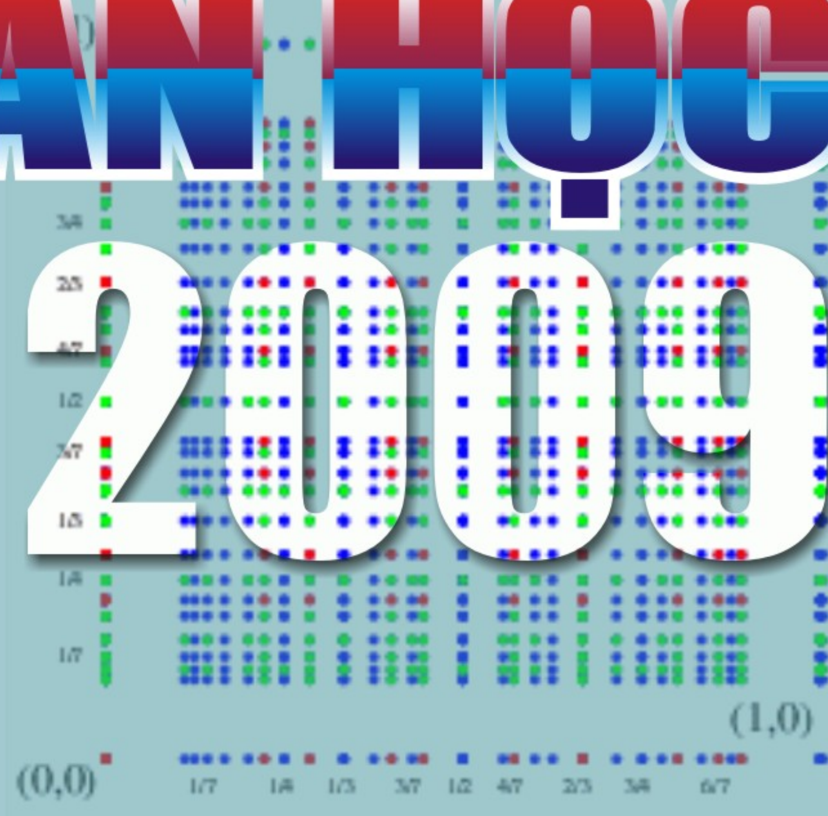
KỶ YẾU

TRẠI HÈ TOÁN HỌC 2009



Ban biên tập:
TRẦN NAM DŨNG
LIM NGUYỄN
NGUYỄN TUẤN MINH

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA

TRẦN NAM DŨNG - LIM NGUYỄN - NGUYỄN TUẤN MINH
TRẠI HÈ TOÁN HỌC

Kỷ yếu Trại hè Toán học

Huế, Tháng 8 - 2009

Ban biên tập:

TRẦN NAM DŨNG

LIM NGUYỄN

NGUYỄN TUẤN MINH

Mục lục

LỜI GIỚI THIỆU

Trại hè toán học 2009 là một hoạt động đặc biệt. Một mặt, nó tiếp nối chuỗi các hoạt động của Diễn đàn Toán học (Trại hè toán học 2006 (Hà Nội), Dã ngoại 2007 (Côn Sơn-Kiếp Bạc), Hội thảo Toán-Vật lý Thiên văn 2008 (Tp.HCM)). Mặt khác, nó được phát triển thành một hoạt động rộng lớn hơn, quy mô hơn, được sự bảo trợ của Hội toán học Việt Nam, trường Đại học khoa học Huế, được sự tham gia đồng tổ chức của diễn đàn Mathvn.org và của đông đảo cư dân các mạng toán học nói riêng và cư dân mạng nói chung.

Cuốn kỷ yếu mà bạn đang cầm trên tay được biên tập từ những bài viết của những tác giả đang làm việc tại Việt Nam và nhiều nước trên thế giới (Nga, Mỹ, Đức, Pháp, Canada...). Tác giả nhỏ tuổi nhất chưa đầy 15 tuổi còn tác giả kỳ cựu nhất đã ngoài 60. Có tác giả là học sinh phổ thông, có tác giả là những nhà khoa học đầu ngành của Việt Nam (và cả thế giới). Internet làm cho thế giới như nhỏ lại, xoá nhoà những khoảng cách về không gian, về tuổi tác, về học hàm học vị và địa vị xã hội. Tất cả chỉ còn lại niềm đam mê không bao giờ tắt đối với toán học và mong muốn đóng góp cho phong trào, cho cộng đồng.

Ban biên tập Kỷ yếu Trại hè toán học xin chân thành cảm ơn GS Hà Huy Khoái, GS Nguyễn Tiến Zũng, TS. Lê Bá Khánh Trình đã cho phép sử dụng các bài viết của họ trong cuốn kỷ yếu này. Cảm ơn GS Ngô Bảo Châu, TS Ngô Đắc Tuấn, GS John Borkowsky, TS Nguyễn Văn Minh Mẫn đã trực tiếp viết bài cho kỷ yếu. Đặc biệt, không thể không nhắc đến những tác giả là thành viên của hai diễn đàn: `diendantoanhoc.net` và `mathvn.org`. Những bài viết của họ đã làm nên một cuốn Kỷ yếu nhiều màu sắc với nội dung hấp dẫn và phong phú.

Và cuốn Kỷ yếu này cũng như Trại hè Toán học 2009 sẽ khó có thể diễn ra nếu như không có sự ủng hộ nhiệt tình và quý báu của những nhà tài trợ. Họ đều là những người không còn trực tiếp làm toán nhưng luôn yêu quý những người làm toán và hết lòng với toán học Việt Nam. Xin thay mặt BTC Trại hè, Ban biên tập kỷ yếu và toàn thể các thành viên Trại hè Toán học 2009 gửi đến họ - những mạnh thường quân thân quý lời tri ân sâu sắc.

Còn bây giờ, hãy lật các trang Kỷ yếu và đọc cho thoả thích!

Ban biên tập

TOÁN HỌC ĐƯƠNG ĐẠI VIỆT NAM*

Hà Huy Khoái - Viện Toán học Việt Nam

▽

Tóm tắt. Chúng tôi đưa ra một tổng quan ngắn về sự phát triển của toán học Việt Nam từ năm 1947, thời điểm mà công trình nghiên cứu toán học đầu tiên của một nhà toán học Việt Nam được đăng trên một tạp chí toán học quốc tế. Chúng tôi mô tả toán học tại Việt Nam phát triển như thế nào trong những hoàn cảnh rất đặc biệt: cuộc kháng chiến chống Pháp, cuộc đấu tranh thống nhất đất nước, cuộc kháng chiến chống Mỹ, thời kỳ khủng hoảng kinh tế và thời kỳ chuyển dịch sang nền kinh tế thị trường.

Giới thiệu

Trong bài này, tôi muốn đưa ra một cái nhìn tổng quát cô đọng về sự phát triển của toán học đương đại Việt Nam. Từ đương đại ở đây được dùng để nói về giai đoạn từ 1947, khi công trình nghiên cứu toán học đầu tiên của một nhà toán học Việt Nam được đăng trên một tạp chí toán học quốc tế.

Hơn nữa, Việt Nam giành được độc lập từ tay thực dân Pháp tháng 9 năm 1945, nên lịch sử toán học đương đại Việt Nam là lịch sử sau thời kỳ thuộc địa.

Có thể nói rằng cho đến thời điểm hiện nay, chưa có bài nghiên cứu nào về chủ đề này. Bài viết này có thể được xem như câu chuyện được kể bởi một nhà toán học Việt Nam, sinh tháng 11 năm 1946 và học tại trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trong thời kỳ chiến tranh chống Mỹ, lúc mà trường phải sơ tán vào rừng, chứ không hẳn là một bài nghiên cứu về lịch sử toán học.

I - LÊ VĂN THIÊM – NGƯỜI KHAI SINH TOÁN HỌC ĐƯƠNG ĐẠI VIỆT NAM

Lịch sử toán học đương đại Việt Nam khởi đầu cách đây 60 năm, khi một nhà toán học Việt Nam, Lê Văn Thiêm, công bố một công trình trên một tạp chí chuyên đề quốc tế (Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flachen; *Commentarii Mathematici Helvertici*, 20, 1947, pp. 270-287).

Lê Văn Thiêm sinh năm 1918 tại Hà Tĩnh, Việt Nam, trong một gia đình trí thức. Ông là con út trong gia đình gồm 13 anh chị em. Người anh cả của ông nhận bằng “tiến sĩ” sau khi thi đậu kỳ thi Nho giáo truyền thống cuối cùng (năm 1919, triều Nguyễn). Còn Lê Văn

*Trần Lưu dịch từ nguyên bản: Hà Huy Khoái, *On the contemporary mathematics in Vietnam*, Proceedings of the International Conference on History of Mathematics, Tokyo, 2008 (to be published by Springer, 2010). Phiên bản tiếng Trung Quốc đã được in trong: *Science and Culture Review*, Vol. 6, N. 2, 2009 (xuất bản bởi Viện Lịch sử khoa học, Viện Hàn lâm khoa học Trung Quốc)

Thiêm là người Việt Nam đầu tiên nhận được học vị tiến sĩ hiện đại.

Năm 1939, sau khi hoàn thành học kỳ cuối cùng với điểm số xuất sắc, Lê Văn Thiêm được trao một học bổng theo học tại trường École Normale Supérieure, Paris. Việc học của ông bị gián đoạn khi Chiến tranh Thế giới thứ hai nổ ra và đến 1941 mới được nối lại. Ông tốt nghiệp với bằng Cử nhân Toán chỉ trong vòng 1 năm thay vì 3 năm như chương trình học qui định. Năm 1942, dưới sự hướng dẫn của George Valiron, ông bắt đầu đề tài nghiên cứu về lý thuyết phân bố giá trị của hàm phân hình (Lý thuyết Nevanlinna). Chính trong giai đoạn này ông đã có những đóng góp quan trọng trong việc giải quyết được bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna và đây cũng là chủ đề chính trong luận án tiến sĩ (1945, Goettingen) và tiến sĩ nhà nước (Docteur d'Etat) của ông (1949, Paris) đồng thời đưa ông trở thành một trong những nhà nghiên cứu trẻ xuất sắc nhất lúc bấy giờ trong lĩnh vực này.[1]

Trong khi đó, ở Việt Nam, cuộc kháng chiến chống thực dân Pháp đang lên cao. Gác lại niềm đam mê toán học lớn lao và triển vọng tươi sáng của sự nghiệp nghiên cứu khoa học, năm 1949, Lê Văn Thiêm đã đưa ra một quyết định mang tính bước ngoặt không chỉ sẽ làm thay đổi hoàn toàn cuộc đời ông mà còn tạo ra một ảnh hưởng sâu sắc đối với nhiều thế hệ sinh viên Việt Nam sau đó. Đó là từ bỏ công việc giảng dạy tại Đại học Zurich danh tiếng, ông quay về Việt Nam để tích cực tham gia cuộc đấu tranh giành độc lập.

Để về đến được Việt Nam, Lê Văn Thiêm đầu tiên bay đến Bangkok rồi sau đó di chuyển đến vùng đất tự do ở cực nam của Việt Nam. Vài tháng sau, ông làm một cuộc hành trình dài dằng dặc theo một con đường nhỏ, mà về sau trong kháng chiến chống Mỹ trở thành đường Hồ Chí Minh huyền thoại, xuyên qua rừng núi để đến Việt Bắc, vùng cực bắc Việt Nam, nơi từng là căn cứ chỉ huy của cuộc kháng chiến.

Chính tại Việt Bắc, Lê Văn Thiêm đã gặp mặt những nhà trí thức khác, hầu hết đều học ở Pháp về như Tạ Quang Bửu (một nhà toán học, nguyên Bộ trưởng Quốc phòng VN 1947, Bộ trưởng Đại học và Chủ nhiệm Ủy ban Khoa học Nhà nước), Trần Đại Nghĩa (cựu sinh viên trường Bách khoa Paris và Chủ tịch Viện Khoa học Việt Nam). Tin tưởng vào tầm quan trọng của giáo dục và khoa học trong cuộc kháng chiến này, Lê Văn Thiêm đã thành lập ở vùng tự do một trường đại học sư phạm và một trường đại học khoa học cơ bản nhằm mục đích cung cấp cho đất nước những giáo viên và những nhà kỹ thuật trình độ cao mà cuộc kháng chiến đang vô cùng cần đến. Hai trường ĐH này hoạt động cho đến khi cuộc kháng chiến chống Pháp kết thúc năm 1954. Sự phát triển của khoa học và nghiên cứu sau này tại Việt Nam ghi nhận những đóng góp vô cùng cần thiết của hai ngôi trường này trong việc nâng cao và duy trì hệ thống giáo dục ở một trình độ thích hợp, cho dù bị cách ly hoàn toàn với thế giới bên ngoài trong suốt cuộc chiến chống Pháp và sau đó là chống Mỹ. Ngoài ra, hai trường ĐH này đã tạo thành nền móng để Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội hoạt động trở lại ngay năm 1955 với đội ngũ giảng viên hoàn toàn là người Việt mà vào thời điểm đó, được xem là một thành tựu nổi bật ở một quốc gia châu Á.

Lê Văn Thiêm, cùng với những nhà toán học khác (Hoàng Tụy, Tạ Quang Bửu) đã sáng lập hai tạp chí chuyên ngành toán học nghiên cứu của người Việt bằng ba thứ tiếng Anh, Pháp và Nga là *Acta Mathematica Vietnamica* và *Vietnam Journal of Mathematics*. Ông cũng là nhà sáng lập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, người bạn của nhiều thế hệ học sinh trung học. Sự xuất hiện của ba tạp chí này trong suốt thời kỳ chống Mỹ là một sự kiện quan trọng và khó tin.

Lê Văn Thiêm qua đời ngày 3 tháng 6 năm 1991 tại Thành phố Hồ Chí Minh. Ông là nhà toán học Việt Nam hiện đại đầu tiên được đặt tên cho một con đường (ở Hà Nội).

II - Toán học Việt Nam thời kỳ kháng chiến chống Pháp (1946-1954)

Ngày 19 tháng 12 năm 1946, chỉ hơn một năm sau khi tuyên bố độc lập, Việt Nam bắt đầu cuộc kháng chiến chống thực dân Pháp. Vào buổi sáng hôm đó, tất cả các tổ chức chính quyền đều nhận được mệnh lệnh rời khỏi Hà Nội và sơ tán đến những vùng tự do, phần lớn là trở lại Việt Bắc. Tuy nhiên, một số cán bộ cao cấp nhận được mệnh lệnh trễ, trong số này có giáo sư toán học Nguyễn Thúc Hào, người cũng từng du học ở Pháp như Lê Văn Thiêm và trở về VN năm 1935. Tháng 12, Nguyễn Thúc Hào rời Hà Nội về quê ở Nghệ An, một tỉnh thuộc khu 4 tự do. Vài tháng sau Nguyễn Thúc Hào được Bộ Giáo dục giao nhiệm vụ tổ chức một trường toán học, chính xác hơn là một lớp toán học ở trình độ đại học. Vị giáo sư duy nhất tại "trường đại học" này chính là Nguyễn Thúc Hào. Mặc dù trường của ông Hào có qui mô nhỏ nhưng tầm quan trọng của nó thì không hề nhỏ. Những sinh viên của lớp toán học này về sau trở thành những nhà khoa học hàng đầu của Việt Nam. Lớp toán học của Nguyễn Thúc Hào đánh dấu sự khởi đầu của lịch sử giáo dục đại học tại Việt Nam sau thời kỳ thuộc địa.

Một mốc son lớn trong sự phát triển của toán học và giảng dạy toán học tại Việt Nam là sự trở về của Lê Văn Thiêm từ Pháp. Vào lúc đó, ông là thần tượng của giới trẻ Việt Nam. Sự trở về của Lê Văn Thiêm lôi kéo thêm nhiều tài năng trẻ đến với Việt Bắc. Những sinh viên đầu tiên của trường Đại học Khoa học, do Lê Văn Thiêm thành lập tại Việt Bắc, sau này trở thành những nhà khoa học hàng đầu của Việt Nam.

Trong những năm hòa bình đầu tiên sau kháng chiến, một số sinh viên của trường Đại học Khoa học do Lê Văn Thiêm sáng lập được đưa sang Nga để theo học một chương trình sau đại học. Hầu hết số sinh viên này nhận được học vị *phó tiến sĩ* (Ph.D) chỉ sau hai hay ba năm học. Đặc biệt, chỉ sau một năm, Hoàng Tụy đã viết một luận án phó tiến sĩ về giải tích thực dưới sự hướng dẫn của Menshov và đã đăng 5 bài báo trên các tạp chí hàng đầu của Nga trong 20 tháng sống ở Moscow để theo học chương trình phó tiến sĩ. Vài năm sau đó, Hoàng Tụy trở thành "cha đẻ" của lý thuyết tối ưu toàn cục với *lát cắt Tụy* nổi tiếng trong lý thuyết qui hoạch lõm. Một sinh viên khác, Nguyễn Cảnh Toàn, đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ khoa học tại Nga với những kết quả quan trọng trong môn hình học xạ ảnh. Giai đoạn này ông đang công tác tại trường Đại học Khoa học.

Chúng ta có thể nói rằng Đại học Khoa học đóng một vai trò quan trọng không chỉ trong việc đào tạo sinh viên ở bậc đại học mà còn cả việc xây dựng nên một nhóm nghiên cứu toán tại Việt Nam sau giai đoạn kháng chiến.

III - Những năm tháng sau kháng chiến và thời kỳ chống Mỹ (1954-1975)

Cuộc kháng chiến chống Pháp kết thúc năm 1954 và trường Đại học Tổng hợp hoạt động trở lại tại Hà Nội năm 1955. Lê Văn Thiêm là hiệu trưởng. Những sinh viên đã tốt nghiệp đại học ở Việt Bắc giờ có cơ hội nghiên cứu toán học. Nhiều người trong số này được đưa ra nước ngoài, phần lớn sang Liên Xô, sang đông Âu hay sang Trung Quốc.

Trong giai đoạn này, nhiều nhà toán học sau khi nhận được bằng phó tiến sĩ ở nước ngoài, đã chuyển mối quan tâm sang toán ứng dụng nhằm ủng hộ chính sách khoa học của chính phủ. Lưu ý rằng khuynh hướng này cũng đã xuất hiện ở Trung Quốc vào thời điểm này, chẳng hạn như Hoa La Canh lúc đó đang tích cực theo đuổi nghiên cứu về vận trù học. Ở Việt Nam, có thể thấy khuynh hướng này qua những ví dụ sau:

- Hoàng Tụy, người đã bảo vệ thành công luận án về giải tích thực, trở thành người đầu tiên giới thiệu vận trù học và tối ưu hoá tại Việt Nam năm 1961. Ngay từ đầu, các nhà toán học Việt Nam đã nỗ lực sử dụng toán học để giải quyết các vấn đề thực tiễn. Năm 1961-1962, Hoàng Tụy và nhóm của ông đã nghiên cứu một bài toán về giao thông vận tải – sắp xếp lại việc vận chuyển hàng bằng xe tải sao cho rút ngắn quãng đường mà những xe tải phải chạy xe không. Tôi cũng xin lưu ý rằng các nhà toán học Xô Viết cũng đã nghiên cứu về bài toán ứng dụng này sau đó, khoảng năm 1963. Dĩ nhiên họ đã thành công hơn nhiều so với các đồng nghiệp Việt Nam. Hoàng Tụy cho biết sau chuyến viếng thăm Novosibirsk năm 1962 với Kontorovich (một nhà toán học Xô Viết và người từng đoạt giải Nobel kinh tế), ông đã hoàn toàn chuyển từ giải tích thực sang vận trù học. Năm 1964 Hoàng Tụy thu được một kết quả đặc sắc về cực tiểu hóa hàm lõm, kết quả đã đưa đến cho ông sự thừa nhận quốc tế rộng rãi. Hoàng Tụy đưa ra một kiểu mới của mặt phẳng cắt, một khái niệm đã được giới thiệu trong qui hoạch nguyên của Gomory vào những năm 1950 để sử dụng trong qui hoạch lồi. Hoàng Tụy đề xuất một phương pháp cắt mới cho phép thực hiện một thuật toán cực tiểu hóa hàm lõm. Mặt phẳng cắt của ông hiện nay được gọi là *lát cắt Tụy* và Hoàng Tụy đôi khi được gọi là *cha để của lý thuyết tối ưu toàn cục.*

– Phan Đình Diệu, người đã đạt được học vị tiến sĩ khoa học tại Moscow với luận án về toán học kiến thiết, đã chuyển mối quan tâm sang khoa học máy tính. Sau này, ông trở thành giám đốc đầu tiên của Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

– Lê Văn Thiêm, một chuyên gia nổi tiếng về lý thuyết hàm với những thành tựu tiên phong trong lý thuyết Nevanlinna, bắt đầu nghiên cứu thuyết dòng chảy ngầm và những ứng dụng của nó tại Việt Nam. Trong lĩnh vực mới mẻ này đối với ông, Lê Văn Thiêm đã đạt được một kết quả xuất sắc: ông là người đầu tiên cho lời giải tường minh của bài toán thấm qua hai lớp đất[2]. Lê Văn Thiêm và những học trò của ông cũng đã áp dụng các phương pháp của giải tích phức trong bài toán nổ mìn định hướng trong thời kỳ kháng chiến chống Mỹ.

Năm 1964, quân đội Mỹ bắt đầu ném bom miền Bắc Việt Nam, trong đó có Hà Nội và những thành phố khác. Tất cả các trường đại học đều phải sơ tán vào rừng. Nhiều trường lại chuyển về Việt Bắc, căn cứ chỉ huy cũ trong thời kỳ chống Pháp. Tuy nhiên, ngay cả trong lúc chiến tranh diễn ra, cộng đồng toán học Việt Nam vẫn tiếp tục các hoạt động của mình.

Hội toán học, được Lê Văn Thiêm thành lập năm 1965, đã tổ chức các hội thảo chung về tối ưu hóa, giải tích hàm, giải tích phức, đại số và giải tích số. Các thành viên của Đại học Tổng hợp, Đại học Sư phạm và Đại học Bách khoa đã tham gia hoạt động này. Sau khi

3 đại học trên phải sơ tán đi nhiều ngả, các hội thảo được tổ chức tại Hà Nội. Mọi người gặp nhau mỗi tháng hai lần, và có thể nói rằng họ tham dự rất đông đủ.

Trong giai đoạn chiến tranh, một số nhà toán học nước ngoài đến thăm Việt Nam và giảng bài cho các sinh viên và những nhà nghiên cứu. Trong số này có Alexandre Grothendieck, Chandler Davis, Laurent Schwartz, André Martineau, Bernard Malgrange, và Alain Chenciner. Để hiểu thêm những ấn tượng của các nhà toán học quốc tế đã đến Việt Nam về đời sống toán học Việt Nam thời gian đó, tôi muốn nhắc lại một vài chi tiết trích từ bản tường thuật của Alexandre Grothendiecks về chuyến thăm Việt Nam của ông năm 1967, bản tường thuật mà rất nhiều trường đại học trên thế giới biết đến năm 1968.

Những ngày thuyết giảng đầu tiên của Grothendieck diễn ra tại Hà Nội. Nhưng một hôm, một tên lửa nổ chỉ cách giảng đường chừng một hai trăm mét. Vì thế, Bộ trưởng Bộ đại học Tạ Quang Bửu đã ra lệnh phải sơ tán. Grothendieck thích thú với tin chúng tôi sắp sơ tán và xem tình huống khác thường này như một cơ hội mạo hiểm.

Grothendieck thuyết trình về hình học đại số trừu tượng bốn tiếng mỗi ngày và gặp gỡ các sinh viên và đồng nghiệp vào buổi chiều. Sau chuyến viếng thăm này, Grothendieck đã viết một bản tường thuật thú vị và nổi tiếng, mang đến cho người đọc cái nhìn khái quát về đời sống toán học của Việt Nam trong chiến tranh.

