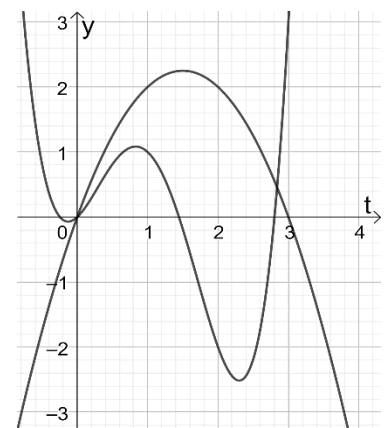
Tuy nhiên, chúng ta cần loại trừ trường hợp $a=1, e=25$ (vì chúng không cùng được chọn).

Với $a=1, e=25$ thì $e'=21$, do đó b', c', d' được chọn 3 trong 19 số còn lại, nên có C_{19}^3 cách chọn.

Vậy số cách chọn 5 trong 25 HS để không có 2 HS nào đứng cạnh nhau là

$$C_{21}^5 - C_{19}^3 = 19380. \text{ Số phần tử của không gian mẫu là } n(\Omega) = C_{25}^5.$$

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19380}{C_{25}^5}$.



3) (2đ)

Về đồ thị hai hàm số $y = f(t)$, $y = -t^2 + 3t$ trên cùng hệ trục chúng ta thấy chúng cắt nhau tại hai giao điểm $O(0;0)$, $A(a;b)$ ($a \in (2;3)$).

Do đó (1) có hai nghiệm là $t = 0$, $t = a$.

$$\text{Với } t = 0 \text{ ta có } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = a \text{ ta có } x^2 - x = a \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0 \quad (2).$$

Vì $a \in (2;3)$ nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu khác 0, 1.

Vậy phương trình $f(x^2 - x) + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

4a) (3đ). Ta có $BAA' = DAA' = BAD = 60^\circ$ và $AB = AD = AA' = a$. Khi đó $\triangle ABD$, $\triangle ADA'$ và $\triangle ABA'$ đều cạnh bằng a .

$$\Rightarrow A'D = A'A = A'B = a.$$

Suy ra hình chiếu của A' lên $(ABCD)$ là tâm H

của $\triangle ABD$ đều. Vậy $A'H \perp BD$, mặt khác

$$AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (A'ACC')$$

4b) (3đ) Ta có $AB' \parallel DC' \Rightarrow (DA'C') \parallel (AB'C)$

$$\Rightarrow d(AB'; A'C') = d(AB'; (DA'C'))$$

$$\Rightarrow d((DA'C'), (AB'C)) = d(H; (DA'C')).$$

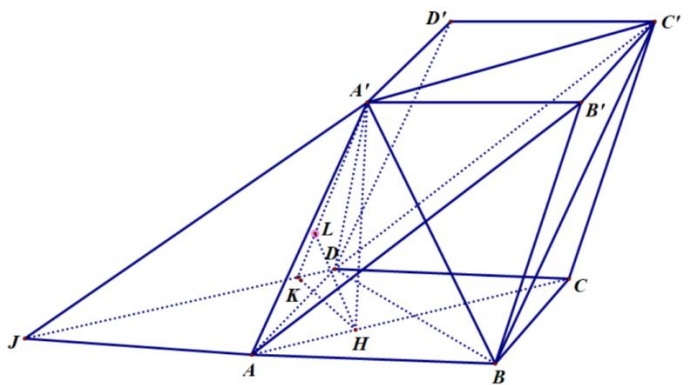
Dựng hình bình hành $DCAJ$. Từ H kẻ $HK \perp DJ$ ($K \in DJ$), ta có $HK \parallel DB$.

Từ H kẻ $HL \perp A'K$ ($L \in A'K$) $\Rightarrow HL \perp (DA'C') \Rightarrow d(H; (DA'C')) = HL$.

$$\text{Ta có: } HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}, A'H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Xét tam giác } A'HK: \frac{1}{HL^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{A'H^2}$$

$$\Rightarrow HL = \frac{a\sqrt{22}}{11}. \text{ Khi đó } d(AB'; A'C') = HL = \sqrt{22} \Rightarrow \frac{a\sqrt{22}}{11} = \sqrt{22} \Rightarrow a = 11$$

$$\Rightarrow V_{A'BDC'} = V_{ABCD A'B'C'D'} - 4V_{A'ABD} = \frac{1}{3}V_{ABCD A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{11^3\sqrt{2}}{6} = \frac{1331\sqrt{2}}{6}$$