Đây là phần tường thuật của ông về việc thuyết trình tại Hà Nội trong lúc Mỹ ném bom:

Cũng như hầu hết các hoạt động công cộng, những bài thuyết trình được thực hiện từ khoảng 6 đến 10 giờ sáng. Trong suốt phần lớn thời gian ở đây của tôi, bầu trời luôn u ám cho nên đã xảy ra ít vụ ném bom. Những trận ném bom dữ dội đầu tiên đã được lường trước, chúng diễn ra vào thứ Sáu, ngày 17 tháng 11, hai ngày trước khi chúng tôi di tản về vùng nông thôn. Ba lần bài nói chuyện của tôi bị gián đoạn bởi những hồi còi báo động và chúng tôi phải xuống hầm trú ẩn. Những người mới đến đôi khi rất ấn tượng vì thấy dân chúng ở đây rất bình tĩnh, hầu như chẳng mấy ngạc nhiên về các hồi còi báo động vốn đã thành chuyện hàng ngày...

Trong lúc diễn ra một trong số các đợt không kích vào sáng thứ sáu hôm đó, một chùm bom bi nổ chậm đã rơi xuống ngay trong sân của Đại học Bách khoa Hà Nội và (sau khi còi báo động kết thúc), nó nổ tung khiến hai giảng viên toán của trường thiệt mạng.

Tạ Quang Bửu, một nhà toán học và là Bộ trưởng Bộ đại học (và là người cùng tham dự những buổi thuyết trình của tôi ở Hà Nội) đã được bí mật thông báo tin này trong khi tôi thuyết trình. Ngay lập tức ông rời nơi này; những người nghe còn lại tiếp tục vừa theo dõi bài giảng vừa đợi chờ hồi còi báo động kế tiếp. Bài giảng của những ngày tiếp theo phải dời sang tuần sau tại trường đại học nơi sơ tán nhằm tránh rủi ro cho nhóm trí thức nòng cốt trong thời gian thành phố bị oanh tạc.

Grothendieck đưa ra một số nhận xét về khoa học cũng như những khó khăn thực tế mà một nhà toán học Việt Nam có tham vọng phải chịu đựng ở một nơi bị cách ly khỏi thế giới:

Cuộc sống rất hoang sơ. Tất cả mọi người, từ những người quản lý trường, đội ngũ giảng viên cho đến sinh viên đều sống trong những túp lều làm từ rơm, tre và đất sét như nhau, *cửa sổ thì lồng lộng gió và nắng thì như thiêu đốt. Vì không có đèn điện, họ sử dụng đèn dầu... Khi trời quang, máy bay địch thường xuyên bay qua khu vực trường học, thỉnh thoảng thả bom hú họa để tống khứ hết đống vũ khí trước khi quay về căn cứ khiến cho đôi khi một số thường dân bị thương hoặc thiệt mạng.*

Ở một đất nước mà do hoàn cảnh bắt buộc, có ít quan hệ với bên ngoài (trừ phi người ta xem những chùm bom bi là một kiểu quan hệ), thật khó để một nhà toán học chưa có kinh nghiệm định hướng bản thân giữa vô số hướng đi, để phân biệt cái gì thú vị cái gì không.

Ông giải thích rằng ông kinh ngạc khi tiếp cận cộng đồng các nhà nghiên cứu toán học năng nổ ở Hà Nội:

Mệnh đề đầu tiên - một mệnh đề khá khác thường trong hoàn cảnh này- là: thực sự đã có một đời sống toán học đúng với nghĩa của từ này tại miền Bắc Việt Nam. Để đánh giá đúng ý nghĩa của định lý tồn tại này, trước tiên, cần nhớ rằng năm 1954, sau cuộc chiến kéo dài 8 năm chống thực dân Pháp (nghĩa là cách đây 13 năm), giáo dục đại học thực tế chưa có tại Bắc Việt Nam. Trong suốt thời gian diễn ra cuộc chiến ác liệt 1946–1954, nỗ lực giáo dục chủ yếu là xóa mù chữ cho đông đảo nông dân, một nỗ lực đã thành công trong những năm sau đó. Đến khoảng năm 1958, nạn mù chữ thực sự đã được xóa ở những vùng đồng bằng.

...Phương pháp tiếp theo (hiển nhiên là duy nhất khả thi) là đưa những người trẻ tuổi sang các trường đại học ở những nước xã hội chủ nghĩa, đặc biệt là Liên Xô. Trong số khoảng 100 giảng viên toán tại Đại học Tổng hợp Hà Nội và Đại học sư phạm, chừng 30 người đã được đào tạo ở nước ngoài 4 hoặc 6 năm. Hầu hết đạt đến trình độ phó tiến sĩ của Liên Xô.

Cuối cùng Grothendieck kết luận bằng một thông điệp lạc quan:

Tôi có thể khẳng định rằng cả những nhà lãnh đạo chính trị cũng như những nhà khoa học đầu ngành đều tin rằng nghiên cứu khoa học, kể cả nghiên cứu lý thuyết mà chưa có những ứng dụng thực tế ngay lập tức, không phải là một sự xa xỉ, và rằng cần thiết phải bắt đầu đẩy mạnh việc nghiên cứu khoa học lý thuyết (cùng với phát triển nguồn lực và các khoa học ứng dụng) từ bây giờ chứ không phải đợi đến khi có tương lai tốt hơn.

...Và qua nỗ lực phi thường chưa từng có trong lịch sử, bất chấp mọi thứ, họ đang thành công trong việc đẩy mạnh trình độ chuyên môn và trình độ văn hóa của người dân, ngay cả khi đất nước bị tàn phá khốc liệt bởi cường quốc công nghệ đứng đầu thế giới. Họ biết rằng một khi chiến tranh kết thúc, sẽ có những con người đủ trình độ chuyên môn và phẩm chất đạo đức để xây dựng lại đất nước.

Trường đại học tổng hợp phải sơ tán đi nơi khác bốn năm. Nó hoạt động trở lại tại Hà Nội tháng 9 năm 1969.

Sau đó năm 1972-1973, trường lại thêm một lần sơ tán nữa khi quân đội Mỹ sử dụng máy bay ném bom B-52 rải thảm xuống Hà Nội và một số thành phố khác của Việt Nam.

Trong thời gian chiến tranh chống Mỹ, mỗi năm, Việt Nam đưa khoảng 100-150 sinh viên sang khoa toán của các trường đại học ở Liên Xô và các nước Đông Âu. Ngoài ra, hàng năm khoảng 20 giảng viên toán của các trường đại học Việt Nam được đưa sang những nước này để theo học các chương trình tiến sĩ. Trở về Việt Nam, những nhà nghiên cứu này trở thành lãnh đạo của các nhóm nghiên cứu tại các trường đại học ở Việt Nam. Khó khăn chủ yếu lúc bấy giờ là sự cách ly các mối quan hệ với cộng đồng toán học của thế giới. Thậm chí liên lạc giữa các tiến sĩ mới nhận bằng từ nước ngoài trở về với người hướng dẫn trước đây của họ cũng không dễ dàng. Còn may là lúc bấy giờ, Việt Nam có thể nhận được hầu hết các tạp chí chuyên ngành toán học chính từ Trung Quốc (thực ra thường là chúng đã xuất bản 1-2 năm trước đó). Thời điểm này, Trung Quốc chưa ký công ước Bern về vấn đề bản quyền, và họ sao chép lại các tạp chí, và gửi một số sang Việt Nam cho Thư viện Quốc gia. Những tài liệu khác như tạp chí và sách tiếng Nga có thể được tìm thấy ở những hiệu sách với giá rất rẻ (chẳng hạn một bản dịch tiếng Nga cuốn *Đại số* của S. Lang được bán với giá chừng 20 xu).

Thời kỳ 1955 đến 1975, toán học ở miền Bắc Việt Nam đã phát triển vượt bậc. Một số nhóm nghiên cứu giỏi ra đời: tối ưu hóa (đứng đầu là Hoàng Tụy), lý thuyết kỳ dị (với sự hướng dẫn của hai nhà toán học Việt kiều Frédéric Phạm và Lê Dũng Tráng), giải tích phức (Lê Văn Thiêm và các học trò), P.D.E...

Sự ra đời của Ban Toán học (sau này, năm 1970, đổi tên là Viện Toán học do Lê Văn Thiêm làm Viện trưởng) thuộc Ủy ban Khoa học Nhà nước năm 1966 càng thúc đẩy sự nghiên cứu toán học tại Việt Nam. Thậm chí trong những năm tháng khó khăn nhất của cuộc chiến chống Mỹ, Ban Toán học (sau này là Viện Toán học) đã tổ chức những hội nghị khoa học thường niên và in ra những tuyển tập công trình của hội nghị lấy tên là *Toán học – Kết quả nghiên cứu*. Nhiều người công bố kết quả của họ trên những những tạp chí của Liên Xô như *Báo cáo Viện hàn lâm Khoa học Liên Xô, Mathematics Sbornik, Giải tích hàm và ứng dụng...* Những nhà toán học có uy tín trong giai đoạn này hiện vẫn là những nhà toán học hàng đầu của Việt Nam.

Trước khi thống nhất đất nước (1975), tại miền Nam, hầu như chỉ có một nhóm nghiên cứu về P.D.E dẫn dắt bởi giáo sư Đặng Đình Áng, một nhà toán học xuất thân từ Học viện Công nghệ California (Mỹ). Những nhà toán học khác, như Nguyễn Đình Ngọc (một nhà hình học tô-pô từ Pháp trở về), giảng dạy tại Đại học Sài-gòn, nhưng không làm nghiên cứu. Tôi xin nói thêm là nhóm Đặng Đình Áng và những học trò của ông cho đến giờ vẫn là nhóm nghiên cứu mạnh nhất về P.D.E ở Việt Nam.

IV - Toán học Việt Nam sau thống nhất đất nước

Sau thống nhất đất nước năm 1975, toán học Việt Nam cuối cùng cũng có được các điều kiện thuận lợi để phát triển. Cụ thể là sự hợp tác với với cộng đồng toán học quốc tế trở nên dễ dàng hơn. Nhiều người còn trẻ đã nhận được những học bổng nghiên cứu sinh ở nước ngoài, và không chỉ đến các nước xã hội chủ nghĩa mà còn sang các nước khác như Pháp, Tây Đức, Ý, Nhật... Chẳng hạn như từ Viện Toán học, 16 thành viên đã nhận được học bổng Alexander-von-Humboldt; khoảng 20 người được nhận làm cộng tác viên của Ban Toán thuộc Trung tâm Vật lý Lý thuyết Quốc tế (ICTP) ở Ý...

Chỉ vài năm sau ngày đất nước thống nhất, số lượng các nhà toán học có học vị tiến sĩ gia tăng nhanh chóng. Đến năm 1980, Việt Nam có khoảng 300 nhà toán học có bằng tiến sĩ. Nhiều trường đại học mới ra đời, hầu hết đều có môn toán trong chương trình giảng dạy, điều này đã thúc đẩy việc phát triển số lượng các nhà toán học, đặc biệt là các nhà toán học có bằng tiến sĩ.

Tuy nhiên, trong giai đoạn 1980-1995, toán học Việt Nam gặp phải khó khăn lớn. Việt Nam trải qua cuộc khủng hoảng kinh tế trong thập niên 1980, và những năm đầu thập niên 1990 Việt Nam bắt đầu giai đoạn chuyển dịch sang nền kinh tế thị trường, bấy giờ gọi là Đổi mới. Nhiều nhà toán học phải rời bỏ toán học vì đồng lương của một giảng viên toán rất thấp, chỉ chừng 3-4 đô-la (Mỹ) mỗi tháng. Phần lớn đều phải làm thêm "nghề thứ hai" còn đòi hỏi nhiều thời gian và công sức hơn cả nghề thứ nhất – làm toán học! Nếu, trong nhiều năm, toán học là lựa chọn hàng đầu của những học sinh trung học thì những năm đầu thập niên 1990, một khuynh hướng ngược lại xuất hiện. Thậm chí có một năm, chẳng có học sinh nào thi vào khoa toán Đại học Tổng hợp Hà Nội. Lúc bấy giờ, một vài nhà toán học tiên đoán rằng toán học Việt Nam đang có nguy cơ biến mất chỉ trong vòng 15 năm [3].

May thay, toán học Việt Nam đã vượt qua giai đoạn khó khăn này. Lý do đầu tiên và quan trọng nhất là trong suốt thời kỳ này nhiều nhà toán học Việt Nam vẫn tiếp tục công việc nghiên cứu của mình bất chấp những điều kiện vô cùng khó khăn. Mặt khác, cũng cần kể đến sự giúp đỡ quí báu của cộng đồng toán học khắp thế giới, đặt biệt là Pháp, Ý, Đức và Nhật Bản. Tôi xin đề cập ở đây vai trò của chương trình ForMathVietnam từ Pháp và tầm quan trọng của những học bổng nghiên cứu như Alexander-von-Humboldt (Đức), JSPS (Nhật), và ICTP (Ý và UNESCO). Các nhà toán học Việt Nam rất nhớ đến sự giúp đỡ từ những nhà toán học nước ngoài trong suốt thời kỳ khó khăn này. Dưới đây là hai ví dụ. Đã có lúc hầu hết những cuốn sách mới gửi đến thư viện của Viện Toán là do các đồng nghiệp nước ngoài và đồng nghiệp Việt Nam tại hải ngoại tặng. Nhà khách của Viện Toán được xây dựng bằng tiền giúp đỡ của các nhà toán học Nhật Bản, Mỹ, và các nước khác.

Kể từ giữa thập niên 1990, Việt Nam từng bước thoát ra khỏi cuộc khủng hoảng kinh tế, và toán học Việt Nam trở lại với sự phát triển bình thường. Giới trẻ Việt Nam giờ có thể đi du học không chỉ bằng học bổng nghiên cứu sinh của các học viện nước ngoài mà còn bằng sự hỗ trợ tài chính của chính phủ Việt Nam (Đề án 322). Những sinh viên giỏi có niềm say mê nghiên cứu toán học bây giờ không còn e ngại khi chọn toán học làm sự nghiệp sau này của mình nữa. Một số sinh viên xuất sắc tiếp tục việc nghiên cứu của họ ở các trường đại học danh tiếng trên thế giới như Harvard, Princeton, École Normale supérieure, Ecole Polytechnique, Trinity College...

Trên cả việc phát triển nhanh chóng về số lượng các nhà toán học có bằng tiến sĩ (đến nay có khoảng 700), các nhà toán học Việt Nam đã đóng góp những thành quả nổi bật và giải quyết được những vấn đề cơ bản trong toán học. Tôi muốn nhắc đến chứng minh của Ngô Bảo Châu cho Bổ đề Cơ bản trong chương trình Langlands, một trong những vấn đề nổi tiếng trong toán học hiện đại. Cũng xin nhắc lại rằng với việc chứng minh bổ đề này trong một trường hợp riêng, Châu (cùng với Gérard Laumon) đã giành được giải thưởng danh giá của Viện Toán học Clay.

V - Vài nhận xét

Sau thời kỳ thuộc địa, suốt trong 60 năm - một quãng thời gian không dài lắm - Toán học Việt Nam đã phát triển dưới những điều kiện hết sức đặc biệt: cuộc kháng chiến chống Pháp, cuộc đấu tranh để thống nhất đất nước, cuộc kháng chiến chống Mỹ, khủng hoảng kinh tế và sự chuyển dịch sang nền kinh tế thị trường.

Tôi xin kết thúc bài viết bằng việc đề xuất những chủ đề sau đòi hỏi có những nghiên cứu sâu hơn:

– Giảng dạy toán học đại học và nghiên cứu trong thời kỳ chiến tranh.

– Ảnh hưởng của sự hợp tác và hỗ trợ từ nước ngoài đối với nền toán học đương đại Việt Nam.

– Ảnh hưởng của sự chuyển dịch sang nền kinh tế thị trường đối với sự phát triển của toán học tại Việt Nam và các nước xã hội chũ nghĩa cũ.

Tài liệu tham khảo

[1] D. Drasin. *A meromorphic function with assigned Nevanlinna deficiencies*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 80, N. 4, July 1974. Trong bài báo này, Drasin bình luận về bài báo của Lê Văn Thiêm: sử dụng một nguyên tắc quan trọng của Teichmuller, Lê Văn Thiêm lần đầu áp dụng nguyên tắc này để giải bài toán ngược và phương pháp này sau đó được Goldberg khai thác thêm.

[2] P. Ya. Palubarinoa-Kochina. *Lý thuyết dòng chảy ngầm*, Nauka, Moscow 1977 (tiếng Nga).

[3] F. Pham. *Gazète de Mathématiques*, 1992.

Hội Toán học Việt Nam

Đôi nét giới thiệu

▽

Giới thiệu về Hội Toán học Việt Nam

- Thành lập: Ngày 15 Tháng 8 năm 1966 theo Quyết định số 253/NV
- Hội hiện nay có hơn 900 hội viên
- Hội có 8 hội và chi hội thành viên: Hội Toán học Hà Nội, Hội Toán học TP Hồ Chí Minh, Hội ứng dụng Toán học, Hội Toán học Huế, Hội Toán học Nghệ An, Chi hội Toán học Quy Nhơn, Hội Giảng dạy toán phổ thông, Chi hội chuyên ngành Các hệ mờ và ứng dụng

Các chủ tịch và tổng thư kí qua các nhiệm kỳ

- 1966 - 1988
  - Chủ tịch: GS Lê Văn Thiêm
  - Tổng thư kí: GS Hoàng Tụy
- 1966 - 1988
  - Chủ tịch: GS Lê Văn Thiêm
  - Tổng thư kí: GS Hoàng Tụy
- 1988 - 1994
  - Chủ tịch: GS Nguyễn Đình Trí
  - Tổng thư kí: GS Đỗ Long Vân
- 1994 - 1999 và 1999 - 2004
  - Chủ tịch: GS Đỗ Long Vân
  - Tổng thư kí: GS Phạm Thế Long
- 2004 - 2008
  - Chủ tịch: GS Phạm Thế Long
  - Tổng thư kí: GS Lê Tuấn Hoa
- 2008 - 2013
  - Chủ tịch: GS Lê Tuấn Hoa
  - Tổng thư kí: GS Nguyễn Hữu Dư

Website: `http://www.vms.org.vn/`. *Email:* `vms@vms.org.vn`

Bản tin của Hội: Thông tin Toán học - `http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm`

Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 7 đã được tổ chức trong các ngày 04-08/08/2008 tại Trường Đại học Quy Nhơn, TP Quy Nhơn (Bình Định).

Đại hội Toán học Việt Nam là sinh hoạt khoa học lớn nhất của cộng đồng toán học Việt Nam. Tại đại hội các nhà nghiên cứu, ứng dụng và giảng dạy toán cả nước đã trình bày những kết quả khoa học của mình trong vòng 5-6 năm gần đây. Các đại biểu cũng đã trao đổi, thảo luận về những vấn đề thời sự cấp thiết trong phát triển Toán học của đất nước. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VII bao gồm hai phần: Hội nghị khoa học và Đại hội đại biểu Hội Toán học Việt Nam.

Trong phần Hội nghị khoa học, có 7 nhà toán học được mời báo cáo tại phiên toàn thể: Ngô Bảo Châu (IAS Princeton và Viện Toán học, Hình học đại số và Lý thuyết số) *The fundamental lemma in Langlands' program*; Nguyễn Tự Cường (Viện Toán học, Đại số giao hoán) *Hệ tham số $p-$chuẩn tắc và ứng dụng vào nghiên cứu cấu trúc vành giao hoán Noether địa phương*; Nguyễn Hữu Việt Hưng (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, Tôpô đại số) *The classical conjecture on spherical classes and the algebraic transfer*; Nguyễn Thành Long (ĐHKHTN-ĐHQG TP Hồ Chí Minh, Phương trình vi phân và Phương trình đạo hàm riêng) *On the nonlinear boundary value problems and some subjects concerned*; Đỗ Đức Thái (ĐHSP Hà Nội, Giải tích phức), *Hình học của các miền trong C^n với nhóm tự đẳng cấu không compact*; Nguyễn Đông Yên (Viện Toán học, Tối ưu hóa và ứng dụng) *Các bài toán tối ưu và bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số.*

Đại hội Đại biểu toàn quốc lần thứ bảy đã bầu ra BCH Trung ương Hội gồm các thành viên sau:

DANH SÁCH BAN CHẤP HÀNH TRUNG ƯƠNG

Hội Toán học Việt Nam khóa VI, Nhiệm kì 2008-2013

1. **Chủ tịch:** GS-TSKH Lê Tuấn Hoa, Viện Toán học

2. **Phó chủ tịch kiêm Tổng thư kí:** GS-TS Nguyễn Hữu Dư, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

Các phó chủ tịch:

3. GS-TSKH Nguyễn Hữu Việt Hưng, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

4. GS-TSKH Phan Quốc Khánh, ĐH Quốc Tế - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

5. GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

6. PGS-TS Tống Đình Quỳ, ĐH Bách khoa Hà Nội

7. GS-TSKH Nguyễn Khoa Sơn, Viện KH&CN Việt Nam

Các phó tổng thư kí:

8. PGS-TSKH Phùng Hồ Hải, Viện Toán học

9. PGS-TS Nguyễn Thiện Luận, Học Viện KTQS

Các uỷ viên:

10. TS Đinh Thanh Đức, ĐH Quy Nhơn

11. GS-TS Nguyễn Văn Hữu, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

12. GS-TSKH Hà Huy Khoái, Viện Toán học

13. PGS-TS Lê Thanh Nhàn, Khoa Khoa học – ĐH Thái Nguyên

14. TS Nguyễn Văn Sanh, ĐH Mahidol – Thái Lan

15. GS-TSKH Đỗ Đức Thái, ĐHSP Hà Nội

16. GS-TS Lê Văn Thuyết, ĐH Huế

Diễn đàn Toán học – 5 năm nhìn lại

Nguyễn Hữu Tình (BadMan) – Email: nhtinh@hueuni.edu.vn

Nguyễn Quốc Khánh (MrMATH) – Email: nqk_mrmath@yahoo.com

Nguyễn Văn Luyện (Lim) – Email: bunhia@yahoo.com

▽

Bây giờ là thời điểm Việt Nam đang ở năm thứ 12 kể từ ngày chính phủ ra quyết định kết nối mạng toàn cầu (12/1997). 12 năm không phải là một quãng thời gian dài nhưng 378.430.000 giây của thời đại cộng nghệ thông tin đã làm thay đổi rất nhiều điều. Bên cạnh đời sống thực, một thế giới ảo đã hình thành và phát triển song hành, và Diễn Đàn Toán Học (Vietnam Mathematics Forum – VMF) đã trở thành một phần trong số ấy. Trong khuôn khổ của bài viết này, xin được giới thiệu đôi nét về lịch sử xây dựng và phát triển của VMF.

I - Diễn đàn toán học là gì?

Diễn đàn Toán học (VietNam Mathematics Forum - viết tắt là DĐTH) là một tổ chức tự nguyện của thanh niên Việt Nam đang học tập và làm việc ở Việt Nam và nhiều nước trên thế giới, được thành lập với mục đích xây dựng sân chơi trực tuyến về Toán học cho những người yêu toán, học toán, dạy toán và nghiên cứu toán.

Địa chỉ chính thức của DĐTH trên mạng toàn cầu là: http://www.diendantoanhoc.net

II - Quá trình hình thành

Diễn đàn Toán học vốn có tiền thân là một box nhỏ trên mạng Trái tim Việt Nam Online (TTVNOL): Năm 2002 khi mạng TTVNOL hình thành, một nhóm các bạn yêu mến Toán học đã nhanh chóng lập thư mục (box) Toán Học trên cổng thông tin này để cùng nhau thảo luận các vấn đề liên quan đến Toán. Một trong những nhược điểm của mạng TTVNOL là không hỗ trợ việc gõ công thức toán học, điều này dẫn đến khó khăn cho các thành viên khi cần trình bày các vấn đề, bài toán cụ thể.

Đầu năm 2003, lưu học sinh Trần Quốc Việt đã thử nghiệm thành công diễn đàn có tích hợp bộ gõ công thức, để từng bước chuyển các thảo luận từ TTVNOL sang địa chỉ mới, là sân chơi cho các bạn trẻ yêu mến Toán. Lúc bấy giờ diễn đàn được điều hành bởi hai quản trị viên là Trần Quốc Việt (**VNMaths** – Nghiên cứu sinh ở Đức) và Nguyễn Hữu Tình (**BadMan** – Nghiên cứu sinh ở Áo). Sân chơi đã nhanh chóng thu hút được sự quan tâm của các bạn trẻ yêu mến toán là học sinh, sinh viên trong và ngoài nước.

Cuối năm 2003, với số lượng trao đổi và lượt truy cập diễn đàn tăng đột biến, nhóm quản lý đã thảo luận và quyết định xây dựng cổng thông tin mới với tên miền trên mạng toàn cầu là `www.diendantoanhoc.net` và chính thức đi vào hoạt động ngày 16/1/2004. Trong khoảng thời gian 2 năm tiếp theo, diễn đàn được bổ sung 18 quản lý viên là những người nhiệt huyết vì một cộng đồng toán học trẻ Việt Nam, họ là các du học sinh đến từ 11 quốc gia trên thế giới. Có thể kể ra một vài cái tên trong số đó như: anh Hà Huy Tài - **CXR** (Tulane University - Mỹ), anh Phan Dương Hiệu – **RongChoi** (University of Paris 8, Pháp), chị Nguyễn Việt Hằng – **Mathsbeginner** (Kyoto University, Nhật Bản), anh Bùi Mạnh Hùng - **leoteo** (University of Bristol, Anh), anh Lê Thái Hoàng - **laviesmerde** (University of California, Mỹ), ...

Giai đoạn 2006 – 2009, diễn đàn có sự thay đổi lớn về nhân lực trong nhóm quản lý, ngoài một số du học sinh trẻ như Nguyễn Văn Luyện - **Lim** (Canada), Nguyễn Long Sơn - **NangLuong** (Nga) thì các vị trí chủ chốt của diễn đàn đã chuyển dịch sang các thành viên trong nước như Ts.Trần Nam Dũng - **Namdung** (ĐHKH Tự Nhiên Tp.Hồ Chí Minh), SV. Nguyễn Quốc Khánh – **MrMATH** (ĐHKH Tự Nhiên Hà Nội),...

3 - Tôn chỉ - Mục tiêu

Diễn đàn Toán học là một tổ chức học thuật, phi lợi nhuận, không liên quan đến chính trị và tôn giáo, hoạt động trực tuyến dựa trên công nghệ mạng toàn cầu (internet). Trong quá trình xây dựng và phát triển của mình, DĐTH hướng đến các mục tiêu sau:

Trở thành một kênh thông tin đảm bảo, có độ tin cậy, hữu ích và thực tế trên tinh thần trách nhiệm cao đối với độc giả trực tuyến và thành viên của diễn đàn.

Xây dựng một sân chơi Toán học, nơi rào cản về khoảng cách địa lý được gỡ bỏ đối với các thành viên yêu thích Toán học

Học toán: Góp phần xây dựng phong cách học toán chủ động, sáng tạo cho học sinh, sinh viên Việt Nam trong môi trường Toán học ở Việt Nam cũng như ở các nước phát triển trên thế giới.

Làm toán: Làm cầu nối giữa những người làm toán, nghiên cứu chuyên sâu về toán ở Việt Nam và nước ngoài. Tạo nên một môi trường trao đổi trực tuyến về các vấn đề trong lĩnh vực toán học với nhiều chuyên ngành hẹp, chuyên sâu và nâng cao.

Dạy toán: Trở thành một địa chỉ trao đổi kinh nghiệm, nghiệp vụ sư phạm và chuyên môn của giáo viên toán ở các trường phổ thông cũng như giảng viên toán ở các trường đại học và viện nghiên cứu khắp mọi nơi. Đồng thời hướng đến sự hỗ trợ, giúp đỡ của những thế hệ đi trước, của các giáo viên, giảng viên đối với học sinh và sinh viên tham gia trên diễn đàn. Hình thành một môi trường dạy và học toán trực tuyến.

Văn hóa toán: Là địa chỉ, nơi gặp gỡ của những người yêu toán, ở đấy các thành viên bàn luận, chia sẻ tất cả các vấn đề liên quan đến văn hóa toán đồng thời phổ biến rộng rãi văn hóa toán đến với mọi đối tượng chuyên và không chuyên về toán.

Thư viện tài liệu toán: Hình thành cơ sở dữ liệu Toán học bằng việc tích lũy từ các thành viên tham gia trên diễn đàn. Cơ sở dữ liệu sẽ bao gồm các tài liệu ở dạng sách, báo, tạp chí, phần mềm, ... được tổ chức lưu trữ tốt, thuận tiện cho việc tìm kiếm của độc giả.

Truyền bá Toán học: Kết hợp giữa việc sinh hoạt trực tuyến (online) với những hoạt động ngoại tuyến (offline), DĐTH hướng tới việc truyền bá toán học tới các bạn trẻ khắp mọi miền đất nước, qua đó góp phần vào sự phát triển của nền Toán học Việt Nam.

Tạp chí điện tử Toán học: DĐTH hướng tới việc xây dựng một tạp chí điện tử uy tín về Toán. Ở đó đăng tải đầy đủ thông tin liên quan đến nền Toán học của Việt Nam và cập nhật tin tức mới nhất của thế giới.

IV - Nội dung diễn đàn

Website của Diễn đàn Toán học được chia thành ba phần có quan hệ mật thiết. Bao gồm phần cung cấp thông tin (web) - ở đó các nội chung được phân cấp theo từng chuyên mục, thuận lợi cho độc giả khi đến với diễn đoàn toán, phần thứ hai là diễn đàn (forum) - nơi trao đổi, thảo luận trực tiếp của các thành viên, và phần thứ ba là một mạng xã hội nhỏ (mini social network) – nơi các thành viên có thể tương tác và trao đổi nhiều hơn với nhau theo thời gian thực (realtime). Kết quả của các trao đổi trên diễn đàn sẽ được nhóm quản lý kiểm duyệt, tổng hợp và biên tập để đăng tải trên trang web.

Trên web, ngoài việc đăng các tin bài truyền thống, DĐTH cũng đăng tải những tài liệu đa phương tiện (multimedia) để gửi tới các bạn độc giả những thông tin thời sự trên thế giới thông qua trình duyệt flash trực tuyến. Đó là những clip về lịch sử toán học, về những điều lý thú, và cả những bài giảng toán học trực tuyến. Bên cạnh đó DĐTH cũng đã và tiếp tục xây dựng một kho tài liệu sách điện tử (e-books) đa dạng, phong phú đáp ứng nhu cầu của nhiều đối tượng thành viên, từ toán phổ thông, toán học sinh giỏi, toán đại học, sách và giáo trình cho nghiên cứu sinh. Các phần mềm hỗ trợ giảng dạy học tập cũng liên tục được cập nhật.

Trên diễn đàn, DĐTH tập trung phát triển các mảng nội dung sau đây:

- Toán dành cho khối học sinh phổ thông theo chương trình dạy toán ở Việt Nam (bao gồm trung học cơ sở và trung học phổ thông, toán olympiad)
- Toán dành cho sinh viên khối đại học và sau đại học (bao gồm toán đại cương và một số chuyên ngành cơ bản)
- Toán học và các ngành khoa học khác (mối quan hệ mật thiết và ứng dụng của toán trong các ngành khoa học khác, đặc biệt là mối liên hệ với Khoa học Máy tính, Vật lý và Kinh tế)
- Các câu lạc bộ ngoại khoá (Vật lý, Hóa học, Sinh học, Ngoại ngữ, Thể thao)
- Văn hóa toán học (bao gồm các vấn đề liên quan đến toán như lịch sử toán học, danh nhân toán học, các thông tin thời sự toán học, ...)

Bên cạnh việc phát triển website, DĐTH cũng chú trọng đến việc xây dựng những trang vệ tinh chính thức (official blog) trên các mạng xã hội lớn như Blogspot, Wordpress, Facebook, nơi các bạn thành viên cũng có thể tìm thấy nhiều trang tin bài cá nhân rất bổ ích của các nhà khoa học uy tín và có đẳng cấp thế giới, như Giáo sư Ngô Bảo Châu, Ngô Đắc Tuấn, Ngô Quang Hưng và rất nhiều các tên tuổi khác.

Cùng với thời gian, Diễn đàn Toán học đang từng bước hoàn thiện tốt hơn những mục tiêu ban đầu và sẽ cố gắng đề xuất, thực hiện các mục tiêu mới.

V - Nhân lực – Trí lực

Theo thống kế mới nhất, Diễn đàn Toán học đã có khoảng 75.000 lượt đăng ký thành viên trong đó trên 35.000 thành viên chính thức. Bao gồm tất cả các đối tượng: học sinh, sinh viên và nghiên cứu sinh trong và ngoài nước; giáo viên ở các trường phổ thông, giảng viên tại các trường đại học, các nhà nghiên cứu Toán học ở Việt Nam và nhiều nước trên thế giới.

DĐTH được xây dựng và phát triển dựa trên sự đóng góp tự nguyện của tất cả các thành viên cùng với rất nhiều thế hệ của nhóm quản lý và cộng tác viên (CTV). Nhóm quản lý là những người điều hành toàn bộ diễn đàn. Nhóm này được chia làm các nhóm nhỏ, có phân cấp bậc, quyền hạn và chức năng khác nhau.

- Nhóm quản trị (Administrator): Bao gồm nhóm quản trị kỹ thuật – duy trì sự hoạt động ổn định của diễn đàn và nhóm quản trị nội dung – chuyên trách việc quản lý thông tin và điều hành tổng thể các hoạt động của DĐTH.
- Nhóm quản lý (Moderator): Là những người góp phần định hướng và cố vấn cho DĐTH. Trước khi chuyển đổi vị trí, nhóm quản lý ban đầu bao gồm 20 du học sinh đến từ các quốc gia Anh, Pháp, Đức, Áo, Nhật, Nga, Úc, Mỹ, Canada, và một số sinh viên ở trong nước (Hà Nội và Sài Gòn). Nhóm quản lý hiện tại chủ yếu bao gồm sinh viên và giáo viên rải đều ở nhiều tỉnh thành trên toàn quốc.
- Nhóm CTV: Bao gồm các CTV quản lý nội dung thông tin trên các chuyên mục khác nhau của diễn đàn, họ là những người trực tiếp kiểm duyệt và xử lý các bài viết của thành viên đăng tải trên forum. Bên cạnh đó, diễn đàn còn có một nhóm biên tập viên chịu trách nhiệm tổng hợp tin bài từ diễn đàn để đăng tải trên trang tin của DĐTH.

VI - Các hoạt trực tuyến hiệu quả

Qua 5 năm hoạt động hoạt động chính thức, các thành viên đã gửi lên DĐTH hơn 200.000 bài viết thuộc về 30.000 chủ đề (topic). Trong số đó, nhiều chủ đề thảo luận chuyên môn có tới hơn hàng trăm bài viết, hàng vạn lượt đọc và đã được trích dẫn lại ở nhiều cộng đồng mạng có liên quan. Số liên kết từ các website khác tới DĐTH là hơn 200 links (một con số rất lớn và có ý nghĩa quan trọng đối với một cộng đồng học thuật trực tuyến)

Những chủ đề đáng nhớ và có giá trị tham khảo cao trên diễn đàn có thể kể tới: thảo luận về việc học tập và nghiên cứu Giải Tích toán học ở hai miền Nam và Bắc; thảo luận về thực trạng nền toán học Việt Nam với sự tham gia của hàng chục nghiên cứu sinh đang sống và làm việc trong nước và nhiều nước trên thế giới. Những chủ đề tìm hiểu về công trình của các nhà toán học Việt Nam giai đoạn trước và những công trình đương đại luôn là "đặc sản" của DĐTH. Tất nhiên không thể không nhắc tới những chủ đề nóng về việc học tập và giảng dạy toán học ở bậc phổ thông. Hai chủ đề "nóng" nhất là "News of the days" và "Thực trạng nền toán học Việt Nam" đều do PhD Đỗ Đức Hạnh (Berkeley) khởi tạo.

Về mảng toán sơ cấp, DĐTH đã tạo điều kiện cho những phong trào học tập, thảo luận và làm việc theo nhóm giữa các bạn học sinh phát triển một cách không ngờ. Nhiều nhóm CTV đã làm việc với nhau rất nghiêm túc và hiệu quả để cho ra đời những ấn phẩm có giá trị cao, trong đó có thể kể tới cuốn sách "Sáng tạo bất đẳng thức" của nhóm tác giả Phạm Kim Hùng (Stanford University), cuốn "Bất đẳng thức, suy luận và khám phá" của nhóm tác giả Phạm Văn Thuận (Hanoi University of Sciences), cuốn "Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học" của nhóm tác giả Trần Phương (CENSIP), ... Trong thời gian tới hứa hẹn sẽ có thêm nhiều ấn phẩm chất lượng được xây dựng bởi nhiều thành viên khác.

Về mảng toán đại học, những chủ đề về hình học đại số, lý thuyết mật mã, và hình học hiện đại luôn thu hút được sự quan tâm của không chỉ những nghiên cứu sinh, mà cả các sinh viên, thậm chí nhiều học sinh phổ thông thực sự có đam mê. Bên cạnh có những chủ đề cổ điển về giải tích và lý thuyết nhóm cũng rất được quan tâm. Hai chủ đề được yêu thích nhất là "Chỉ số trải, chỉ số phủ" của Assistant Professor Hà Huy Tài (Tulane University) với nickname **CXR** và "Truy tìm dấu vết kẻ phản bội" của Assistant Professor Phan Dương Hiệu (University of Paris 8) với nickname **RongChoi**.

Về mảng văn hóa toán học, rất nhiều tài liệu thú vị đã được chia sẻ, và qua đó thu hút được sự quan tâm của nhiều bạn đọc. Chính từ những bài viết này, vào năm 2007 DĐTH đã tổng hợp và liên kết với NXB Giáo Dục Đà Nẵng để cho ra đời hai ấn phẩm với tựa đề là "Chuyện kể về các danh nhân toán học" và "Toán học và những điều lý thú".

Bên cạnh những thảo luận hàng ngày trên diễn đàn, DĐTH đã tổ chức định kỳ một số kỳ thi trực tuyến, trong đó có kỳ thi viết về vẻ đẹp toán học BOM (Beauty Of Mathematics Constest) năm 2005, và cuộc thi giải toán trên mạng Vietnam Mathematics Electronic Olympiad (VMEO) vào các năm 2004, 2005, 2006.

Kỳ thi VMEO đã được tổ chức tổng cộng ba lần, lần thứ nhất vào năm 2004, lần thứ hai vào năm 2005 và lần thứ ba vào năm 2006. Kỳ thi được tổ chức thường niên vào các tháng 10, 11, 12. Với sự tham gia của trên 100 học sinh trên khắp 3 miền của tổ quốc, VMEO là kì thi dành cho đối tượng học sinh giỏi. Điểm đặc biệt thú vị là tất cả các bài toán được sử dụng làm đề thi đều được sáng tác bởi chính các bạn học sinh và sinh viên toán thuộc nhóm CTV. Cả người ra đề bài, và thí sinh dự thi đều là những bạn trẻ, nhiều bạn trong đó cũng đã có được những tấm huy chương quốc tế (IMO) tương xứng với khả năng sáng tạo của bản thân.

Hiện nay DĐTH đang tiếp tục triển khai xây dựng một số nội dung trực tuyến mới, trong đó có thể kể tới bộ từ điển thuật ngữ toán học trực tuyến và Atlas toán học, những nội dung này đang được chạy thử nghiệm bản beta và dự kiến đầu năm 2010 sẽ chính thức tới với các bạn độc giả và thành viên.

VII - Các hoạt động ngoại tuyến tiêu biểu

Hướng tới việc xây dựng một cộng đồng mang tính học thuật có chất lượng, một sân chơi đúng nghĩa cho các bạn trẻ yêu toán, trở thành chiếc cầu nối giữa các thế hệ toán học Việt Nam, DĐTH rất chú trọng việc xây dựng các sự kiện và hoạt động ngoài đời thực, nơi những cư dân mạng (netizen) có thể gặp gỡ, trao đổi, thảo luận, giao lưu và cùng nhau làm những việc bổ ích. Tiêu biểu là các sự kiện sau:

Trại hè Toán Học Hà Nội tháng 8 năm 2006 là nơi hội tụ của 150 bạn học sinh, sinh viên miền Bắc (đến từ Hà Nội, Hải Dương, Nam Định, Thanh Hóa, Hà Tây, Hải Phòng, Hưng Yên), một số thành viên miền Trung (đến từ Nghệ An, Hà Tĩnh, Huế, Quảng Bình, Quảng Trị, Đà Nẵng) cùng với sự góp mặt của rất nhiều thầy cô từ các trường, các tạp chí toán học và từ các viện nghiên cứu. Đây là nơi trao đổi, truyền đạt kinh nghiệm giữa các thế hệ đi trước với các lớp trẻ kế cận, nơi các bạn thành viên quen nhau qua các nickname trên diễn đàn, nay được gặp gỡ, tay bắt mặt bừng. Trại hè không chỉ dừng lại ở một cuộc gặp gỡ, trao đổi về toán học, mà nó còn là nó còn là một sự đánh dấu cho tính thực (reality) và sống động của cộng đồng mà DĐTH xây dựng.

Chuyến du ngoạn Côn Sơn, Kiếp Bạc hè 2007 là một buổi dã ngoại mà các bạn thành viên của diễn đàn được gặp gỡ ở thế giới thực, và được cùng nhau thăm quan các thắng cảnh của Hải Dương, đó là Côn Sơn, Kiếp Bạc, sông Kinh Thầy, đền thờ Nguyễn Trãi và bàn cờ Tiên. Các thành viên đã được hòa mình với sông nước, núi non hữu tình, để có thể giải tỏa những căng thẳng của công việc học tập và lo âu đời thường, được chia sẻ và cảm nhận không chỉ về toán học, mà mở rộng hơn nữa, đó chính là một đời sống toán học, một văn hóa toán chân thực.

Hội thảo tương tác Toán – Lý – Thiên văn tại thành phố Hồ Chí Minh hè 2008 là một sự kiện mới mẻ và thú vị, đây là nơi gặp gỡ và giao lưu của hơn 200 thành viên trực thuộc ba cộng đồng học thuật trực tuyến là Diễn đàn Toán học, Diễn đàn Vật lý Việt Nam và Câu lạc bộ Thiên văn Vietastro. Ở hội thảo này các bạn trẻ yêu toán đã có cơ hội tìm hiểu thêm về ý nghĩa của lĩnh vực mình yêu thích trong những mối quan hệ đặc biệt quan trọng và mật thiết với Vật lý và Thiên văn học.

Các seminar phương pháp toán sơ cấp và CLB Toán học đã được triển khai tổ chức tại thành phố Hồ Chí Minh. Bắt đầu từ cuối năm 2007, các seminar đều đặn diễn ra tại nhiều địa điểm trường khác nhau vào sáng chủ nhật hàng tuần. Tổng cộng đã có khoảng 30 buổi seminar được diễn ra với nhiều nội dung từ đại số, số học, hình học tới xác suất, thống kê và giải tích. Cũng trong khuôn khổ chuỗi seminar này, DĐTH đã liên kết với đại học FPT và trường THPT chuyên Lê Hồng Phong (thành phố Hồ Chí Minh) xây dựng được các CLB Toán học. Các CLB này đã tổ chức được các buổi dạy chuyên đề chuyên toán cơ bản, các bài kiểm tra và cuộc thi thú vị và hấp dẫn. Bên cạnh đó seminar và CLB còn tổ chức những buổi dã ngoại bổ ích, tiêu biểu là những buổi dã ngoại tại khu du lịch Bình Quới và khu du lịch thác Giang Điền. Những seminar này đã thu hút được không chỉ đông đảo các bạn học sinh tới từ thành phố Hồ Chí Minh mà còn cả những thầy giáo và những bạn học sinh từ các tỉnh lân cận như Bình Phước, Đồng Nai, Vĩnh Long, Cần Thơ tới dự và tham gia thảo luận.

Trong thời gian tới mô hình này sẽ tiếp tục được nhân rộng ra các địa phương lân cận và ở hai miền Bắc bộ và Trung bộ. DĐTH cũng sẽ tiếp tục cải tiến nội dung các trại hè toán học và hướng tới việc hình thành các trường hè, các đại hội toán học, nơi gặp gỡ, trao đổi giữa các thế hệ toán học Việt Nam.

Bên cạnh đó DĐTH cũng sẽ tiếp tục nghiên cứu triển khai những kỳ thi kết hợp giữa cộng đồng trực tuyến và hoạt động ngoại tuyến, kết hợp giữa những nội dung toán học cổ điển và những hình thức mới mẻ trong thời đại số. Mô hình một tờ báo giấy kết hợp với báo điện tử cũng đang được nghiên cứu. Ngoài ra DĐTH cũng đang chạy thử nghiệm một mạng xã hội ảo (social network) dành cho các bạn trẻ, các thầy giáo, và các nhà toán học có thể tương tác với nhau mạnh mẽ hơn.

VIII - Một số thống kê

Số liệu về diễn đàn từ ngày 23 tháng 12 năm 2004 đến ngày 23 tháng 07 năm 2009.

- Diễn đàn có tổng cộng 75.000 lượt thành viên đăng ký bí danh (nickname).
- Diễn đàn có tổng cộng 35.000 thành viên chính thức (member).
- Diễn đàn có tổng cộng 30.000 chủ đề trao đổi (topic).
- Diễn đàn có tổng cộng 180.000 bài viết (post).
- Diễn đàn có tổng cộng 20.000 bài viết bị xóa (spam).
- Diễn đàn có tổng cộng 65.000 lượt nhắn tin cá nhân (PM).
- Diễn đàn có tổng cộng 3.000.000 lượt đọc tin trên trang tin bài.
- Diễn đàn có tổng cộng 12.000.000 lượt thành viên truy cập vào forum.
- Tổng lượng thông tin lưu trữ trên diễn đàn và trang chủ là 1.300 Megabyte
- Nội dung bài viết từ thành viên tương đương 130 cuốn sách dầy 500 trang/cuốn.
- Các thành viên đã chia sẻ 5000 file đính kèm, tổng dụng lượng lên tới 1.500 Megabyte
- Thành viên truy cập vào diễn đàn đến từ 40 quốc gia và vùng lãnh thổ trên thế giới
- Có tổng cộng gần 200 thành viên đã từng trở thành cộng tác viên của diễn đàn
- Có tổng cộng 500 thành viên liên tục tham gia các hoạt động ngoại tuyến
- Diễn đàn có tổng cộng 5 lần nâng cấp sau 5 năm hoạt động chính thức.
- DĐTH từng lọt vào top 50.000 site lớn nhất thế giới (theo Alexa)
- DĐTH từng lọt vào top 500 site top Việt Nam (theo Alexa)

IX - Định hướng phát triển trong giai đoạn mới

Mục tiêu của diễn đàn là lọt vào Top 100 các website của Việt Nam và tiếp tục nằm trong Top 5 các website về Toán.

Về nội dung, Diễn đàn Toán học vẫn tiếp tục tập trung vào hai mảng chính: Toán sơ cấp dành cho học sinh phổ thông và Toán cao cấp dành cho sinh viên Đại học.

Tập trung nâng cao chất lượng diễn đàn qua việc xây dựng đội ngũ Moderator và CTV mạnh, tâm huyết; kết hợp các hoạt động online với các hoạt động offline (mở rộng hoạt động của các seminar, CLB Toán học, tiến đến tổ chức Trường hè cho học sinh chuyên toán và cho sinh viên); xây dựng tờ báo của diễn đàn, tổ chức các cuộc thi online và offline; tổ chức tốt kho dữ liệu của diễn đàn, tiến đến việc đánh giá và phân loại (theo nguyên tắc "quý hồ tinh bất quý hồ đa").

Về công nghệ, đảm bảo diễn đàn hoạt động ổn định, an toàn dữ liệu, truy cập nhanh, liên tục cập nhật về công nghệ để có thêm những hình thức hoạt động trên mạng hấp dẫn và phong phú.

Diễn đàn sẽ vẫn tiếp tục phát triển với tinh thần phi lợi nhuận, vì cộng đồng (và đã, đang và sẽ được sự trợ giúp từ cộng đồng) nhưng sẽ có những hình thức để tự chủ tài chính, tiến đến việc có thu nhập để có thể tự nuôi sống diễn đàn, các thành viên cốt cán và có điều kiện chủ động tổ chức các hoạt động của mình.