5) (1,5). Dựng $SE \perp (ABCD) \Rightarrow SE \perp AB; SE \perp AD$

Ta có $AB \perp SB; AD \perp SD$ nên

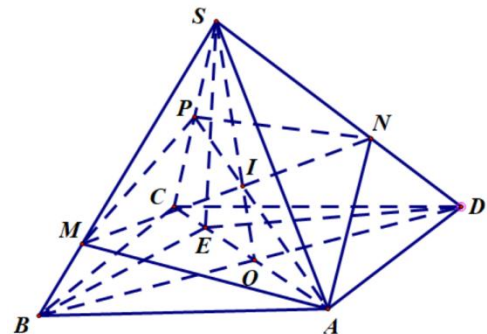
$$AB \perp (SBE); AD \perp (SDE) \Rightarrow AB \perp BE; AD \perp DE.$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADE \Rightarrow E \in AC$$

$$\Rightarrow ((SAB); (ABCD)) = (SB; BE) = SBE = 60^\circ$$

$$\text{Ta có } BE = \frac{BO}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}; SE = BE \cdot \tan 60^\circ = a;$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{Vậy thể tích khối chóp SABCD là: } V = V_{SABCD} = \frac{1}{3}SE \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

CÁCH 2. Tính thể tích khối chóp SABCD

Gọi K là trung điểm cạnh SA

Ví tam giác SBA vuông tại B , tam giác SDA vuông tại D nên suy ra
 $KA = KB = KD$, suy ra $KG \perp (ABD)$, với G là trọng tâm tam giác ABD

$$\text{Tính được } KG = \frac{a}{2} \Rightarrow h_{S.ABCD} = 2KG = a \Rightarrow V = V_{SABCD} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{SM}{SB}, y = \frac{SN}{SD}, (0 < x, y \leq 1). \text{ Gọi } V_1 = V_{SAMPN}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMP} + V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{4}(x+y) \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMN} + V_{S.PMN}}{V} = \frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{3}{4}xy \quad (2).$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4}(x+y) = \frac{3}{4}xy \Rightarrow x+y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}. \text{ Từ điều kiện } 0 < y \leq 1, \text{ ta có } \frac{x}{3x-1} \leq 1, \text{ hay } x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích } \frac{V_1}{V} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{3x-1}. \text{ Đặt } f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{3x-1}, x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right], \text{ ta có}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (L) \\ x=\frac{2}{3} & (N) \end{cases} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{3}{8}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, \text{ do đó}$$

$$\min \frac{V_1}{V} = \min_{x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \min V_1 = \frac{1}{3}V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

6(1,5 đ)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{2yz}{(1+y)(1+z)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{2yz}{(1+y)(1+z)} \left(\frac{2}{1+x} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{4yz}{(1+y)(1+z)(1+x)} - \frac{2yz}{(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{y^2}{(1+y)^2} + \frac{z^2}{(1+z)^2} + \frac{4yz}{(1+y)(1+z)(1+x)} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^2} + \frac{4}{(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{y}, v = \frac{1}{z} \Rightarrow u, v > 0. \text{ Khi đó } P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{(1+v)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+u)(1+v)}.$$

$$\text{Theo bất Côsi: } P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+u)(1+v)} + \frac{4}{(1+x)(1+u)(1+v)}.$$

$$\text{Mặt khác, giả thiết trở thành } x \left(\frac{y^2+z^2}{y^2z^2} \right) = \frac{y+z}{yz} \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow x(u^2+v^2) = u+v.$$

$$\text{Theo bất Bunhiacóp xki: } x(u+v)^2 \leq 2x(u^2+v^2) = 2(u+v) \Rightarrow u+v \leq \frac{2}{x}.$$

$$\text{Lại theo bất Côsi: } (1+u)(1+v) \leq \frac{1}{4}(2+u+v)^2 \leq \frac{1}{4} \left(2 + \frac{2}{x} \right)^2 = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(1+x)^3}$, $x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^4} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ suy ra $P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$.

GTNN của P là $\frac{91}{108}$ đạt được khi $x = \frac{1}{5}, u = v, u + v = \frac{2}{x} = 10 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}, u = v = 5 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{5}$.