X - Chung sức xây dựng diễn đàn

Trải qua nhiều thế hệ của nhóm quản lý diễn đàn, các thành viên có cùng mối quan tâm trong lĩnh vực Toán học, đã cùng nhau xây dựng nên Diễn đàn Toán học, họ là những người tạo ra sân chơi nhưng nó có thực sự là sân chơi của những người yêu Toán hay không lại phụ thuộc vào chính các thành viên và độc giả lướt web, những người vẫn thường xuyên ghé thăm địa chỉ `www.diendantoanhoc.net.`

Để diễn đàn phát triển cả về chiều rộng với số lượng đông đảo thành viên, độc giả cũng như chiều sâu, nội dung và thông tin, DĐTH cần sự hỗ trợ và giúp đỡ từ tất cả mọi người. DĐTH rất mong nhận được sự cộng tác của các bạn.

Tài liệu tham khảo

[1]. Giới thiệu về Diễn đàn Toán học - Nguyễn Hữu Tình (VMF)

[2]. Phương hướng nhiệm vụ và Mục tiêu phát triển Diễn đàn Toán học 2008-2009 - Nguyễn Luyện, Nguyễn Quốc Khánh, Nguyễn Hữu Tình (VMF)

[3]. Diễn đàn Toán học – `www.diendantoanhoc.net`

Đôi nét về Cộng đồng Mathvn.org

Nguyễn Văn Vinh - Đại học Tổng hợp Quốc gia Belarus, CH Belarus

▽

I - Câu chuyện của Mathvn.org

Nói đến sự ra đời của MathVn thì chỉ là những điều khiêm tốn. Đó như là một cái duyên, một câu chuyện nhỏ của những cậu sinh viên mới bước vào giảng đường khoa Toán đại học đầy bỡ ngỡ. Năm 2006-2007, bản thân tôi có tham gia cuộc thi ý tưởng sáng tạo của sinh viên Đại Học Huế với ý tưởng xây dựng Viện đại học mở. Nhưng vì lí do khách quan tôi đành bỏ dở khi phải đi du học. Một năm sau đó cũng mang trong mình những ý tưởng ngày nào nhưng không làm được, vẫn mơ ước có một môi trường giao lưu khoa học lành mạnh trong cộng đồng các bạn trẻ Việt Nam. Khoảng chừng tháng 3 năm 2008 một cách tình cờ tôi biết đến blog của Tuấn Minh cũng là bạn đồng môn khi còn học chuyên Toán, Quốc Học - Huế. Lang thang vào blog thấy cậu ấy rất thích tạp chí Kvant và dịch nhiều bài chuyên đề, bài tập rất hay trong khi bản thân tôi khi đó dù đã học tiếng Nga hơn ba năm mà vẫn thấy khó.

Thấy được lòng say mê của Minh tôi có đề nghị là anh em lập website dịch tạp chí Kvant để chia sẻ với mọi người, công việc đơn giản vậy thôi. Nhưng rồi lại nghĩ chỉ dịch Kvant thôi thì không đủ. Như thế thì có mặt hạn chế của việc trao đổi một chiều, và cuối cùng chúng tôi nghĩ đến một tạp chí thường thức. Những câu hỏi và ý tưởng cứ thế xuất hiện: Tại sao chưa có làm một tạp chí nào phục vụ cho đối tượng như sinh viên học Toán trong nước mình như Kvant, American Mathematical Monthly, Crux...? Nhưng nếu có khả năng bắt tay vào làm thì mục đích chính là để đem lại lợi ích cho cộng đồng. Nếu ta chỉ làm ra hay dịch hết Kvant đi nữa mà không có môi trường giao lưu thì cũng không được. Vậy là anh em đã nhen nhóm một quyết định liều lĩnh: xây dựng một diễn đàn Toán và cùng làm tạp chí MathVn.

Công việc khó khăn này đòi hỏi sự chung tay của nhiều người chứ không đơn thuần là sự bó gọn nội bộ của một vài cá nhân. Tôi bàn với anh Ngọc cũng là người bạn Quốc Học học trên một khóa và học cùng trường ĐHTHQG Belarus. Tôi nói bây giờ có ý làm một website và một tạp chí cho sinh viên học Toán. Anh Ngọc ủng hộ nhưng vẫn lo lắng vì thấy sức anh em không đủ, trình độ không cao, nhân lực thì ít. Lo lắng nhiều nhưng vẫn quyết tâm làm, dù vẫn biết ngày đó trong nước ta đã có Diễn đàn Toán, phong trào online khá mạnh. Được bao nhiêu tốt bấy nhiêu, vì điều quan trọng là mỗi anh em thấy vui khi làm Toán, có mang lại chút gì đó cho cộng đồng. Sau nhiều lần suy nghĩ cả ba chúng tôi cùng đi đến kết luận khai trương diễn đàn vào giữa tháng 5-2008, nhưng thực sự hoạt động chính thức thì phải từ tháng 9-2008.

II - Mục tiêu của Mathvn.org

Những ngày đầu, mục tiêu của cộng đồng Mathvn.org khá nhỏ bé: Đó là một sự ước mơ tạo một sân chơi cho các bạn trẻ đam mê và chọn Toán học là con đường đi của mình, và bên cạnh đó là ngày càng nhiều bạn bè khắp nơi đón đọc sản phẩm dịch thuật của chúng tôi – Kvant và tham gia giải toán trên tạp chí này; vì bản thân anh em cũng có những người học đang ở nước ngoài, có trên tay tạp chí Kvant định kì nên mong muốn được chia sẻ niềm vui này đến cộng đồng. Nhưng rồi ngày càng có nhiều bạn bè, thầy cô giúp đỡ lại nảy sinh ra nhiều ý tưởng khác. Cùng với sự ra đời của tạp chí MathVn, diễn đàn có nét thay đổi lớn từ đầu năm 2009, đã gây được chú ý nhiều hơn và chất lượng các thành viên và bài viết ở diễn đàn là điểm nhấn đáng kể, chúng tôi đã được sự chấp nhận và cổ vũ của các bạn yêu Toán khắp nơi trong và ngoài nước.

Ngày nay, mục tiêu chính của Cộng Đồng MathVn – Cộng Đồng Học sinh, Sinh viên yêu Toán Việt Nam là xây dựng được một môi trường học thuật Toán học lành mạnh, chất lượng cao theo các tiêu chí hành động sau:

1. Xây dựng một cộng đồng mạnh, bền vững và chất lượng về cộng đồng thành viên tham gia và các chuyên đề được thảo luận về Toán học Sơ cấp lẫn Toán học Hiện đại phục vụ nhu cầu trao đổi của sinh viên đại học, học viên cao học và các nghiên cứu sinh ngành Toán; nâng cao tính hiệu quả, năng động của ban quản trị; cố gắng mở rộng và xây dựng đội ngũ lãnh đạo diễn đàn có uy tín và trình độ về Toán học.

2. Xây dựng tạp chí điện tử Mathvn đáp ứng được nhu cầu của bạn bè, thầy cô yêu toán khắp nơi cũng như truyền bá ra nước ngoài với các phiên bản tiếng Anh và tiếng Nga.

3. Thành lập đội ngũ dịch thuật chuyên nghiệp hoàn thành nhiều chuyên đề có chất lượng mang do các thành viên Mathvn biên tập, trong tương lai khi có điều kiện sẽ cho in. (Các dự án sắp hoàn thành: chuyên đề Kvant, tuyển tập bài tập Kvant, Olympic sinh viên các nước trên thế giới, Kĩ thuật vi tích phân,...)

4. Cố gắng trong tương lai không xa xây dựng nguồn bài giảng chất lượng của các giáo viên uy tín cho các học sinh chuyên nhằm nâng cao trình độ và định hướng cho con đường khoa học của các bạn trẻ.

5. Mong muốn các thành viên cũng như cộng đồng nhìn ra thế giới, quan tâm hơn nữa các vấn đề mở của toán học, bên cạnh đó là chia sẻ cách tìm học bổng cũng như kinh nghiệm trong nghề làm toán.

6. Xây dựng được các nhóm thảo luận tương tác trên môi trường mạng giữa nghiên cứu sinh, sinh viên làm nghiên cứu theo các chuyên ngành hẹp nhằm nâng cao khả năng tương tác làm toán của thế hệ trẻ Việt Nam để từ đó có thể tiến tới những mục tiêu xa hơn.

Các quản trị viên chính của Cộng đồng

- Phan Thành Nam, Đại học Copenhagen, Đan Mạnh
- Ngô Phước Nguyên Ngọc, Đại học Tổng hợp Quốc gia Belarus
- Phạm Thị Thảo Hiền, Đại học Tổng hợp Quốc Gia Belarus

- Nguyễn Văn Vinh, Đại học Tổng hợp Quốc gia Belarus
- Nguyễn Tuấn Minh, Đại học Tổng hợp Quốc Gia Belarus.

Định lý Green-Tao

Valentin Blomer - Toronto, Canada

∇

"Số nguyên tố được tạo ra là để nhân chứ không phải để cộng", Gelfand cho rằng câu nói nổi tiếng này thuộc về nhà vật lý người Nga Lev Landau. Tuy nhiên, các tính chất cộng tính của số nguyên tố luôn là chủ đề hấp dẫn của các thế hệ các nhà toán học chuyên nghiệp (và nghiệp dư) và đến nay đã có rất nhiều những phương pháp mạnh và uyển chuyển để tấn công các bài toán cổ điển.

Một bước đột phá đáng kể đã đạt được trong một công trình của hai nhà toán học Ben Green và Terence Tao, giải thưởng Fields 2006. Ben Green hoàn thành luận án tiến sĩ của mình vào năm 2002 dưới sự hướng dẫn của Tim Gowers và hiện nay là GS Đại học Cambridge, Anh. Terence Tao lúc đó là sinh viên của trường ĐH Elias Stein (Princeton) và hiện nay làm việc tại ĐH California, Los Angeles. Anh được biết đến với những đóng góp căn bản đầy ấn tượng cho nhiều lĩnh vực toán học, trong đó có giải tích điều hoà, phương trình đạo hàm riêng, phân tích tín hiệu, hình học đại số tổ hợp và lý thuyết số. Năm 2004, Green và Tao công bố kết quả sau:

Định lý 1. (Green-Tao [6]). *Tập hợp các số nguyên tố chứa các cấp số cộng độ dài tuỳ ý; nói cách khác, với mọi $k \geq 3$, tồn tại dãy $p_1, p_2, ..., p_k$ các số nguyên tố sao cho $p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = ... = p_k - p_{k-1}$. Chính xác hơn, tồn tại hằng số $\delta_k > 0$ sao cho*

$$\#\{(n,d) \in [1,N]^2 \mid n, n+d, ..., n+(k-1)d \text{ là các số nguyên tố } \} \geq \delta_k \frac{N^2}{(\log N)^k}$$

Ví dụ $7, 37, 67, 97, 127, 157$ là cấp số cộng độ dài $k = 6$ gồm toàn các số nguyên tố. Năm 2004, Frind, Underwood và Jobling tìm được một cấp số cộng độ dài 23 có số hạng đầu vào khoảng $5,6.10^{13}$ nhưng sự tồn tại của một cấp số như vậy có thể chỉ đơn giản là một sự cá biệt. Lưu ý rằng định lý bảo đảm sự tồn tại của một cấp số có độ dài tuỳ ý chứ không phải là một cấp số vô hạn gồm toàn các số nguyên tố: $n + jd$ hiển nhiên sẽ không là nguyên tố với $j = n$.

Bài viết này giới thiệu một số ý tưởng và kỹ thuật được sử dụng trong chứng minh định lý. Cũng có một số các nghiên cứu khác về vấn đề này, ví dụ $[5, 11, 14, 15]$.

Các hướng tiếp cận heuristic

Cơ sở nào để tin rằng định lý Green-Tao là đúng? Các số nguyên tố không tuân theo một quy luật nào nhưng chúng được phân bố khá ngẫu nhiên. Điều này gợi ý đến hướng tiếp cận xác suất: theo định lý về số nguyên tố

$$\pi(x) := \#\{p \leq x \mid p \text{ nguyên tố } \} \sim \frac{x}{\log x} \qquad (1)$$

xác suất để một số n bất kỳ được chọn ngẫu nhiên là nguyên tố bằng $1/\log n$. Bây giờ ta hãy chọn một cách ngẫu nhiên số hạng đầu $n \leq N$ và công sai $d \leq N$ của cấp số. Khi đó xác suất để $n, n+d, ..., n+(k-1)d$ đều nguyên tố là khoảng $1/(\log N)^k$, như thế sẽ có khoảng $N^2/(\log N)^k$ cấp số với số hạng đầu và công sai không vượt quá N. Ta đã ngầm giả định rằng các biến cố "n nguyên tố" và "$n+d$ nguyên tố" là độc lập. Điều này hiển nhiên là sai, như ta có thể thấy trong trường hợp $d = 1$: Với mọi $n > 2$ nguyên tố thì $n+1$ không thể là số nguyên tố. Ngược lại, với $d = 2$, và n nguyên tố thì xác suất (có điều kiện) để $n+2$ nguyên tố sẽ lên đến $2/\log N$ vì ta đã biết $n+2$ là số lẻ. Hiệu ứng này, tuy nhiên có thể kiểm soát được dễ dàng. Chúng được xác định bởi các điều kiện hiển nhiên về đồng dư và chia hết hay nói trên ngôn ngữ hình thức hơn từ các ràng buộc $p-$adic của các completion không-archimedes Q_p của Q. Với mỗi một số nguyên tố p ta nhận được một thừa số điều chỉnh và ta đi đến giả thuyết sau:

Giả thuyết. *Với $k \geq 3$ cố định, ta có*

$$\#\{(n,d) \in [1,N]^2 \mid n, n+d, ..., n+(k-1)d \text{ là các số nguyên tố } \} \sim \gamma_k \frac{N^2}{(\log N)^k} \qquad (2)$$

khi $N \to \infty$. Trong đó $\gamma_k = \prod_p \alpha_p(k)$ là một tích trên tập các số nguyên tố hội tụ tuyệt đối được cho tường minh và thoả mãn điều kiện $\gamma_k = \exp((1+o(1))k \log\log k)$ khi $k \to \infty$.

Nếu giả thuyết này đúng thì hiển nhiên rằng với mọi $k \geq 3$ cố định tồn tại (thực ra là tồn tại vô số) cấp số cộng độ dài k nếu ta lấy N đủ lớn, chẳng hạn $N = k^k$.

Bên cạnh góc nhìn xác suất, giả thuyết còn được củng cố bởi một phương pháp của Hardy và Littlewood, được gọi là phương pháp đường tròn [1]. Được đề xuất vào năm 1920, phương pháp này được mở rộng và phát triển để ngày này trở thành một công cụ mạnh trong lý thuyết số cộng tính. Với $k = 3$ chẳng hạn, ta có thể lý luận như sau

Với $\alpha \in \mathbb{R}$, đặt $f(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha}$ là tổng hữu hạn với p lấy trên tập các số nguyên tố[2] .

Khi đó ta có

$$I = \int_0^1 F(\alpha)F(-2\alpha)d\alpha = \sum_{p_1,p_2,p_3 \leqslant N} \int_0^1 \exp(2\pi i(p_1 + p_2 - 2p_3)\alpha d\alpha.$$

$$= \#\{(p1, p2, p3) \in [1,N]^3 \mid p_1 - p_3 = p_3 - p_2, \text{ tất cả } p_j \text{ nguyên tố } \}$$

vì các tích phân đều bằng 0 trừ khi $p_1 + p_2 - 2p_3 = 0$. Vế phải chính là giá trị mà ta cần tìm, vì vậy ta cần tính hoặc đánh giá tích phân I. Ta nhận xét rằng f có thể tính dễ dàng khi $\alpha = 0$; ta có $f(\alpha) = \pi(N)$. Tương tự ta có

[1]Vì f là hàm tuần hoàn chu kỳ 1, nó có thể được xem như hàm số trên S_1. Từ đây mới có thuật ngữ phương pháp đường tròn.

[2]Số hạng thứ nhất đến từ số nguyên tố 3

$$f(1/3) = 1 + e^{2\pi i/3}\#\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ nguyên tố và } p \equiv 1 \mod 3\}$$

$$+e^{4\pi i/3}\#\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ nguyên tố và } p \equiv 2 \mod 3\}.$$

Nói chung các hàm dưới tích phân của I có thể xấp xỉ khá tốt tại các số hữu tỷ p/q với mẫu số q không quá lớn nếu ta biết về phân bố của các số nguyên tố trong các lớp thặng dư modulo q. Do tính liên tục, ta có thể mở rộng xấp xỉ này đến một lân cận nhỏ của các số hữu tỷ này. Tích phân trên phần này của đoạn thẳng đơn vị sẽ cho chúng ta kết quả của định lý, bỏ qua một sai số nhỏ. Nếu ta có thể kiểm soát được hàm dưới tích phân một chút bên ngoài các điểm hữu tỷ bằng các kỹ thuật khác, phần còn lại của tích phân sẽ có thể coi như sai số và (2) được chứng minh. Với $k = 3$ điều này quả thật là có thể và đã được van der Corput đề cập đến trong [1] vào năm 1939.

Một cách tiếp cận khác cho (2) là kiểm tra điều kiện nguyên tố bằng các công cụ tổ hợp, sử dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ, hay là sàng Erasthostenes: để tính số các số nguyên tố trong tập hợp $S \subset [1, N]$ ta trừ đi từ tổng số các bội số của 2, sau đó các bội số của 3 (nhưng lại cộng vào các số bị trừ hai lần là các bội số của 6) cứ như vậy cho đến số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn $\sqrt{N}3$ [3]. Điều này dẫn đến $2^{\pi(\sqrt{N})}$ số hạng với dấu $+, -$ mà không thể kiểm soát một cách ổn thoả. Lý thuyết sàng cung cấp các công cụ tổ hợp mà trong nhiều tình huống làm cho việc thực hiện quá trình tương tự như vậy («sàng») là có thể ít nhất là đến N^δ với $\delta > 0$ (nhỏ nhưng cố định) nào đó. Số $s \in S$ mà chỉ chia hết cho các số nguyên tố $p > N^\delta$ có nhiều nhất $1/\delta$ thừa số nguyên tố; như vậy ta có thể xác định các số «gần như nguyên tố » trong S chỉ có một số cố định các thừa số nguyên tố. Tổng quát hơn, sàng có thể áp dụng cho bộ k số, ví dụ cấp số cộng độ dài n. E.Grosswald [9] chứng minh vào năm 1980 rằng tồn tại cấp số cộng độ dài tuỳ ý gồm toàn các số gần như nguyên tố. Chính xác hơn, với mọi k tồn tại số $A = A(k)$ sao cho tồn tại (vô số) cấp số cộng độ dài k gồm các số có nhiều nhất A thừa số nguyên tố. Phương pháp đường tròn và phương pháp sàng có thể kết hợp lại: Heath-Brown [10] chứng minh vào năm 1981 rằng tồn tại vô số các cấp số cộng gồm ba số hạng, trong đó có ba số là nguyên tố và một số có nhiều nhất hai thừa số nguyên tố.

Cuối cùng, người ta hy vọng rằng không còn tính chất số học nào nữa của các số nguyên tố cần cho việc chứng minh (2), chỉ cần mật độ (1) cho bởi định lý về số nguyên tố là đủ để đảm bảo sự tồn tại của cấp số cộng độ dài tuỳ ý. Đây là một giả thuyết dân gian (folklore) nhưng chưa có một chứng minh nào cho nó. Định lý nổi tiếng của van der Waerden [18] (1927) nói rằng với mỗi phân hoạch $N = \bigcup_{j=1}^n S_j$ thành hữu hạn các tập con S_j thì ít nhất một trong chúng sẽ chứa cấp số cộng độ dài tuỳ ý. Bằng những áp dụng thiên tài phương pháp đường tròn, Klauth Roth (người cũng được giải thưởng Fields) [12] chứng minh vào năm 1956 rằng với một hằng số $c > 0$ nào đó mọi tập hợp $S \subset [1, N]$ có số phần tử $\#S \geq cN/\log(\log N)$ chứa cấp số cộng độ dài 3. Một trong những định lý quan trọng nhất theo hướng này là định lý Szemeredi [13] (1975): với $S \subset \mathbb{N}$ đặt $d^*(S) := \limsup \#(S \cap [1, N])/N$ là mật độ trên. Nếu $d^*(S) \geq c > 0$ thì S chứa cấp số cộng độ dài tuỳ ý. Chứng minh sử dụng, ngoài các công cụ khác, định lý van der Waerden. Về sau có hàng loạt các chứng minh của định lý Szemeredi đã được tìm ra, chẳng hạn bởi Furstenberg [2] (1977) và bởi Gowers [4] (2001) người đã chứng minh một kết quả mạnh

[3]Điều này sẽ loại đi các số nguyên tố từ 1 đến $\sqrt{N}$ nhưng số các số này là nhỏ so với tất cả các số nguyên tố trong $S \subset [1, N]$.

hơn. Tồn tại các hằng số $c_k, d_k > 0$ sao cho với mọi tập con $S \subset \mathbb{N}$ thoả mãn điều kiện $\#(S \cap [1, N]) \geq c_k N(\log\log N)^{-d_k}$ chứa cấp số cộng độ dài k. Đáng tiếc là, do (1) điều này là không đủ cho các số nguyên tố. Năm 1936, Erdos và Turan đưa ra giả thuyết tổng quát hơn rằng mọi tập con $\{a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{N}$ chứa cấp số độ dài tuỳ ý, chỉ cần thoả mãn điều kiện $\sum 1/a_j$ phân kỳ (chính là điều kiện mà các số nguyên tố thoả mãn). Giả thuyết này vẫn là bài toán mở; thậm chí hiện nay ta còn không biết một tập hợp như vậy có chứa cấp số cộng độ dài 3 hay không.

Ý tưởng của chứng minh

Không một các tiếp cận heuristic nào trên đây có thể chứng minh (2) nhưng tất cả chúng đóng vai tròn nền tảng trong việc chứng minh định lý Green-Tao. Ý tưởng cơ bản là phân biệt giữa các tập hợp có dáng vẻ như tập ngẫu nhiên (tập giả ngẫu nhiên) và các tập hợp có một cấu trúc nào đó. Với các tập giả ngẫu nhiên ta có thể lý luận một cách xác suất, trong khi với tập còn lại ta có thể khám phá ra một cấu trúc riêng nào đó. Ta hy vọng rằng có thể phân tích các tập hợp bất kỳ thành hai thành phần: ngẫu nhiên và có cấu trúc, và trong cả hai trường hợp ta có cách để tìm cấp số. Tất nhiên, khó khăn là ở chỗ làm cho ý tưởng này chính xác.

Nếu như ta tìm cấp số cộng gồm các số nguyên tố, sẽ có một hiệu ứng hiển nhiên đến từ phân bố của các số nguyên tố modulo các số "nhỏ"; ví dụ sẽ không có cấp số nào có công sai $d = 1$. Hiệu ứng này tương ứng với thành phần chính trong phương pháp đường tròn và, gần như tương đương, với thừa số điều chỉnh γ_k trong tiếp cận xác suất. Vì những lý do kỹ thuật, ta bỏ đi những tính chất này của số nguyên tố: vì gần như tất cả các số nguyên tố đều lẻ, dãy $(p-1)/2$, $p \geq 3$ là phân bố đều modulo 2, vì số nguyên tố đồng dư 1 modulo 4 gần như bằng số nguyên tố đồng dư 3 modulo 4. Để đi tiếp, dãy các số nguyên tố có thể điều chỉnh để chúng trở thành dãy phân bố đều theo modulo $p \leq P$. Đặt $W := \prod_{p \leqslant P} p$ và định nghĩa số p^* là "nguyên tố điều chỉnh" nếu $Wp^* + 1$ nguyên tố. Để chứng minh (2), ta cần đạt được hai mục tiêu: khái niệm "cấu trúc" và "tập hợp giả ngẫu nhiên" cần được chính xác hoá và ta cần nghiên cứu ảnh hưởng của cấu trúc này trong trường hợp số nguyên tố. Cả hai câu hỏi nói chung đều rất khó.

Để bắt đầu, ta xét tập con $S \subset [1, N]$ như tập con của $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ là xét các hệ số Fourier của hàm đặc trưng $1_S(x)$. Ta xét các tổng luỹ thừa dạng

$$\sum_{s \in Z/NZ} e^{2\pi isr/N} 1_S(s) = \sum_{s \in S} e^{2\pi isr/N}, \quad r \in Z/nZ. \quad (3)$$

Ta so sánh các hệ số này với hệ số Fourier của giá trị kỳ vọng

$$\sum_{s \in Z/NZ} e^{2\pi isr/N} (\#S/N), \quad r \in Z/nZ. \quad (4)$$

Nếu hiệu của (3) và (4) là nhỏ với mọi $r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ thì điều này có thể chứng tỏ rằng S gần giống với tập ngẫu nhiên. Thực tế, cách tiếp cận này là đủ đối với cấp số độ dài 3, điều này giải thích tại sao van der Corput lại có thể hoàn tất một cách thành công trường hợp $k = 3$. Tuy nhiên, một cách tổng quát, định nghĩa của tập hợp giả ngẫu nhiên phụ thuộc vào các đối tượng được xét. Nếu ta tìm các cấp số cộng dài hơn, định nghĩa của tập hợp giả ngẫu nhiên sẽ trở nên khó hơn. Ở đây ta cũng cần lấy tổng của hàm đặc trưng của S trên các exponent bậc hai dạng $e^{2\pi i s^2/N}$, hay thậm chí các số hạng phức tạp hơn dạng $e^{2\pi i s\sqrt{2}\{s\sqrt{3}\}/N}$[4]. Định nghĩa chính xác của tập hợp bên phải của hàm kiểm tra là rất khó cũng như chứng minh rằng hàm đặc trưng trên các số nguyên tố được điều chỉnh không liên quan đến các hàm số kiểm tra này. Với nhận thức này, Green và Tao đã thực hiện điều này trong [7, 8] cho $k = 4$. Thế nhưng, một cách tổng quát thì vấn đề này theo một nghĩa nào đó (vẫn là bài toán mở) vẫn khó hơn bài toán về số nguyên tố sinh đôi. Vì thế, Green và Tao đã sử dụng một cách tiếp cận khác đi một chút.

Theo (1), các số nguyên tố là quá mỏng để áp dụng định lý Szemeredi, ngay cả trong dạng định lượng Gowers. Ý tưởng của Green-Tao là nhúng các số nguyên tố vào một tập hợp thích hợp, đủ kiểm soát được và không quá lớn hơn P' với mục đích chứng minh một phiên bản của định lý Szemeredi: mọi tập con đủ lớn của P' đều chứa cấp số cộng độ dài tuỳ ý. Nói riêng, điều này sẽ suy ra một mệnh đề mạnh hơn là mọi tập con không quá mỏng các số nguyên tố chứa cấp số cộng độ dài tuỳ ý, ví dụ, tập hợp tất cả các số nguyên tố $\equiv 1 \mod 6$. "Đủ kiểm soát được" có nghĩa là P' theo một nghĩa nào đó giống tập ngẫu nhiên. Một cách nôm na, ta có thể tưởng tượng P' như tập hợp các số gần nguyên tố. Một cách chính xác hơn, tập hợp được xây dựng bằng cách áp dụng sàng Selberg và ta có thể (dù không đơn giản) kiểm tra các tính chất yêu cầu của P' bằng các kỹ thuật cổ điển.

Phiên bản này của định lý Szemeredi là điểm chính yếu của định lý Green-Tao. Để hiện thực hoá điều này cần đến một cơ chế phức tạp và một phần nào đó mới. Do những lý do kỹ thuật, sẽ tiện lợi nếu ta thay các tập hợp bằng các hàm đặc trưng của chúng và làm việc với các hàm không âm thay vì các tập hợp. Vì vậy ta có thể phát biểu lại định lý Szemeredi như sau. Nếu $f:\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là hàm số không âm, bị chặn thoả mãn điều kiện $\sum\limits_{n=1}^{N} f(n) \geqslant \delta N$ với $\delta > 0$ nào đó thì

$$\sum_{n\in Z/nZ}\ \sum_{d\in Z/nZ} f(n)f(n+d)...f(n+(k-1)d) \geqslant c(k,\delta)N^2 + o(N^2) \quad (5)$$

với hằng số dương $c(k,\delta)$ nào đó. Nói riêng, nếu f là hàm đặc trưng của một tập hợp thì vế trái sẽ đếm số các cấp số cộng. Phương pháp được phát triển trong các chứng minh định lý Szemeredi của Furstenberg và Gowers bây giờ đóng một vai trò quan trọng.

Bây giờ ta hãy xem xét tình huống sau. Cho $(X, F \subset P(X), \mu)$ là không gian xác suất, $T:\ X \to X$ là một ánh xạ đo được với $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ với mọi $A \in F$, và giả sử $k \geq 1$ là số nguyên. Nếu $E \in F$ có độ đo dương, thì Furstenberg [2] chứng tỏ rằng tồn tại n nguyên dương sao cho $\bigcap_{j=0}^{k-1} T^{-jn}E$ có độ đo dương. Hơn nữa, ông chứng minh tương ứng tổ hợp sau. Nếu mật độ trên $d^*(A)$ của A là dương thì tồn tại bộ năm (X, F, μ, T, E) như trên sao cho $\mu(E) = d^*(A)$ và

$$d^*(A \cap (A+m_1) \cap ... \cap (A+m_{k-1})) \geq \mu(E \cap T^{-m_1}E \cap ... \cap T^{-m_{k-1}}E)$$

với mọi $m_1, ..., m_{k-1}$. Thay $m_j = jn$ ta có định lý Szemeredi. Điểm mới quan trọng trong chứng minh này là đưa lý thuyết ergodic vào thảo luận, khởi đầu cho nhiều ý tưởng của

[4]Như thường lệ, ta ký hiệu $\{x\} = x \check{}\, [x]$ là phần lẻ của số thực x

Green và Tao.

Chứng minh của Gowers sử dụng giải tích điều hoà. Một cấu trúc quan trọng là U^d-chuẩn của hàm số $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, xác định bởi

$$||f||_{U^d} := \left(\frac{1}{N^{d+1}} \sum_{x \in Z/nZ} \sum_{h \in (Z/nZ)^d} \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} f(x + \omega.h) \right)^{1/2^d}$$

với tích trong thông thường $\omega.h$ trong $\mathbb{R}^d$. Các chuẩn này được sử dụng để đo khoảng cách từ hàm số f đến giá trị kỳ vọng của nó, tức là đến hàm hằng $N^{-1} \sum\limits_{n=1}^{N} f(n)$. Như trong (3) và (4), đối với các hàm đặc trưng của tập hợp giả ngẫu nhiên S là nhỏ trong tất cả các chuẩn U^d với $d \leq k - 1$[5] .

Chứng minh của định lý Green-Tao dựa trên phương pháp sau. Hàm đặc trưng trên các số nguyên tố điều chỉnh được chuẩn hoá bằng cách nhân với $\log N$, sao cho hàm số f mới có giá trị kỳ vọng 1. Sử dụng sàn Selberg nói ở trên, ta xây dựng thành phần chính (majorant) g có dáng điệu tốt như là nó tương ứng với tập hợp giả ngẫu nhiên (gần nguyên tố). Định lý Szemeredi không áp dụng được cho f, vì f không bị chặn, nhưng Green và Tao chứng tỏ rằng f có thể phân tích thành hai thành phần. Thành phần thứ nhất gần với giá trị kỳ vọng tương ứng với chuẩn Gowers U^{k-1} và vì thế điều khiển được. Thành phần thứ hai được đánh giá bởi các phần tương ứng của g. Sử dụng tính chất của các số gần nguyên tố, ta có thể chứng minh rằng phần này của g là bị chặn. Từ đó thành phần đang xét của f là bị chặn và phương án nguyên thuỷ (5) của định lý Szemeredi hoàn tất phép chứng minh.

Chứng minh đầy đủ của định lý bao gồm tổ hợp đầy ấn tượng của lý thuyết số, lý thuyết ergodic, giải tích điều hoà và tổ hợp và các kỹ thuật cũng áp dụng được trong các tình huống khác. Ví dụ Tao và Ziegler chứng minh trong [17] rằng các số nguyên tố tổng quát hơn chứa cấp số đa thức độ dài tuỳ ý: nếu $q_1, q_2, ..., q_k \in \mathbb{Z}[x]$ là các đa thức bất kỳ với $q_1(0) = ... = q_k(0) = 0$ thì tồn tại vô số $n, d \in \mathbb{N}$ sao cho $n + q_1(d), n + q_2(d), ..., n + q_k(d)$ đồng thời là các số nguyên tố. Kết quả tương tự cũng có thể, ví dụ cho các số nguyên tố Gauss [16]. Áp dụng các phương pháp của Green và Tao, trong [3] chứng minh được rằng mọi tập hợp $S \subset \mathbb{N}$ với mật độ trên dương chứa vô số các cấp số cộng độ dài 4, sao cho công sai có dạng $p + 1$ (p là số nguyên tố). Rất rõ ràng rằng các phương pháp phát triển bở Green và Tao đã mở ra rất nhiều cánh cửa mới cho số học tổ hợp.

Tài liệu tham khảo

[1] J.G. van der Corput, *Uber Summen von Primazahlen and Primzahlquadraten*, Math.Ann. 116 (1939), 1-50.

[2] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of dioganal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions*, J.Analyse Math. 31 (1977), 204-256.

[5] Nhắc lại là định nghĩa của tập hợp giả ngẫu nhiên phụ thuộc vào k

[3] N. Frantzikinakis, B.Host and B.Kra, *Multiple recurrence and convergence for the sequences related to the prime numbers*, J.Reine Angew.Math. 611 (2007), 131-144.

[4] W.T. Gowers, *A new proof of Szemeredi's theorem*, GAFA 11 (2001), 465-588.

[5] B.J. Green, *Long arithmetic progressions in primes, in: Analytic Number Theory: A tribute to Gauss and Dirichlet*, W.Duke and Y.Tshinkel (eds.), Amer.Math.Soc., Providence, RI, 2007.

[6] B.J. Green and T.C. Tao, *The primes contain arbitrary long arithmetic progressions*, Annals of Math., to appear.

[7] B.J. Green and T.C. Tao, *Quadratic uniformly of the Mobius function*, Annales de'l Institut Fourier, to appear.

[8] B.J. Green and T.C. Tao, *Linear equations in primes*, Annals of Math., to appear.

[9] E. Grosswald, *Arithmetic progressions of arbitrary length and consisting only of primes and almost primes*, J.Reine Angew.Math. 317 (1980), 200-208.

[10] D.R. Heath-Brown, *Three primes and almost prime in arithmetic progression*, J. Lond. Math. Soc. 23 (1981), 396-414.

[11] B. Kra, *The Green-Tao Theorem on arithmetic progressions – an ergodic point of view*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006), 3-23.

[12] K.F. Roth, *On certain sets of integers*, J. Lond. Math. Soc. 28 (1953), 245-252.

[13] E. Szemeredi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetics progression*, Acta Arith. 27 (1975), 199-245.

[14] T.C. Tao, *Long arithmetic progressions in the primes*

`http://www.math.ucla.edu/ tao/preprint/acnt.html`.

[15] T.C. Tao, *Arithmetic progressions and the primes*, Collect.Math. 2006, Vol. Extra, 37-88.

[16] T.C. Tao, *The Gaussian primes contain arbitrary shaped constellations*, J. Analyse Math. 99 (2006), 109-176.

[17] T.C. Tao and T. Ziegler, *The primes contain arbitrary long polynomial progressions*, Acta.Math., to appear.

[18] B.L. van der Waerden, *Ein Satz uber die Klasseneiteilung von endlichen Mengen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 185-187.

Bài báo này được đăng bằng tiếng Đức trong Mittelungen der DMV 15, no 3 (2007), 160-164 và được đăng lại bằng tiếng Anh trên tạp chí EMS Newsletter, số tháng 3 năm 2008, trang 13-16.

Valentin Blomer [vblomer@math.toronto.edu] nhận bằng PhD của trường ĐH Stuttgart (GS hướng dẫn Jorg Brudern) năm 2002 và hiện nay là assistant proffessor tại ĐH Toronto. Với những công trình trong lĩnh vực lý thuyết số giải tích anh đã được giải thưởng Heinz Maier-Leibnitz của Hội đồng nghiên cứu Đức và học bổng của Quỹ Alfred P. Sloan.

Trần Nam Dũng dịch và giới thiệu

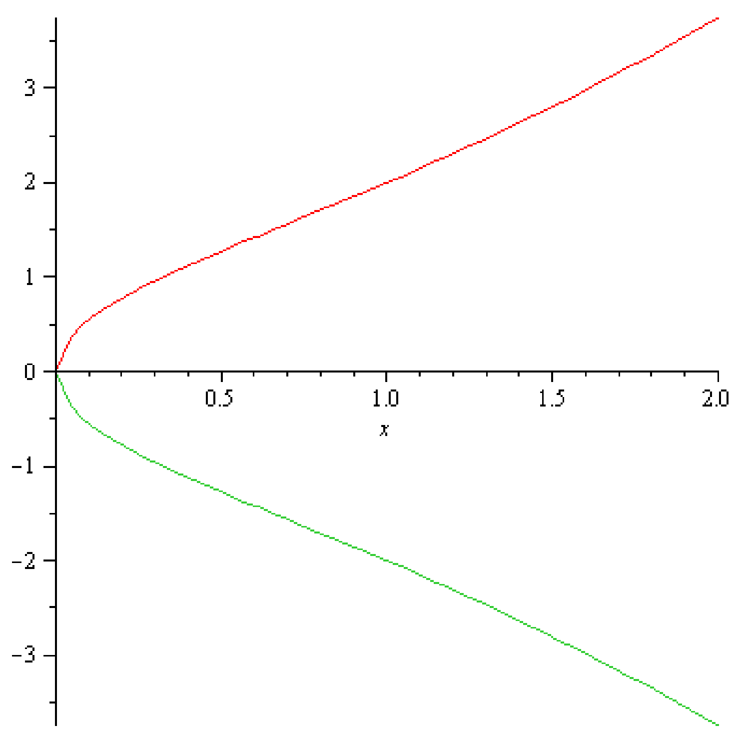
Giả thuyết Sato-Tate

Ngô Bảo Châu - Viện Nghiên cứu nâng cao IAS, Princeton, Mỹ

$\bigtriangledown$

Một loạt bài toán trong số học tưởng như ngoài tầm với mới mười năm về trước, nay rụng như sung. Gần đây là một giả thuyết của Sato-Tate về phân bố góc của toán tử Frobenius trên đối đồng điều bậc một của đường cong elliptic. Về hai cha đẻ của giả thuyết: sự hiện diện của ông John Tate không có gì đáng ngạc nhiên vì ông là một trong những nhà số học lỗi lạc nhất trong thế kỷ hai mươi; sự hiện diện của ông Mikio Sato đáng kinh ngạc hơn nhiều. Ông được biết đến như cha đẻ của ngành giải tích đại số, nói cách khác là lý thuyết D-modules và sáng lập ra trường phái Nhật Bản với những tên tuổi như Kashiwara nhưng lại có những đóng góp rất đặc sắc cho số học.

Đường cong elliptic E là một đường cong phẳng bậc ba tức là có thể xác định được bởi một phương trình bậc ba hai biến ví dụ như $y^2 = x^3 + ax + b$ với a, b là các tham số. Ta cần loại một số trường hợp suy biến ví dụ như trường hợp $a = b = 0$. Các trường hợp khác, nếu vẽ trên mặt phẳng thực, bạn sẽ có một đường cong bậc ba quen thuộc.



Giả sử a, b là các số hữu tỉ. Với hầu hết các số nguyên tố p, ta có thể đặt ra câu hỏi phương trình $y^2 = x^3 + ax + b$ có bao nhiêu nghiệm modulo p. Nói chung số các nghiệm của một phương trình hai biến (đường cong) là không khác nhiều lắm so với đường thẳng nên ta viết số nghiệm trên ở dạng $p - a_p(E)$ với $a_p(E)$ là một số nguyên theo một nghĩa nào đó là sai số. Sai số này có ý nghĩa số học sâu sắc.

Theo định lý cổ điển của Hasse, số $a_p(E)$ là vết của một số phức $\alpha_p(E)$ $a_p(E) = \alpha_p(E) + \bar{\alpha}_p(E)$ với chuẩn của $\alpha_p(E)$ bằng p, kéo theo đánh giá $|a_p(E)| \leq 2\sqrt{p}$. So với p, $a_p(E)$ đúng là một sai số.

Theo cách nhìn hiện đại hơn một chút, số $a_p(E)$ là vết của toán tử Frobenius tác động lên đối đồng điều bậc một của đường cong elliptic và đánh giá về chuẩn của $\alpha_p(E)$ đúng cho mọi đa tạp đại số theo giả thuyết Weil do Deligne chứng minh.

Giả thuyết Sato-Tate quan tâm đến phân bố của số $a_p(E)/2\sqrt{p}$ trên đoạn thẳng $[-1, 1]$ khi số nguyên tố p thay đổi. Nó khẳng định là số này được phân bố theo một độ đo cho trước là $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}dt$. Độ đo này gọi là độ đo Sato-Tate.

Tôi phát biểu giả thuyết Sato-Tate thiếu một giả thiết quan trọng là đường cong elliptic không có nhân phức (complex multiplication) tức là vành các tự đồng cấu là một $\mathbb{Z}-$module cấp hai. Trong trường hợp này, người ta đã biết từ lâu cách phân bố của $a_p(E)$ có công thức khá với công thức trên.

Ta có thể tổng quát hóa giả thuyết Sato-Tate cho mọi biểu diễn của nhóm Galois trên đối dồng điều của đa tạp đại số. Hai trường hợp có nhân phức hay không mở rộng thành chuyện nhóm Galois motivic là nhóm gì. Trong mỗi trường hợp, độ đo Sato-Tate chỉ phụ thuộc vào nhóm Galois motivic. Chắc cũng còn lâu người ta mới tiếp cận được giả thuyết Sato-Tate tổng quát vì ngay để định nghĩa nhóm Galois motivic ta cần một loạt giả thuyết khác tương tự như giả thuyết Hodge. Khi đã có tất cả các giả thuyết nêu trên, ta có thể giải thích giả thuyết Sato-Tate bằng nguyên tắc hàm tử của Langlands. Tất nhiên chỉ là giải thích thôi, vì nguyên tắc hàm tử cũng còn rất xa so với biên giới của tri thức toán học hiện tại.

Tuy vậy, một đội hình túc cầu lão luyện, dưới sự chỉ đạo sáng suốt của đội trưởng R. Taylor (Harvard) vừa ghi một bàn thắng tuyệt đẹp là chứng minh giả thuyết Sato-Tate cổ điển. Đội hình này còn bao gồm các nhà toán học khác như Clozel (Orsay), Harris (Paris), Shepherd-Barron (Cambridge). Một trong những ý tưởng quan trọng là ta chỉ cần chứng minh một dạng tiềm năng của nguyên tắc hàm tử, và dạng tiềm năng này có thể tiếp cận bằng các phương pháp biến dạng p-adic. Phương pháp này đã tỏ ra vô cùng lợi hại trong lời giải bài toán Fermat của Wiles.

Lý thuyết số hiện đại thực sự bùng nổ trong mười năm trở lại đây. Khác với giai đoạn trước, khi hàng loạt khái niệm mới được đưa ra, hàng loạt giả thuyết chồng chéo lên nhau, thời gian này làn sóng khái niệm có vẻ đã tạm rút. Các khái niệm có vẻ đã có thời gian ngấm, không chỉ vào đầu các nhà toán học lão luyện, mà cả vào đầu các nhà toán học trẻ và cả sinh viên. Có lẽ đấy là lý do xã hội học, tại sao hàng loạt bài toán cổ điển đã tìm ra câu trả lời gần đây. Và làn sóng này còn chưa kết thúc. Liệu ta có thể hy vọng làn sóng này đập vào ba ngàn cây số đường biển của đất nước hình chữ S hay không?

A.M.Gleason

Đinh Trung Hòa - ĐHTH Kazan, LB Nga

▽

I - Tiểu sử A.M.Gleason

Andrew Mattei Gleason sinh ngày 4/12/1921 tại Fresno California, USA. Từ nhỏ ông học tại trường trung học Berkeley, sau đó học tại trường Roosevelt ở Yankers, New York. Năm 1938 ông đậu vào Khoa Toán trường ĐH Yale nổi tiếng. Trong quá trình học tại đây ông có tham gia cuộc thi toán học Putham và trở thành một trong 5 người xuất sắc nhất. Từ năm 2 ngoài việc học chính khóa Gleason còn đi học những khóa học giành cho nghiên cứu sinh. Lên năm 3 ông tiếp tục tham gia các khóa học nâng cao và môn vật lý lý thuyết, và đạt điểm xuất sắc ở tất cả các môn này. Trong năm đó Gleason đã có thể tốt nghiệp, nhưng ông quyết định tiếp tục học để hoàn tất chương trình toán của NCS và hoàn thiện kiến thức tiếng Pháp.

Năm 1942 Gleason tốt nghiệp ĐH Yale và tham gia vào Hải quân Mỹ. Ông phụ trách việc giải mã các bức điện mật của quân đội Nhật Bản. Năm 1946 Andrew Gleason ra nhập Society of Fellows như một cộng tác viên khoa học tại Harvard. Trong 4 năm ở đó ông tham gia nhiều khóa học toán và bắt đầu thấy hứng thú với Vấn đề thứ 5 của Hilbert. Từ 1950 – 1953 ông tham gia chiến tranh tại Hàn Quốc. Năm 1957 ông trở thành giáo sư của

Harward. Năm 1969 ông trở thành giáo sư danh dự của ngành toán và triết học tự nhiên. Đây là danh hiệu danh giá và lâu đời nhất ở Mỹ. Năm 1992 Gleason đọc bài giảng cuối cùng của mình, và cũng như những lần trước đã để lại những ấn tượng sâu sắc cho người nghe.

Gleason rất quan tâm đến giáo dục toán học của Mỹ và ảnh hưởng của ông đến sự phát triển của nó gần hơn 40 năm. Ông từng là Chủ tịch Hội đồng cố vấn về học toán phổ thông, ông tổ chức các Hội thảo cho học sinh tại Cambridge, và là cố vấn của Hội đồng khoa học thống nhất và chương trình toán học phổ thông. Nhờ vậy ông có thể đóng góp ý kiến của mình về những vấn đề tồn tại và những dự án giáo dục. Ông trực tiếp tham giảng dạy các lớp toán sơ cấp, nghiên cứu về phương pháp giảng dạy toán ở phổ thông. Ông là người đưa ra ý tưởng thành lập Hội đồng giáo dục toán học và là thành viên của Hội đồng này trong 4 năm. Những năm sau này ông tổ chức chương trình Harvard Project Calculus và nó vẫn tiếp tục cho đến nay.

Trong ký ức của học trò, Gleason là một người có một không hai. Ông viết sách, giảng bài, nghiên cứu những vấn đề giáo dục mọi cấp, nghiên cứu khoa học và luôn sẵn sàng tiếp xúc với những người yêu toán học về mọi lĩnh vực họ muốn. Ngoài ra ông là một nhà giáo dục kiệt xuất. Theo thống kê của website ĐH Harverd A.M.Gleason đã hướng dẫn 135 NCS, rất nhiều trong số họ trở thành những nhà toán học nổi tiếng như: Daniel Cohen, Richard Palais, Richard Rochberg v.v. Gleason rất quan tâm tới việc đào tạo lớp toán học trẻ, và ông từng là thành viên của Hội các nhà nghiên cứu trẻ được thành lập năm 1933 bởi A.L.Lowell. Những thành viên của Hội này hàng tuần gặp nhau 1 hoặc 2 lần để thảo luận về nhiều vấn đề khoa học khác nhau. Họ còn được gặp gỡ với những nhà khoa học nổi tiếng và được tham gia nghiên cứu những vấn đề khó nhất. Rất nhiều trong số họ đã trở thành những nhà khoa học nổi tiếng và nhận các giải Nobel. Gleason là Chủ tịch của Hội này trong 7 năm liền.

Năm 1980 A.M. Gleason cùng với R.E.Greenwood và L.M.Kelly xuất bản cuốn sách William Lowell Putnam Mathematical Competition tập hợp những vấn đề và lời giải của các cuộc thi từ 1938 đến 1964. Nhờ những cống hiến của mình trong giảng dạy và nghiên cứu toán học, Gleason được cộng đồng toán học kính trọng. Ngoài giải thưởng Newcomb Cleveland, năm 1996 ông còn được phong tặng giải thưởng mang tên Yueh-Gin Gung và Dr Charles Y Hu vì những cống hiến kiệt xuất trong toán học. Đây là giải thưởng danh giá nhất của Hội toán học Mỹ. Năm 1962 ông được mời đến giảng tại Trường hè của Hội toán học Mỹ tại Vancuver với vai trò là giảng viên Earle Raymond Hedrick.

Năm 1981 Gleason được bầu là Chủ tịch Hội toán học Mỹ.

II - A.M.Gleason và Vấn đề thứ 5 của Hilbert

Năm 1900 tại Hội nghị Toán học quốc tế ở Paris Hilbert đã đưa ra một danh sách các vấn đề mở mà theo ông việc giải quyết chúng sẽ ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của Toán học trong tương lai. Vấn đề thứ năm trong danh sách đó như sau: một nhóm compact địa phương liên thông G là giới hạn xạ ảnh của một dãy các nhóm Lie; nếu G không chứa nhóm con nhỏ thì G là một nhóm Lie. Rất nhiều nhà toán học nghiên cứu vấn đề này, nhưng chỉ đến năm 1925 mới xuất hiện những kết quả đầu tiên. Năm 1928 Peter và Weil chứng minh rằng mọi biểu diễn của nhóm compact hầu như suy biến. Nhờ vào kết quả này vào năm

1933 von Neumann đã giải quyết vấn đề này cho trường hợp nhóm compact. Sau đó một năm L.S.Pontryagin giải quyết cho trường hợp nhóm Abel dựa trên lý thuyết đặc trưng trên nhóm abel compact địa phương do ông đưa ra trước đó. Sau đó K.Tewalli đưa ra giả thuyết mọi nhóm compact địa phương không có nhóm con nhỏ hơn là một nhóm Lie. Giả thuyết này đóng vai trò quan trọng trong quá trình giải quyết Vấn đề thứ 5 của Hilbert. Năm 1948 Kuranishi nhận được kết quả quan trọng, ông chứng minh một nhóm thương theo nhóm Lie abel trực chuẩn là một nhóm Lie, và vì vậy nhóm ban đầu với một số điều kiện cụ thể sẽ là một nhóm Lie. Sau đó Iwasawa chứng minh rằng nếu nhóm thương là một nhóm Lie thì nhóm đang xem xét cũng sẽ là một nhóm Lie. Năm 1950 trên Hội nghị Toán học quốc tế tại Cambridge Gleason có một bài phát biểu về các nhóm con một tham số và khả năng sử dụng khái niệm này trong việc tìm kiếm lời giải của Vấn đề thứ 5 của Hilbert. Dựa vào định lý của Kuranishi Gleason đã đưa ra một chứng minh đơn giản hơn kết quả của Iwasawa. Trong bài báo đó Gleason còn đưa ra một khái niệm sau này được gọi là nửa nhóm Gleason, và với khái niệm này ông đã thu được những kết quả quan trọng khác. Sau đó Gleason và Iwasawa đã xây dựng lý thuyết nhóm Lie mở rộng và trên nền tảng này họ phát biểu vấn đề mở rộng của giả thuyết thứ 5 của Hilbert: mọi nhóm compact địa phương là nhóm Lie mở rộng.

So sánh các tư tưởng khác nhau của lý thuyết nhóm Montgomery và Zippin đã nghiên cứu lý thuyết đối đồng điều trong lý thuyết nhóm hữu hạn chiều và thu được những kết quả quan trọng. Sau đó Gleason chứng minh rằng mọi nhóm compact địa phương hữu hạn chiều là một nhóm Lie mở rộng. Kết quả này đã đưa ra lời giải đáp cho Vấn đề thứ 5 của Hilbert. Trong một bài báo của mình Yamabe chỉ ra rằng điều kiện "không có nhóm con trực chuẩn nhỏ" tương đương với điều kiện "không có nhóm con nhỏ". Và ông cũng chứng minh rằng nếu không có điều kiện hữu hạn chiều thì mọi nhóm địa phương không có nhóm con nhỏ là một nhóm Lie. Kết hợp những kết quả này với lý thuyết nhóm Lie mở rộng của Iwasawa và Gleason có thể chứng minh được rằng mọi nhóm compact địa phương là một nhóm Lie mở rộng. Điều này cho kết quả dương cho giả thuyết của Iwasawa và Gleason, và những vấn đề cốt lõi liên quan tới nhóm compact địa phương được giải quyết hoàn toàn. Nhờ những cống hiến to lớn trong việc giải quyết vấn đề thứ 5 của Hilbert Gleason được tặng giải thưởng Newcomb Cleveland của Hội Toán học Mỹ.

3. Định lý Gleason và Vấn đề tuyến tính Mackey-Gleason

Trong lý thuyết xác suất thông thường các sự kiện có liên quan tới những thí nghiệm thống kê tạo nên một đại số Bool, và xác suất là một hàm số cộng tính dương xác định trên các biến cố của đại số này. Để dễ dàng hơn thường người ta coi đại số đó là sigma-đại số, còn xác suất thì cộng tính đo được. Nói cách khác mọi sigma-đại số là một sigma-đại số các tập hợp con của một tập hợp nào đó, còn lý thuyết xác suất nghiên cứu độ đo trên các không gian đo được. Trong một số điều kiện chung thì các độ đo xác suất sẽ tạo thành một tập hợp lồi, còn những điểm cực trị của tập hợp này là những độ đo suy biến, tức là những độ đo xác định tại một điểm.

Một giá trị ngẫu nhiên là một hàm số thực đo được theo Borel. Nếu độ đo xác suất trên không gian đo được suy biến thì sự phân phối của giá trị ngẫu nhiên đó cũng suy biến. Chính điểm này tạo nên sự khác biệt với cơ học lượng tử. Năm 1936 G.Birkhoff và John von Neumann có đăng một bài viết *"Logics của cơ học lượng tử"*, trong đó họ chỉ ra hướng tiếp cận toán tử trong nghiên cứu cơ học lượng tử, mục đích là áp dụng phương pháp tiên đề hóa trong nghiên cứu cơ học lượng tử. Họ đưa ra khái niệm logics, đó là một tập hợp G sắp thứ tự từng phần (poset) với 2 phần tử lớn nhất và nhỏ nhất là $0, 1$. Trên G xác định ánh xạ bù trực giao $\langle ' \rangle : G \to G$ với các tính chất sau:

1. $a'' = a$; $a < b \Rightarrow b' < a'$; $a \vee a' = 1$ với mọi $a \in G$ (ký hiệu phép toán hai ngôi $\vee$ là lấp supremum)

2. Mọi dãy đếm được các phần tử của G thì infimum và supremum của chúng tồn tại

3. Nếu $a_1 < a_2$, $a_i \in G$, thì tồn tại $b \in G$ thỏa mãn $b < a_i'$, $b \vee a_1 = a_2$

Một số ví dụ logic:

1. Các σ-đại số các tập hợp con của một tập hợp với các phép thông thường là chứa, hợp, giao và bù.

2. tập hợp các không gian con bất biến đối với một tập hợp các toán tử unitar.

Một trong những bài toán quan trọng nhất đó là phân loại các logics, các đồng cấu của chúng và mô tả tất cả các trạng thái trên logics. Một ví dụ quan trọng được nghiên cứu rất nhiều trong những năm 80 của thế kỷ trước đó là trường hợp logic $G(H)$ các không gian con đóng của không gian Hilbert H. Gần như tất cả những kết quả quan trọng của cơ học lượng tử đều dựa trên giả định rằng mọi hệ cơ lượng tử đều tương ứng với một không gian Hilbert H, và logic $G(H)$ là tập hợp các sự kiện của hệ đó.

Định nghĩa 1. *Một đồng cấu χ từ σ-đại số Borel $\mathcal{B}$ trên $\mathbb{R}$ vào tập hợp G được gọi là vật quan sát được. Nếu đồng nhất $\chi(E)$ với toán tử trực chuẩn trên E thì ánh xạ $E \to \mathcal{B}$ là độ đo phổ trên $\mathcal{B}$.*

Từ lý thuyết phổ suy ra rằng tồn tại một song ánh giữa tập hợp các độ đo phổ như trên và tập hợp các toán tử tự phó.

Như vậy mỗi vật quan sát được χ sẽ tương ứng với một toán tử tự phó A (A không nhất thiết phải bị chặn) và ngược lại.

Định nghĩa 2. *Ánh xạ $\mu : G(H) \to \mathbb{R}^+$ với những tính chất sau:*

1) $0 \leq \mu(S) \leq 1$, $\mu(H) = 1$;

2) $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(S_i)$ *($S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$) (S_i là không gian con đóng của H) được gọi là trạng thái.*

Định lý sau của Gleason là một trong những kết quả quan trọng nhất của lý thuyết logics lượng tử, và trong trường hợp đặc biệt của nó là cơ học lượng tử.

Định lý Gleason. *Cho H là không gian Hilbert tách được có số chiều lớn hơn 2, $G(H)$ – logic tất cả các không gian con đóng của H. Khi đó với mọi trạng thái μ trên $G(H)$ tồn tại một toán tử tự vị không âm T_μ với vết 1 thỏa mãn $\mu(S) = Tr(T_\mu S)$ với mọi $S \in G(H)$. Ngược lại mọi toán tử tự vị không âm T vết 1 sẽ cho một trạng thái μ_T bởi đẳng thức*

$\mu_T(S) = Tr(TS)$.

Định lý này lúc đầu được Gleason chứng minh cho không gian Hilbert tách được. Sau 10 năm M.Eilers và E.Horst chứng minh nó cho trường hợp không gian Hilbert không tách được với điều kiện sử dụng giả thuyết continuum. Chứng minh Gleason đưa ra tương đối phức tạp. Do đây là kết quả quan trọng nên nhiều nhà toán học cố tìm kiếm một chứng minh đơn giản hơn cho nó. Một thời gian dài người ta tin rằng không tồn tại một chứng minh mang tính xây dựng. Chỉ sau 30 năm R.Cooke, M.Keane và W.Mogan đã tìm được một chứng minh đơn giản hơn khi ông sử dụng bổ đề hình học Piron (bổ đề này cũng có một ý nghĩa vật lý quan trọng). Sử dụng bổ đề hình học Piron Kochen, Specker và Bell không dùng định lý Gleason đã chứng minh định lý sau:

Định lý. *Không tồn tại độ đo nhận 2 giá trị trên không gian Hilbert 3 chiều.*

Từ phương diện vật lý việc không tồn tại độ đo nhận 2 giá trị chỉ ra rằng không thể có những phần tử của thực tại vật lý tồn tại độc lập với phạm vi đo lường riêng biệt. Tiếp tục suy diễn, giả sử rằng tồn tại một "vùng ẩn" nằm bên cạnh khung cảnh lượng tử. Ta có thể cho rằng "vùng ẩn" này tồn tại một cách tự nhiên trong trường hợp tính chất logic có thể nhận thức được là cả đúng và sai, tạm gọi hình thức là 1 và 0. Khi đó sự hình thức hóa chuẩn xác của "vùng cổ điển" là một đại số Bool mà trên đó có một tập hợp đủ các độ đo nhận 2 giá trị. Mối liên hệ giữa khung cảnh lượng tử và "vùng ẩn" có thể được đồng nhất với một đơn cấu dàn từng phần (việc giữ lại các phép tính bộ lọc chỉ diễn ra giữa các vật quan sát được có thể so sánh được với nhau). Một cách khác, không thể nói rằng một tính chất logic có thể đúng hoặc sai mà không phụ thuộc vào bối cảnh đo, nghĩa là, không phụ thuộc vào những tính chất tồn tại song song với nó. Như vậy điều kiện cần thiết cho "vùng ẩn" cổ điển là khả năng có thể xác định một độ đo chỉ nhận 2 giá trị trên nó, tương ứng với việc xác định một độ đo nhận 2 giá trị trên logic lượng tử tích hợp với nó thông qua một phép đồng cấu. Việc chứng minh sự không tồn tại của độ đo nhận 2 giá trị trên các logic lượng tử đã làm sụp đổ ý tưởng tồn tại thông số ẩn trong cơ học lượng tử.

J.Bell – nhà toán học nổi tiếng với bất đẳng thức Bell cũng hứng thú với định lý Gleason trong không gian 3 chiều. Trong một bài báo viết về vấn đề các thông số ẩn trong cơ học lượng tử Bell kể rằng từ khi ông làm quen với định lý Gleason thì hoặc là ông phải tìm ra một chứng minh đơn giản hơn cho nó, hoặc là ông bỏ luôn toán học. Rất may là ông đã tìm ra chứng minh mới cho định lý về không tồn tại độ đo nhận 2 giá trị trong không gian Hilbert 3 chiều. Bây giờ ta gọi $P(A)$ là tập hợp các phép chiếu trực giao ($p = p^* = p^2$) của đại số von Neumann. Ánh xạ $\mu : P(A) \to \mathbb{C}$ (trường số phức) bị giới hạn và cộng tính, tức là $\mu(p+q) = \mu(p) + \mu(q)$ nếu $pq = 0$. Khi đó ta gọi μ là độ đo lượng tử. Khi A giao hoán μ có thể thác triển một cách duy nhất thành một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên A. Đây đơn giản là trường hợp lý thuyết tích phân đối với độ đo cộng tính hữu hạn. Câu hỏi được đặt ra là: nếu A không giao hoán thì μ có thể thác triển tuyến tính lên một phiếm hàm bị chặn hay không? Gleason cho đáp án đối với trường hợp $B(H)$ – đại số tất cả các toán tử bị chặn trên không gian Hilbert H và μ dương, cộng tính hoàn toàn trên tập hợp các phép chiếu trực giao. Khi H có số chiều lớn hơn 2 thì μ có thác triển tuyến tính, nhưng nếu số chiều của H là 2 thì tồn tại những độ đo lượng tử không có thác triển tuyến tính. Vấn đề Mackey-Gleason: Cho A là một đại số von Neumann không chứa hạng trực tiếp dạng I_2. Cho μ là hàm số bị chặn trên tập hợp $P(A)$ với tính chất sau: $\mu(p+q) = \mu(p) + \mu(q)$, nếu

$pq = 0$. Hỏi rằng μ có thể thác triển lên phiếm hàm tuyến tính hữu hạn trên cả A?

Đáp án đến bây giờ thì người ta đã biết là có thể, những cũng phải tốn mất mấy mươi năm và công sức của hàng loạt những nhà toán học giỏi trên thế giới. Trong đó những tên tuổi như Christensen, Yeadon, Maeda, A.Dvurecenskij... và các nhà toán học ở Kazan như A.N.Sherstnev, M.S.Matveychuk... đóng góp không nhỏ vào việc giải quyết vấn đề trên từ nhiều phương diện khác nhau. Việc nghiên cứu định lý Gleason và vấn đề Mackey-Gleason được M.S.Matveychuk giải quyết cho trường hợp đại số von Neumann trên không gian Hilbert và không gian với metric bất định. M.S.Matvejchuk và D.H.Mushtari (TH Kazan) chứng minh định lý Gleason và giải quyết vấn đề Mackey-Gleason cho trường hợp tập hợp các lũy đẳng ($p = p^2$), A.N.Sherstnev chứng minh định lý Gleason cho trường hợp độ đo không bị chặn và ông thành công trong việc ứng dụng định lý này vào việc xây dựng lý thuyết tích phân không giao hoán theo độ đo không hữu hạn. Cho độ đo nhận các giá trị vecto vấn đề này cũng được giải quyết bởi L. J. Bunce and J. D. Maitland Wright...

Gần đây trên một số tạp chí uy tín có đăng nhiều công tình về k-phép chiếu mở rộng (tức là $p^k = p^*$). Có thể sau một thời gian sau ở đâu đó xuất hiện một định lý Gleason hoặc những vấn đề liên quan cho tập hợp này.

Bài báo năm 1957 của Gleason về định lý mang tên ông đã khơi nguồn cho một hướng nghiên cứu nữa có liên quan tới logic tập hợp, đó là lý thuyết tích phân trên σ-class (lý thuyết cổ điển xét các σ-đại số). Trên σ-lớp độ đo của hợp 2 tập hợp của logic này có thể lớn hơn tổng độ đo của từng tập hợp. Điều đó đã làm rất nhiều tính chất của tích phân cổ điển không còn đúng nữa như: Bổ đề Fatou, tích phân của tổng không bằng tổng 2 tích phân và chỉ bằng khi 2 hàm số là đơn giản (và chứng minh nó không đơn giản tí nào!), nếu có 3 hàm số thì tính chất cộng tính của tích phân bị sai...

Có một lần tôi tìm được trong một cuốn sách toán olimpic cho học sinh phổ thông của Nga bài toán sau: trên hình cầu cho một hàm số có tổng giá trị trên 3 bán kính vuông góc nhau bằng 1. Chứng minh rằng hàm số đó là bình phương của phép chiếu lên một trục tọa độ nào đó. Bài toán này là bổ đề cơ bản trong chứng minh mới của định lý Gleason. Và cũng có thể coi nó là một cách phát biểu khác của định lý Gleason trên hình cầu đơn vị (ở đây tôi đã bỏ qua khái niệm Frame function vì giới hạn của bài viết).

Để kết thúc bài này tôi xin đưa ra một thông tin thú vị, bài báo chứa định lý Gleason là một trong những bài báo được trích dẫn nhiều nhất theo thống kê của trang www.scholar.google.com với hơn 686 trích dẫn.

Tài liệu tham khảo

1. Yueh-Gin Gung and Dr. Charles Y. Hu Award for Distinguished Service to Andrew Gleason Author(s): H.O.Pollak Source: The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 2, (Feb., 1996), pp. 105-106.

2. L.J.Bunce and J.D.Maitland Wright. The Mackey-Gleason. Bull. Of The Amer. Math. Soc. Volume 26, Number 2, April 1992, Pages 288-293.

3. Garrett Birkhoff, John Von Neumann, the logics of quantum mechanics. Ann. Math. Vol 37, Issue 4, 823-843.

4. Gleason A.M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Math. And Mech., 6 (1957), p. 885-893.

5. Manin Yu.I. Chứng minh được và không chứng minh được. Nhà xuất bản Radio hiện đại, 1979, 169 trang (tiếng Nga).

6. Georges Chevalier, Anatolij Dvurecenskij, and Karl Svozil. Piron's and Bell's Geometric Lemmas and Gleason's Theorem.

7. R.Cooke, M.Keane, and W.Moran, An elementary proof of Gleason's theorem, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 98, 117-128 (1985).

8. A.Dvurecenskij, Gleason's Theorem and Its Applications. Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

9. Các trang web trên mạng internet.

Experimental Designs: A Guided Tour

Nguyen V.M. Man - Ph.D. in Mathathematical Statistics
HCMUT - VNUHCM, Vietnam. Email: mnguyen@cse.hcmut.edu.vn

John J. Borkowski - Prof. in Mathematical Statistics
Montana State University, USA. Email: jobo@math.montana.edu

Abstract. This paper introduces fundamental concepts and methods of Experimental Designs (or Design of Experiments). The writing is aimed for computing, statistics, bio-science, engineering students, and as a part of the scientific research methodology as well.

I - Introduction - Major guidelines for designing experiments

1.1. Brief History of Experimental Designs (or DOE: Design of Experiments)

The DOE's history goes back to the 1930s of the 20-*th* century, when Sir R. A. Fisher in England used Latin squares to randomize the plant varieties before planning at his farm, among other activities. The goal was to get high productivity havests. The mathematical theory of combinatorial designs was developed by R.C. Bose in the 1950s in India and then in the US. Nowadays, DOE is extensively studied and employed in virtually any engineering and scientific investigation, and the Mathematics for DOE is extremely rich. Some mostly studied directions together with appropriate mathematical tools include:

The study of factorial designs mathematically described as matrices which consist many factors, each has several settings (levels), and these settings are arranged in a regular way. The main tools are combinatorics, algebra, geometry.

The study of optimal designs the main tools are matrix and probability theory.

The response surface methodology the main tools are combinatorial designs and approximation theory...

The common point of these directions are the research targets: look at a specific problem in science or industry, find a suitable design, mathematically investigate it, and then use it. Briefly, we have the following phases:

planning phase determine problem and select responses of process/product

designing & constructing phase learn how to find (construct) those experiments, given the scope of expected commodities and the parameters of components, that have been determined in planning phase

exploring & selecting phase investigate design characteristics (proposed by researchers) to choose good designs. For instance, in factorial designs we learn how to detect *interactions between factors* (components), and if they exist, calculate how strongly they could affect on outcomes

conducting phase where the planned experiment is carried out; and, finally

analyzing & consulting phase study how to use them (ie., conduct experiments in a particular application, measure outcomes, analyze data obtained, and consult clients what they should do).

1.2. Statistically designed experiments in R & D and in manufacturing

A few well-known rules in any economy say that industries and services nowadays need help from academia, asking for high quality R & D. The problem practically comes down to a matter of cost: conducting R & D activities costs money, but this spending is worthy to do in the pre-production period. As a result, a few key *practical demands*, be proposed by Malcolm Balrige, a former US Secretary of Commerce, in the article 'Designing for productivity' (Design News, 1982) are that:

- for managers, the challenge is to create an organizational environment that fosters *creativity, productivity* and *quality consciousness*; that
- 40 % of all costs in getting a product to the market place are in the design cycle;
- and that top management must emphasize prevention, rather than correction. **Prevention** means **conducting designed experiments** in the so-called *design cycle* or *off-line manufacturing*

But what is a design cycle? A design cycle, also called 'off-line manufacturing phase', informally is a period in which you (a manager or engineer) use all kind of information of an expected commodity to choose the best raw ingredients and components, to tune their combination so that when the commodity is produced and sold to the market place, it meets society demands, or more precisely, satisfies expectation of clients.

A golden rule in the field of quality management and improvement is: the earlier you make the change, the greater the effect down the road (ie., the commodity get in the market place). And a natural and powerful remedy for the problem is experimentation, specifically, **statistically designed experiments**, which are understood as a sequence of trials or tests performed under controlled conditions which produces measurable outcomes. Designing experiments specifically help us achieves the followings key aims:

(a) **Find & Perform experiments** to evaluate the effects the factors have on the characteristics of interest, and also discover possible relationship among the factors (which could affect the characteristics). The goal is to use these new understanding to improve product.

(b) **Answers to questions** such as:

  - What are the key factors in a process?
  - At what settings would the process deliver acceptable performance?
  - What are the key, main and *interaction effects* in the process?
  - What settings would bring about less *variation* in the output?

1.3. Three basic principles of DOE

Randomization refers to the order in which the trials of an experiment are performed. A randomized sequence helps eliminate effects of unknown or uncontrolled variables. Why do we randomize? It is particularly to avoid

- *systematic bias* for example, doing all the tests on treatment A in January then all the tests on treatment B in March;
- *selection bias* for example, choosing the most healthy patients for the treatment that you are trying to prove is best;
- *accidental bias* for example, using the rst rats that the animal handler takes out of the cage for one treatment and the last rats for the other;
- *cheating* by the experimenter.

Cheating is not always badly intentioned, however. For example, an experimenter may decide to give the extra milk rations to those schoolchildren who are most undernourished or she may choose to put a patient in a trial if she thinks that the patient will particularly benefit from the new treatment.

Blocking when randomizing a factor is impossible or too costly, or the plots (experimental units) are not all reasonably similar, we should group them into blocks in such a way that plots within each block are alike. Blocking lets you restrict randomization by carrying out all of the trials with one setting of the factor and then all the trials with the other setting. Formally, blocking is a method of eliminating the effects of extraneous variation due to noise factors and thereby improves the efficiency of experimental design.

Replication repetition of a complete experimental treatment, including the setup. Replication has two important properties. The first property is that it allows the experimenter to obtain an estimate of the experimental error. The second property is that it permits the experimenter to obtain a more precise estimate of the factor/interaction effect..

1.4. Important steps in designing experiments

From the five key phases mentioned in Section 1.2, critical steps are detailed as follows.

1. **State objective**: write a mission statement for the experiment or project
2. **Choose response**: it is about consultation, have to ask clients what they want know, or ask yourself; pay attention to the *nominal-the-best* responses
3. **Perform pre-experiment data analysis** to select of process variables or design parameters. Very important step in the experimental design procedure
4. **Choose factors & levels**: you have to use flowchart to represent the process or system, use cause-effect diagram to list the potential factors that may impact the response. You could also classify factors into controllable and uncontrollable factors. A level is the value that a factor/process variable or design parameter hold in an experiment..

5. **Select experimental design** for the experiment. Few feasible ways include: using classical approach advocated by Sir R. A. Fisher, orthogonal array approach advocated by Dr. Genichi Taguchi ...
6. **Perform the experiment** where the planned experiment is carried out
7. **Analyze the data** so that valid and sound conclusions can be derived
8. **Draw conclusions** and make recommendations.

1.5. DOE and beyond

We understand DOE belongs to a broader catergory called *Total Quality Management*; in which we concern three things: quality planning, quality control an quality improvement. What actions should we conduct to improve products and processes in TQM context? We could study some related topics (1):

- quality planning: organizing for improvement, inustrial R & D strategies, and planning for quality
- quality control: DOE, project execution, measurement assurance, and verification
- quality improvement: the improvement process, measures of effectiveness.

II - Discrete Mathematics and Experimental designs

The area of Statistical Design has been mostly developed due to below main influences:

1. the influence of finite geometry and algebra, and combinatorics historically;
2. the influence of algebraic systems with binary operations (e.g. Latin squares);
3. the emerging or revision of new mathematics techniques as linear programming, semidefinite programming, numerical theory methods, commutative algebra, and recently noncommutative algebra & geometry ...;
4. actual demands from concrete applications such as agriculture, biolgy, medicine, military, industrial engineerings and services ...

The applications of designs described in the subsequent sections use two important properties of designs: *balancedness*- refering to a purely combinatorial aspects; and *orthogonality*- ensuring estimation without aliasing between main factor effects and factor interactions.

2.1. Latin squares, a balanced structure, very useful in Experimental Designs

Let any $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, consider the following concepts.

- *Binary square grid* of size n is a $n \times n$-matrix consisting entries 0,1 only;
- *Latin squares* of order n is a $n \times n$-matrix consisting only entries $0, 1, \ldots, n-1$ such that each symbol occurs once in each row and once in each column.

- We use index i for row and index j for column in both binary square grid and Latin squares. For any grid g, its *complement grid*, denoted g^c, is defined by

$$(g^c)_{ij} := g_{ij} + 1 \pmod 2.$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Figure 1. Three binary square grids that form set A

Put $A = \{a, b, k, a^c, b^c, k^c\}$, as in Figure 1. Given $g, h \in A$, we define the *superimposed grid* $g * h$ to be the 4×4-matrix with entries in $\{0, 1, 2, 3\}$ where $(g * h)_{ij}$ has binary expansion g_{ij}, h_{ij}. That means, $g * h$ is formed by putting g on h, called superimposing, then coding pairs of $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ and $(1, 1)$ by symbols 0,1,2,3 respectively. Moreover, the grids $g * h, g * h^c$, $g^c * h$ and $g^c * h^c$ are called the *derived grids* of g and h. We put

$$\mathrm{Der}(g, h) := \{g * h, g^c * h, g * h^c, g^c * h^c\}.$$

Observation 1. *Our two interesting questions are:*
1/ are superimposed grids $a * b$, $a * b^c$, $a^c * b$, $a^c * b^c$ Latinh squares?
2/ will the below lemma be correct?

Lemma 1. *$g * h$ is a Latin square if, and only if, its derived grids are.*

2.2. Factorial Designs

We use a full factorial design to find a *regression model* describing the relationship between factors contributing to the product quality.
Suppose that we have n finite sets $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ contained in a number field, say rational numbers $\mathbb{Q}$, called the *factor sets* or *factors*. The *(full) factorial design* with respect to these n factors is the Cartesian product $D = Q_1 \times \ldots \times Q_n \subset k^n$.
A design point $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ is an element of D. Moreover, $r_i := |Q_i|$ is the number of *levels* of the factor i.. Let $s_1, s_2, \ldots, s_m$ ($m \leq n$) be the distinct levels of D, and suppose that D has exactly a_i factors with s_i levels. We call $s_1^{a_1} \cdot s_2^{a_2} \cdots s_m^{a_m}$ the *design type* of D. E.g., if $Q_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $Q_2 = Q_3 = Q_4 = \{0, 1\}$, then a $4 \cdot 2^3$ mixed factorial design is

$$D = Q_1 \times Q_2^3 = \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1), \ldots, (3,1,1,0), (3,1,1,1)\}.$$

Example 1. *Fix $n = 3$, we use the* ***full factorial design*** 2^3 ***with three binary factors*** *to find the relationship between the factor x_1 of mixture ratio, the factor x_2 of temperature, the factor x_3 of experiment time period and the response y of wood toughness.*

The levels of factors are given in Table 1, and simulated experiments in Table 2:

Factor	Low (0)	High (1)
Mix(ture) Ratio	45p	55p
Temp(erature)	1000C	1500C
Time period	30min	90min

Table 1. Factor levels of 2^3 factorial experiment

RUN	Mix Ratio	Temp	Time	Response Y
1	45p (-)	100C (-)	30m (-)	8
2	55p (+)	100C (-)	30m (-)	9
3	45p (-)	150C (+)	30m (-)	34
4	55p (+)	150C (+)	30m (-)	52
5	45p (-)	100C (-)	90m (+)	16
6	55p (+)	100C (-)	90m (+)	22
7	45p (-)	150C (+)	90m (+)	45
8	55p (+)	150C (+)	90m (+)	56

Table 2. Results of an example 2^3 Factorial Experiment

The linear model for the wood toughness y, fit by the eight experimental runs, is

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3.$$

2.3. Fractional factorial designs

Suppose D is a $s_1^{a_1} \cdots s_m^{a_m}$ mixed factorial design. A *fraction* F of D is a subset consisting of elements of D. If F has an element with multiplicity greater than one, we say F has *replications*. This is also called an $s_1^{a_1} \cdots s_m^{a_m}$ *fractional design*.

Example 2. *A 2^3 **fractional factorial design** has only 4 runs, whose columns correspond to the three binary factors, of the full 2^3-factorial design of 8 runs above.*

This fraction is extracted from the below Hadamard matrix of order 4 (in which every pair of rows and pair of columns have their inner product equals to 0). This matrix provides enough information to estimate main effects of the mixture ratio x_1, the temperature x_2, the experiment time period x_3 in Example 1:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -- & -- & -- & -- \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

But why using Fractional Factorial Designs? To cut cost in scientific investigations and/or in industrial manufacturing. In particular case here, if we employ the four experimental runs of F, we can fit only a linear model for the response y of wood toughness, of the form:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3.$$

So using less resource, we now could fit a model that consists of only main factor effects!

Observation 2. *Our new and interesting questions now are:*

** If Hadamard matrix of order $n > 2$ does exist, then n must be divisible by 4!*

*** [**Hadamard Conjecture**- A challenging and open problem for the 21-th century mathematics] For any positive integer n being divisible by 4, does an Hadamard matrix of order n exist? Currently many mathematicians around the world try to answer a more humble question: does an Hadamard matrix of order 668 exist?*

You should know that the most recently constructed Hadamard matrix (in 2004) has order 428 only! Hadamard matrices, however can be generalized to a more complex structure, named Orthogonal Array, where we replace the concept of orthogonality in Hadamard matrix- pair of rows and of columns are perpendicular in $\mathbb{R}^n$- by a combinatorial definition.

2.4. Orthogonal Array- Fractional Factorial Design satisfying orthogonality

Your automobile lasts longer today because of orthogonal arrays
[“The new mantra: MVT", Forbes, Mar. 11, 1996, pp. 114-118.]

Orthogonal arrays are beautiful and useful. They are essential in statistics and computer science... In statistics they are primarily used in designing experiments, e.g. in agriculture, medicine, and in great demand in industrial manufacturing as software industry.

Example 3. *A specific design problem in industrial manufacturing.*

A company wants to put a new type of new product (mobile phones, LCD, yogurt, cars, new way of banking management ...) to the national market in the next year, to compete with the international brands as Nokia or Samsung. The product have five potential and different features which are yet to be decided, namely: Color C, Shape S, Weight W, Material M, and Price P. Each of these features can take on three possible values precisely. For instance, the color C can be magenta, silver or blue, being coded by non-negative integers 0,1 and 2.

The aim To know and quantitatively measure/obtain how strong the factor and their interactions could affect the mobile quality, we have to conduct, in principle, all 3^5 possible combinations of the factor levels, (called level combinations in short).

Formulation More economically way of doing, we could find a subset F of the Cartesian product $D := C \times S \times W \times M \times P$ to do experiments and obtain only essential information. This is the first and utmost goal of Experiment Designer.

How to do? A systematic and mathematical description of the problem would help! And advanced algebraic techniques are the right tools.

Now suppose we realize that 5 factors are not enough, that 11 factors would increase the product quality, where the six new factors are Operating system- OS, Camera-Cam, Wifi facility-Wifi, Antishock-Anti, Antene-Ant and Place. For budget contraint and simplicity, assume further that each factor now has only two possible values, coded by 0 and 1.

Key question. Could we know and, if yes, how to measure how strong the factor interactions [OS, Wifi] and [Weight, Anti-shock] could impact on the mobile quality by experimenting only 12 experimental runs instead of $2^{11} = 2048$ ones? And how do we do that? We need

Co	Sh	Wei	Ma	Pri							Run
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	2
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	3
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	4
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	5
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	6
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	7
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	8
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	9
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	10
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	11
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	12
					OS	Cam	Wifi	Anti	Ant	Place	

Table 3. Strength 2 orthogonal array from the full factorial design 2^{11}

Definition 2. *In general, a fraction F of a factorial design $D = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n$ is called an* orthogonal array of strength t *if, for each choice of t factors (columns), every possible combination of coordinate values from a set of t factors occurs equally often.*

Mathematics's contribution: the relevant mathematical theory is extremely beautiful, orthogonal arrays are related to combinatorics, finite fields, geometry and error-correcting codes; not yet mention discrete algebra, graph and group theories (11).
In our specific example, a specific kind of subset, strength 2 (but not strength 3) orthogonal array $F \subseteq D = C \times S \times W \times M \times P \times OS \times Cam \times Wifi \times Anti \times Ant \times Place = \{0,1\}^{11}$ can solve this cost optimization problem, shown in Table 3!

III - Advanced topics in Experimental Designs - Response Surface Methodlogy

3.1. History of Response Surface Methodlogy (RSM)

RSM is one of the most successful optimization technique based on *designed experiments*. This approach to optimization was developed in the early 1950s by Box and Wilson, and initially applied in the chemical and process industries, in particular in *process robustness* studies. Formally, RSM is a colection of mathematical and statistical techniques that are useful for modeling and analysis in applications where a response of interest- e.g. some performance measure or quality characteristic of the process- is influenced by several variables-factors and the objective is to **optimize this response**. In the view of process industrialists, these are activities in which process engineering personnel try to reduce the variablity in the output of a process by setting controllable factors to levels that minimize the variablity transmitted into the responses of interest by other factors that are difficult to control during routine operation (9).

3.2. Mathematically, what is RSM? This is about an approximation-based optimization, where the approximation function is called response surface. In general, suppose that the scientist or engineer (refer to as the *experimenter*) is concerned with a product, process or system involving a response y that depends on a finite number of controllable input variables (called independent variables) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$. The relationship is

$$y = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k) + \varepsilon$$

where the form of the true response function f is unknown and perhaps very complicated, and ε is a term that represents other sources of variability not accounted for in f.

In practice several assumptions are used, that the *statistical error* ε has a normal distribution with mean 0, and that the natural variables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$ should be transformed to coded variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, then the response mean now is

$$\eta = \mathbf{E}(y) = \mathbf{E}(f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)) + \mathbf{E}(\varepsilon) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k).$$

In most of practical settings, low-order polynomials are used for f.

Why is RSM? In Conventional Optimization, a solution is not explicitly obtained in a nonlinear large problem. When using response surface creation, a function is approximated, then optimization calculation using the response surface is easier to obtain, thanks to the Least Square method and employing designed experiments.

3.3. RSM and the Philosophy of Quality Improvement

Over the last 20 years RSM has found extensive applications in many industrial organizations in the US and Europe, in sectors of chemical, semiconductor and electronic manufacturing as well as services, logistics, finance ... where quality and process improvements are utmost goals. Statistical methods, including statistical process control (SPC) and design of experiments, play a key role in this activity.
Quality improvement is most effective when it is conducted early in the product and process development cycle. Industries such as semiconductor, automotive, biotechnology and pharmaceuticals (5), software production (10) are all examples where experimental design methodology has resulted in shorter design and development time for new products. Furthermore, experimental design principles (8) provide a firm and concrete base for manufacturing products that have higher reliability and meet or exceed customer requirements.

IV - Conclusion

We close this introductory writing to Experimental Design by describing a specific use of the mentioned designs and methodology in Software Production, in particular in Software Testing (ST). In software testing, many competing demands arise from different agents

- Product testers like developers, are placed under severe pressure by the **short release cycles** expected in today's software markets, then
- Customers need large, custom-built systems and demand **high reliability** of their software, and
- Increased competition: the customers are also demanding cost reductions in their **maintenance contracts**.

All of these issues have encouraged product test organizations to search for techniques that improve upon the traditional approach of hand-crafting individual test cases. Our key question is to determine a test suit (consisting of a finite number of test cases) having as small cardinality as possible while capable of holding many potential cause-to-failures input. We see that:

- ST is a very, very complicated task from the conceptual and systematic view
- Multiwise-interactions of factors are important in judging flaws/errors/failures
- Approaches and techniques have been proposed, as equivalence partitioning, boundary value analysis (2), event correlation (3)

Software Testing- which part is most suitable to apply DOE? Still, new methodology used for very large system would be developed. It turns out that, however, DOE is the most economical way and systematic method to follow, especially for *Black-box testing*! Black-box testing is undertstood as the type of testing where

- only the knowledge of the functionality of the software is used for testing;
- knowledge of the detailed architectural structure, or of the procedures used in coding, is not utilized

Another most employed combinatorial structure is *Covering designs*, they are less strictly near-balanced designs where we allow each multiwise level combination between factors just occurs in test suit, not neccessarily with the same frequency. For constructing algorithmically covering designs of 2-coverage, see (4). A 2-coverage covering design, in which pairwise level combinations between pairs of factors occur, is extracted from Table 3 consisting only 6 rows, as follows:

Co	Sh	Wei	Ma	Pri						Run
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	3
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	4
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	5
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	6
					OS	Cam.	Wifi	Anti.	Ant.	

Software Testing- emperical studies. Balanced designs and Covering designs are both extremely useful for Black-box ST! For instance, S. R. Dalai and al. (ACM and Bellcore 1999) proposed *Model-based testing* principles, in which DOE and Statistical data analysis techniques play a crucial role! They conducted case studies (message parsing and building, rule-based system, user-interface) to show that

- many failures are revealed (submitted to repair, to find pattern causing errors) which were not found by hand-crafting testers, and
- automatic testing is done smoothly, based on combinarorial designs generated beforehand.

Using covering-design, they obtained the below result:

Project	Total test cases	% failed cases	Failure cases	Found by hand-crafting testers
1: Messaging	4,500	5%	27	3
2: Rule-based system	13	23%	4	1
3: User interface	159	2%	6	3

To conclude and stimulate our curiousities, we could ask:

1. What could your comments/remarks be when looking at the above table?
2. Covering designs do not maintain the balancedness, therefore we can not use them when we measure factor interactions on the response. We have to utilize fully balanced designs, as strength 3 or better strength 4 balanced designs- OAs? How to do so in practice?
3. In general, how to compute strength t OAs, provided parameter set (of factors and runsize)?
4. How to employ orthogonal arrays and the likes in RSM?
5. Are there other experimental designs being useful for industrially mass manufacturing, or employed in theoretical studies in the favor of experimenters or algebraists?...

And if you want to know more on this wonderful subject, please visit sites (11; 12), or (7).

Tài liệu

[1] C.F.. Jeff Wu, Michael Hadamard (2000) Experiments: Planning, Analysis and Parameter Design Optimization, Wiley, 630 pp

[2] Factor-covering designs for Testing Software, S.R. Dalai and al., *Technometrics* 40(3), 1998, 234-243, American Statistical Association and the American Society for Quality

[3] Combinatorial designs in Multiple faults localization for Battlefield networks, M. F. Fecko and al., *IEEE Military Communications* Conf., Vienna, 2001

[4] The AETG System: An Approach to Testing Based on Combinatorial Design, David M. Cohen, Siddhartha R. Dalal, Michael L. Fredman, and Gardner C. Patton, IEEE *Trans. on Soft. Engineering*, Vol. 23, No. 7, July 1997

[5] Glonek G.F.V.. and Solomon P.J. (2004), Factorial and time course designs for cDNA microarray experiments, *Biostatistics* **5**, 89-111.

[6] Hedayat, A. S. and Sloane, N. J. A. and Stufken, J. (1999), Orthogonal Arrays, *Springer-Verlag.*

[7] John J. Borkowski's Home Page `http://www.math.montana.edu/ jobo/courses.html/`

[8] Madhav, S. P. (1989), Quality Engineering using robust design, *Prentice Hall.*

[9] Raymond H. Myers, Douglas C. Montgomery and Christine M. Anderson-Cook (2009), Response Surface Methodlogy: Process and Product Optimization Using Designed Experiments, Wiley

[10] Madhav, S. P. (2004), Design Of Experiment For Software Testing, www.isixsigma.com/library/content/c030106a.asp

[11] Nguyen, V. M. Man (2005), An online service for computing Hadamard matrices and strength 3 orthogonal arrays, www.mathdox.org/nguyen, *Technische Universiteit Eindhoven.*

[12] Sloane N.J.A. (2005), www.research.att.com/ njas/hadamard/

Viện Nghiên cứu nâng cao - Institute for Advanced Study (IAS)

Ngô Đắc Tuấn - Viện nghiên cứu nâng cao IAS, Princeton, Mỹ

▽

Vài năm trước tôi có dịp được qua thăm và làm việc tại Khoa Toán của Viện nghiên cứu nâng cao (Institute for Advanced Study, viết tắt là IAS) tại thành phố Princeton, tiểu ban New Jersey. Trong một vài năm gần đây, có khá nhiều người Việt Nam qua làm việc tại Viện như anh Vũ Hà Văn, anh Ngô Bảo Châu, anh Nguyễn Chu Gia Vượng...Trong bài viết ngắn này, tôi muốn chia sẻ với các bạn những gì tôi cảm nhận được về cuộc sống và sinh hoạt ở Viện.

Institute for Advanced Study
(Nguồn: sns.ias.edu)

Qua thời gian ở Viện, tôi thấy đây là một trong những môi trường lý tưởng để làm nghiên cứu. Là một viện nghiên cứu giống như Viện nghiên cứu nâng cao IHES ở Pháp hoặc Viện Max- Planck về Toán ở Đức, Viện IAS chỉ có một số ít giáo sư làm việc thường xuyên ở Viện, các thành viên còn lại là những nhà toán học từ khắp nơi trên thế giới đến làm việc trong khoảng thời gian ngắn, từ một, hai tuần đến một vài năm. Trong mỗi năm học, một hoặc hai đề tài được chọn ra làm hướng nghiên cứu chính, ví dụ như Hình học Đại số (2006-2007) hoặc Phương trình đạo hàm riêng (2008-2009). Trong năm học đó, mọi hoạt động của Viện đều xoay quanh chủ đề này. Nhiều nhà toán học có danh tiếng tiếng trên thế giới được mời đến, một số vị trí post-doc cũng được ưu tiên cho các sinh viên mới tốt nghiệp trong chuyên ngành. Ngoài ra, các giáo sư của trường đại học Princeton cũng thường xuyên tham gia các hoạt động của Viện. Hàng tuần, Viện tổ chức rất nhiều seminar, mỗi kỳ có từ một đến hai hội nghị được tổ chức. Những ai muốn học hỏi thêm có thể giam gia seminar ở khoa Toán của trường Princeton. Viện còn sở hữu một thư viện rất tốt và đầy đủ sách và tạp chí toán học, một trong những yếu tố rất quan trọng cho những người làm nghiên cứu. Không khí làm việc ở Viện rất sôi nổi, các thành viên đều rất cởi mở, mọi người nói chuyện toán không chỉ trong giờ seminar mà cả trong giờ ăn trưa và giờ uống trà.

Ngoài điều kiện làm việc lý tưởng, Viện rất quan tâm đến cuộc sống tinh thần của các nhà khoa học. Tất cả các thành viên đều được thu xếp ở trong nhà khách của Viện, chỉ cách nơi làm việc chừng năm phút đi bộ. Hàng tuần, rất nhiều hoạt động văn hóa nghệ thuật được tổ chức: chiếu phim, nghe nhạc giao hưởng hoặc các lớp học tiếng Anh, học khiêu vũ hoặc học đánh tennis. Trong năm học Viện còn tổ chức những buổi đi thăm quan dã ngoại đến những thành phố lân cận như New York hoặc Washington DC. Điều duy nhất bạn có thể phàn nàn là cuộc sống ở Princeton quá thanh bình và có phần tẻ nhạt vào những ngày cuối tuần. Tôi nghĩ đó là khiếm khuyết không thể tránh khỏi, vì mục đích đầu tiên của Viện là tạo ra một môi trường yên tĩnh để tập trung làm khoa học.

Thay cho lời kết, tôi xin chúc các bạn một trại hè thành công và chúc các bạn sớm có dịp qua thăm Viện IAS trong tương lai gần.

Một số điều nên và không nên trong giảng dạy toán

GS Nguyễn Tiến Zũng - Viện Toán học Toulouse, CH Pháp

▽

Giới thiệu. Được sự đồng ý của GS Nguyễn Tiến Zũng, chúng tôi trích đăng loạt bài của GS đăng trên trang web cá nhân của GS. Do khuôn khổ của Kỷ yếu có hạn, chúng tôi có lược trích một số đoạn. Toàn văn các ý kiến của GS Nguyễn Tiến Zũng cũng như những bình luận, góp ý của độc giả, bạn đọc có thể tham khảo ở website `http://zung.zetamu.com`

Trong loạt bài này, tôi sẽ đăng dần bày một số quan điểm của tôi về những điều nên và không nên trong giảng dạy. Những quan điểm này được rút ra từ kinh nghiệm bản thân, việc nghiên cứu các liệu về giáo dục, sự trao đổi với đồng nghiệp và sinh viên, và những suy nghĩ để làm sao dạy học tốt hơn. Tất nhiên có những quan điểm của tôi có thể còn phiến diện. Xin mời mọi người trao đổi, viết lên những quan điểm và kinh nghiệm của mình.

Tôi sẽ chủ yếu nói về việc dạy toán, tuy rằng nhiều điểm áp dụng được cho hầu hết các môn học khác. Tôi sẽ dùng từ "giảng viên" để chỉ cả giảng viên đại học lẫn giáo viên phổ thông, từ "học sinh" (student) để chỉ học sinh sinh viên hay học viên ở mọi cấp học, từ phổ thông cho đến sau đại học. Tôi viết không theo thứ tự đặc biệt nào.

Nên: *Thỉnh thoảng thay đổi môn dạy nếu có thể. Nếu dạy một môn nhiều lần, thì cải tiến thường xuyên phương pháp và nội dung dạy môn đó.*

Không nên: *Dạy mãi năm này qua năm khác một môn, với giáo trình nhiều năm không thay đổi.*

Các chức vụ quản lý lãnh đạo thường có nhiệm kỳ, và thường có nguyên tắc là không ai làm quá 2 nhiệm kỳ ở cùng 1 vị trí. Lý do là để tạo sự thay đổi cải tiến thường xuyên, tránh sự trì trệ. Ngay trong việc dạy học cũng vậy: một người mà dạy quá nhiều năm cùng một thứ, thì dễ dẫn đến nhàm chán trì trệ. Để tránh chuyện đó, có những cơ sở đại học có qui định là các môn học cũng có nhiệm kỳ: ai mà dạy môn nào đó được 4-5 năm rồi thì phải giao cho người khác đảm nhiệm, trừ trường hợp không tìm được người thay thế.

Nhiều khoa toán có phân chia việc dạy các môn cho các tổ bộ môn, ví dụ môn "phương trình vi phân" thì chỉ dành cho người của tổ bộ môn phương trình vi phân dạy. Việc phân chia như vậy có cái lợi là đảm bảo chất lượng dạy,đặc biệt là trong điều kiện trình độ giảng viên nói chung còn thấp, phải "chuyên môn hóa" trong việc dạy để đảm bản chất lượng tối thiểu. Tuy nhiên nó có điểm hạn chế, là nó tạo ra xu hướng người của tổ bộ môn nào sẽ chỉ biết chuyên ngành hẹp đấy, tầm nhìn không mở rộng ra. Ở một số trường đại học tiên tiến, nơi có nhiều giảng viên trình độ cao (và với nguyên tắc là đã là giáo sư hay giảng viên cao cấp thì đủ trình độ để dạy bất cứ môn nào trong các môn toán bắt buộc ở bậc cử nhân), công việc giảng dạy không phân chia theo tổ bộ môn hẹp như vậy, mà giảng viên (cao cấp) nào cũng có thể đăng ký dạy bất cứ môn nào ở bậc cử nhân.

Năm 1999 tôi nhận dạy 1 học kỳ cao học về hệ động lực Hamilton, và trong quá trình đọc tài liệu để chuẩn bị bài giảng cho môn đó, tôi phát hiện ra một số vấn đề cơ bản liên quan đến dạng chuẩn địa phương của hệ động lực chưa được nghiên cứu, và điều đó thúc đẩy tôi nghiên cứu được một số kết quả khá tốt. Năm 2008 tôi nhận dạy môn đại số (mở rộng trường và một ít đại số giao hoán) cho sinh viên toán năm thứ 4, tuy rằng trước đó tôi hầu như không đụng chạm đến những thứ đó. Việc dạy môn đại số đã giúp tôi nắm chắc thêm được một số kiến thức về đại số, ví dụ như hiểu thêm ý nghĩa của tính chất Noether (đây là tính chất đặc trưng của "đại số", đối ngược với "giải tích").

Tất nhiên có nhiều người, do điều kiện công việc, phải dạy cùng một môn trong nhiều năm. Để tránh trì trệ trong trường hợp đó, cần thường xuyên cải tiến phương pháp và nội dung giảng dạy (đưa vào những ví dụ minh họa mới và bài tập mới từ thực tế hiện tại, sử dụng những công nghệ mới và công cụ học tập mới, tìm các cách giải thích mới dễ hiểu hơn, v.v.)

Nên: *Dạy và kiểm tra kiến thức học sinh theo lối "học để hiểu"*

Không nên: *Tạo cho học sinh thói quen học vẹt, chỉ nhớ mà không hiểu*

Các nhà giáo dục học và thần kinh học trên thế giới đã làm nhiều phân tích và thí nghiệm cho thấy, khi bộ óc con người "hiểu" một cái gì đó (liên tưởng được với những kiến thức và thông tin khác đã có sẵn trong não) thì dễ nhớ nó (do thiết lập được nhiều "dây nối" liên quan đến kiến thức đó trong mạng thần kinh của não - một neuron thần kinh có thể có hàng chục nghìn dây nối đến các neuron khác), còn khi chỉ cố nhồi nhét các thông tin riêng lẻ vào não (kiểu học vẹt) mà không liên hệ được với các kiến thức khác đã có trong não, thì thông tin đó rất khó nhớ, dễ bị não đào thải.

Thực ra thì môn học nào cũng cần "hiểu" và "nhớ", tuy rằng tỷ lệ giữa "hiểu" và "nhớ" giữa các môn khác nhau có khác nhau: ví dụ như ngoại ngữ thì không có gì phức tạp khó hiểu lắm nhưng cần nhớ nhiều, tất nhiên để nhớ được các câu chữ ngoại ngữ thì cũng phải liên tưởng được các câu chữ đó với hình ảnh hay ỹ nghĩa của chúng và với những thứ khác có trong não, nhưng toán học thì ngược lại: không cần nhớ nhiều lắm, nhưng phải hiểu được các kiến thức, và quá trình hiểu đó đòi hỏi nhiều công sức thời gian. Có những công thức và định nghĩa toán mà nếu chúng ta quên đi chúng ta vẫn có thể tự tìm lại được và dùng được nếu đã hiểu bản chất của công thức và định nghĩa đó, còn nếu chúng ta chỉ nhớ công thức và định nghĩa đó như con vẹt mà không hiểu nó, thì cũng không dùng được nó, và như vậy thì cũng không hơn gì người chưa từng biết nó.

Tôi chẳng bao giờ nhớ được chính xác công thức tính Christoffel symbol cho liên thông Riemann của một Riemannian metric , tuy "mang tiếng" là người làm hình học vi phân: cứ mỗi lần đụng đến thì xem lại, nhớ được một lúc, rồi lại quên. Nhưng điều đó không làm tôi băn khoăn, vì tôi hiểu bản chất của Christoffel symbol và các tính chất cơ bản của liên thông Riemann, từ đó có thể tự nghĩ ra lại được công thức nếu cần thiết (tốn một vài phút) hoặc tra trên internet ra ngay.

Sinh viên ngày nay (là những chuyên gia của ngày mai) có thể tra cứu rất nhanh mọi định nghĩa, công thức, v.v., nhưng để hiểu chúng thì vẫn phải tự hiểu, không có máy móc nào hiểu hộ được. Cách đây 5-10 năm, theo thông lệ của những người dạy trước tôi, tôi thường không cho phép sinh viên mang tài liệu vào phòng thi trong các kỳ thi cuối học kỳ, và đề bài thi hay có 1 câu hỏi lý thuyết (tức là phát biểu đúng 1 định nghĩa hay định lý gì đó thì được điểm). Nhưng trong thời đại mới, việc nhớ y nguyên các định nghĩa và định lý có ít giá trị, mà cái chính là phải hiểu để mà sử dụng được chúng. Bởi vậy những năm gần đây, trong các kỳ thi tôi dần dần cho phép học sinh mang bất cứ tài liệu nào vào phòng thi, và đề thi không còn các câu hỏi "phát biểu định lý" nữa. Thay vào đó là những bài tập (tương đối đơn giản, và thường gần giống các bài có trong các tài liệu nhưng đã thay tham số) để kiểm tra xem học sinh có hiểu và sử dụng được các kiến thức cơ bản không.

Về mặt hình thức, chương trình học ở Việt Nam (kể cả bậc phổ thông lẫn bậc đại học) khá nặng, nhưng là nặng về "nhớ" mà nhẹ về "hiểu", và trình độ trung bình của học sinh Việt Nam thì yếu so với thế giới (tất nhiên vẫn có học sinh rất giỏi, nhưng tỷ lệ học sinh giỏi thực sự rất ít, và cũng khó so được với giỏi của phương Tây). Vấn đề không phải là do người Việt Nam sinh ra kém thông minh, mà là do điều kiện và phương pháp giáo dục, chứ trẻ em gốc Việt Nam lớn lên ở nước ngoài thường là thành công trong đường học hành. Hiện tượng rất phổ biến ở Việt Nam là học sinh học thuộc lòng các "kiến thức" trước mỗi kỳ kiểm tra, rồi sau khi kiểm tra xong thì "chữ thầy trả thầy". Việt Nam rất cần cải cách chương trình giáo dục theo hướng tăng sự "hiểu" lên, và giảm sự "học gạo", "nhớ như con vẹt".

Nên: *Dạy những cái cơ bản nhất, nhiều công dụng nhất*

Không nên: *Mất nhiều thời giờ vào những thứ ít hoặc không dùng đến*

Trên đời có rất nhiều cái để học, trong khi thời gian và sức lực của chúng ta có hạn, và bởi vậy chúng ta luôn phải lựa chọn xem nên học (hay dạy học) cái gì. Nếu chúng ta phung phí quá nhiều thời gian vào những cái ít công dụng, hoặc thậm chí phản tác dụng, (những lý thuyết về chính trị hay kinh tế trái ngược với thực tế), thì sẽ không còn đủ thời gian để học (hay dạy học) những cái quan trọng hơn, hữu ích hơn.

Tất nhiên, mức độ "quan trọng, hữu ích" của từng kiến thức đối với mỗi người khác nhau thì khác nhau, và phụ thuộc vào nhiều yếu tố như thời gian, hoàn cảnh, sở trường, v.v. Ví dụ như học nói và viết tiếng Việt cho đàng hoàng là không thể thiếu với người Việt, nhưng lại không cần thiết với người Nga. Những người muốn làm nghề toán thì phải học nhiều về toán, còn sinh viên đại học các ngành khác nói chung chỉ cần học một số kiến thức toán cao cấp cơ bản nhất mà sẽ cần trong công việc của họ. Những người muốn làm toán ứng dụng, thì ngoài các môn toán, cần phải học các môn mà họ định mang toán ứng dụng vào đó.

Ngay trong các môn toán, không phải các kiến thức nào cũng quan trọng như nhau. Và "độ quan trọng" và "độ phức tạp" là hai khái niệm khác nhau: không phải cái gì quan trọng cũng phức tạp khó hiểu, và không phải cái gì rối rắm khó hiểu cũng quan trọng. Giảng viên cần tránh dẫn dắt học sinh lao đầu vào những cái rắm rối phức tạp nhưng ít công dụng. Thay vào đó, cần dành nhiều thời gian cho những cái cơ bản, nhiều công dụng nhất. Nếu là cái vừa cơ bản và vừa khó, thì lại càng cần dành đủ thời gian cho nó, vì khí nắm bắt được nó tức là nắm bắt được một công cụ mạnh.

Một ví dụ là đạo hàm và tích phân. Đây là những khái niệm cơ bản vô cùng quan trọng trong toán học. Học sinh cần hiểu định nghĩa, bản chất và công dụng của chúng, và nắm được một số nguyên tắc cơ bản và công thức đơn giản, ví dụ như nguyên tắc Leibniz cho đạo hàm của một tích, hay công thức "đạo hàm của $\sin x$ bằng $\cos x$". Tuy nhiên nếu bắt học sinh học thuộc hàng trăm công thức tính đạo hàm và tích phân khách nhau, thì sẽ tốn thời gian vô ích vì phần lớn các công thức thức đó sẽ không dùng đến sau này, hoặc nếu dùng đến thì có thể tra cứu được dễ dàng. Một lần tôi thấy có một sách tiếng Việt về tính tích phân cho học sinh, dày hơn 150 trang, với rất nhiều công thức phức tạp dài dòng (ví dụ như công thức tính tính phân của một hàm số có dạng thương của hai biểu thức lượng giác), mà ngay những người làm toán chuyên nghiệp cũng rất hiếm khi cần đến. Thay vì tốn nhiều thời gian vào những công thức phức tạp mà không cần dùng đó, học những thứ cơ bản khác sẽ có ích hơn.

Một ví dụ khác: các bất đẳng thức. Có những bất đẳng thức "có tên tuổi", không phải vì nó "khó", mà là vì nó có ý nghĩa (nó xuất hiện trong các vấn đề hình học, số học, phương trình vi phân, v.v.). Chứ nếu học một đống hàng ngàn bất đẳng thức mà không biết chúng dùng để làm gì, thì khá là phí thời gian. Phần lớn các bất đẳng thức (không kể các bất đẳng thức có tính tổ hợp) có thể được chứng minh khá dễ dàng bằng một phương pháp cơ bản, là phương pháp dùng đạo hàm hoặc sai phân. Phương pháp này học sinh phổ thông có thể học được, nhưng thay vào đó học sinh lại được học các kiểu mẹo mực để chứng minh bất đẳng thức. Các mẹo mực có ít công dụng, chỉ dùng được cho bài toán này nhưng không dùng được cho bài toán khác (bởi vậy mới là "mẹo mực" chứ không phải "phương pháp"). "Mẹo mực" có thể làm cho cuộc sống thêm phong phú, nhưng nếu mất quá nhiều thời gian vào "mẹo mực" thì không còn thời gian cho những cái cơ bản hơn, giúp tiến xa hơn. Như là trong công nghệ, có cải tiến cái đèn dầu đến mấy thì nó cũng không thể trở thành đèn điện.

Hồi còn nhỏ, có lần tôi đi thi học sinh giỏi (lớp 6?), có bài toán tìm cực đại. Tôi dùng đạo hàm tính ngay ra điểm cực đại, và có bạn khác cùng lớp cũng biết làm như vậy. Cách làm đó là do chúng tôi tự đọc sách mà ra chứ không được dạy. Nhưng khi viết lời giải thì lại phải giả vờ "đoán mò" điểm cực đại, rồi viết hàm số dưới dạng một số (giá trị tại điểm đó) cộng với một biểu thức hiển nhiên là không âm (ví dụ như vì có dạng bình phương) thì mới được điểm, chứ nếu viết đạo hàm thì mất hết điểm. Nếu như thầy giáo trừ điểm học sinh, vì học sinh giải bài thi bằng một phương pháp "cơ bản" nhưng "không có trong sách thầy", thì điều đó sẽ góp phần làm cho học sinh học mẹo mực, thiếu cơ bản.

Qua phỏng vấn một số sinh viên đại học và cao học ngành toán của Việt Nam, tôi thấy họ được học nhiều môn "cao cấp", nhưng vẫn thiếu kiến thức cơ bản. Ví dụ như họ học giải tích hàm, với những định lý trừu tượng khá là khó. Nhưng họ lại không biết công thức Parceval cho chuỗi Fourier là gì, trong khi chuỗi Fourier là một trong những khái niệm giải tích cơ bản và nhiều ứng dụng nhất của toán. Tôi không có ý nói giải tích hàm là "không cơ bản". Nó là thứ cần thiết. Nhưng nếu những khái niệm và định lý của giải tích hàm chỉ được học một cách hình thức, không có liên hệ với chuỗi Fourier hay với các ví dụ cụ thể khác, thì đó là học "trên mây trên gió".

Nên: *Giải thích bản chất và công dụng của các khái niệm mới một cách trực giác, đơn giản nhất có thể, dựa trên sự liên tưởng tới những cái mà học sinh đã từng biết.*

Không nên: *Đưa ra các khái niệm mới bằng các định nghĩa hình thức, phức tạp, tối nghĩa.*

Các khái niệm toán học quan trọng đều có mục đích và ý nghĩa khi chúng được tạo ra. Và không có một khái niệm toán học quan trọng nào mà bản thân nó quá khó đến mức không thể hiểu được. Nó chỉ trở nên quá khó trong hai trường hợp: 1) người học chưa có đủ kiến thức; 2) nó được giải thích một cách quá hình thức, rối rắm khó hiểu. Trong trường hợp thứ nhất, người học phải được hướng tới học những kiến thức chuẩn bị (ví dụ như trước khi học về các quá trình ngẫu nhiên phải có kiến thức cơ sở về xác suất và giải tích). Trong trường hợp thứ hai, lỗi thuộc về người dạy học và người viết sách dùng để học.

Các nghiên cứu về thần kinh học (neuroscience) cho thấy bộ nhớ "ngắn hạn" của não thì rất nhỏ (mỗi lúc chỉ chứa được khoảng 7 đơn vị thông tin?), còn bộ nhớ dài hạn hơn thì chạy chậm. Thế nào là một đơn vị thông tin ? Tôi không có định nghĩa chính xác ở đây, nhưng ví dụ như dòng chữ "TON CHEVAL EST BANAL" đối với một người Pháp thì nó là một câu tiếng Pháp chỉ chứa không quá 4 đơn vị thông tin, rất dễ nhớ, trong khi đối với một người Việt không biết tiếng Pháp thì dòng chữ đó chứa đến hàng chục đơn vị thông tin – mỗi chữ cái là một đơn vị thông tin – rất khó nhớ. Một định nghĩa toán học, nếu quá dài và chứa quá nhiều đơn vị thông tin mới trong đó, thì học sinh sẽ rất khó khăn để hình dung toàn bộ định nghĩa đó, và như thế thì cũng rất khó hiểu định nghĩa.

Muốn cho học sinh hiểu được một khái niệm mới, thì cần phát biểu nó một cách sao cho nó dùng đến một lượng đơn vị thông tin mới ít nhất có thể (không quá 7?). Để giảm thiểu lượng đơn vị thông tin mới, cần vận dụng, liên tưởng tới những cái mà học sinh đã biết, dễ hình dung. Đấy cũng là cách mà các "cha đạo" giảng đạo cho "con chiên": dùng ngôn ngữ giản dị, mà con chiên có thể hiểu được, để giảng giải những "tư tưởng lớn". Khi có một khái niệm mới rất phức tạp, thì phải "chặt" nó thành các khái niệm nhỏ đơn giản hơn, dạy học các khái niệm đơn giản hơn trước, rồi xây dựng khái niệm phức tạp trên cơ sở các khái niệm đơn giản hơn đó (sau khi đã biến mỗi khái niệm đơn giản hơn thành "một đơn vị thông tin").

Trên thế giới, có nhiều người mà dường như "nghề" của họ là biến cái dễ hiểu thành cái khó hiểu, biến cái đơn giản thành cái rối ren. Những người làm quảng cáo, thì khiến cho người tiêu dùng không phân biệt nổi hàng nào là tốt thật đối với họ nữa. Những người làm thuế, thì đẻ ra một bộ thuế rối rắm người thường không hiểu nổi, với một tỷ lỗ hổng trong đó, v.v. Ngay trong khoa học, có những người có quan niệm rằng cứ phải "phức tạp hóa" thì mới "quan trọng". Thay vì nói "Vô-va rửa tay" thì họ nó "có 1 phần tử người, mà ảnh qua ánh xạ tên gọi là Vô-va, tại một thời điểm T, làm một động tác, thuộc phạm trù rửa,..." Nhưng mà một người "thầy" thực sự, phải làm cho những cái khó hiểu trở nên dễ hiểu đối với học trò.

Nên: *Luôn luôn quan tâm đến câu hỏi "để làm gì ?"*

Không nên: *Không cho học sinh biết họ học những thứ giảng viên dạy để làm gì, hay tệ hơn là bản thân giảng viên cũng không biết để làm gì.*

Quá trình học (tiếp thu thông tin, kiến thức và kỹ năng mới) là một quá trình tự nhiên và liên tục của con người trong suốt cuộc đời, xảy ra ở mọi nơi mọi lúc (ngay cả giấc ngủ cũng góp phần trong việc học) chứ không phải chỉ ở trường hay khi làm bài tập về nhà.

Những cái mà bộ não chúng ta tiếp thu nhanh nhất là những cái mà chúng ta thấy thích, và/hoặc thấy dễ hiểu, và/hoặc thấy quan trọng. Ngược lại, những cái mà chúng ta thấy nhàm chán, vô nghĩa, không quan trọng, sẽ bị bộ não đào thải không giữ lại, dù có cố nhồi vào. Bởi vậy, muốn cho học sinh tiếp thu tốt một kiến thức nào đó, cần làm cho học sinh có được ít nhất một trong mấy điều sau: 1) thích thú tò mò tìm hiểu kiến thức đó; 2) thấy cái đó là có nghĩa (liên hệ được nhiều với những hiểu biết và thông tin khác mà học sinh đã có trong đầu); 3) thấy cái đó là quan trọng (cần thiết, có nhiều ứng dụng). Tất nhiên 3 điểm đó liên quan tới nhau. Ở đây tôi chủ yếu nói đến điểm thứ 3, tức là làm sao để học sinh thấy rằng những cái họ được học là quan trọng, cần thiết. Một kiến thức đáng học là một kiến thức có ích gì đó, "để làm gì đó". Nếu như học sinh học một kiến thức với lý do duy nhất là "để thi đỗ" chứ không còn lý do nào khác, thì khi thi đỗ xong rồi kiến thức sẽ dễ bị đào thải khỏi não. Những môn thực sự đáng học, là những môn, mà kể cả nếu không phải thi, học sinh vẫn muốn được học, vì nó đem lại sự hiểu biết mà học sinh muốn có được và những kỹ năng cần cho cuộc sống và công việc của học sinh sau này. Còn những môn mà học "chỉ để thi đỗ" có lẽ là những môn không đáng học.

Cũng may là phần lớn giảng viên không rơi vào tình trạng "dạy môn không đáng học", mà là dạy môn học đáng học, với một chương trình gồm các kiến thức đáng học. Tuy nhiên, giảng viên có thể biết là "học chúng để làm gì", "vì sao đáng học", trong khi mà học sinh chưa chắc đã biết. Chính bởi vậy luôn cần đặt câu hỏi "để làm gì", khuyến khích học sinh đặt câu hỏi đó, và tìm những trả lời cho câu hỏi đó. Một trả lời giáo điều chung chung kiểu "nó quan trọng, phải học nó" ít có giá trị, mà cần có những trả lời cụ thể hơn, "nó quan trọng ở chỗ nào, dùng được vào trong những tình huống nào, đem lại các kỹ năng gì, v.v."

Tiếc rằng việc giải thích ý nghĩa và công dụng của các kiến thức cho học sinh còn bị coi nhẹ, không chỉ ở Việt Nam. Có lần tôi hỏi một lớp đại học ngành toán đang học đại số tuyến tính ở Việt Nam là "đại số tuyến tính dùng làm gì ?". Họ trả lời là không biết. Có lần tôi hỏi một nhóm sinh viên ngành "Life Sciences" ở Pháp mới học xong môn phương trình vi phân tuyến tính, rằng họ có biết ví dụ phương trình nào xuất phát từ các vấn đề thực tế không. Họ cũng trả lời là không hề biết. Nếu như giảng viên giới thiệu cho học sinh biết các công dụng của những kiến thức họ được học qua các ví dụ (ví dụ như những phương trình vi phân tuyến tính xuất hiện thế nào trong các mô hình về tăng trưởng), thì có thể họ sẽ thấy những cái họ học có nghĩa hơn, đáng để học hơn, dễ nhớ hơn.

Trong công việc sau này của học sinh khi đã ra trường, thì câu hỏi "để làm gì" lại càng đặc biệt quan trọng. Mọi hoạt động của một tổ chức hay doanh nghiệp tất nhiên đều phải có mục đích. Ngay trong công việc nghiên cứu khoa học, có nhiều người không làm được kết quả nghiên cứu quan trọng nào (tạm định nghĩa quan trọng = được nhiều người khác sử dụng) không phải là vì "dốt" mà là vì "không biết lựa chọn vấn đề để nghiên cứu", mất thời giờ nghiên cứu vào những cái ít ý nghĩa, ít ai quan tâm đến. Bởi vậy học sinh cần làm quen với việc sử dụng câu hỏi "để làm gì" từ khi đi học, như một vũ khí lợi hại trong việc chọn lựa các quyết định của mình.

Nên: *Tổ chức thi cử sao cho nhẹ nhàng nhất, phản ánh đúng trình độ học sinh, và khiến cho học sinh học tốt nhất.*

Không nên: *Chạy theo thành tích, hay tệ hơn là gian trá và khuyến khích gian trá trong* *thi cử.*

Việc kiểm tra đánh giá trình độ và kết quả học tập của học sinh (cũng như trình độ và kết quả làm việc của người lớn) là việc cần thiết. Nó cần thiết bởi có rất nhiều quyết định phải dựa trên những sự kiểm tra và đánh giá đó, ví dụ như học sinh có đủ trình độ để có thể hiểu những môn học tiếp theo không, có đáng tin tưởng để giao một việc nào đó cho không, có xứng đáng được nhận học bổng hay giải thưởng nào đó không, v.v. Bởi vậy giảng viên không thể tránh khỏi việc tổ chức kiểm tra, thi cử cho học sinh. Cái chúng ta có thể tránh, đó là làm sao để đừng biến các cuộc kiểm tra thi cử đó thành "sự tra tấn" học sinh, và có khi cả giảng viên.

Một "định luật" trong giáo dục là THI SAO HỌC VẬY. Tuy mục đích cao cả dài hạn của việc học là để mở mang hiểu biết và rèn luyện kỹ năng, nhưng phần lớn học sinh học theo mục đích ngắn hạn, tức là để thi cho đỗ hay cho được giải. Trách nhiệm của người thầy và của hệ thống giáo dục là làm sao cho hai mục đích đó trùng với nhau, tức là cần tổ chức thi cử sao cho học sinh nào mở mang hiểu biết và rèn luyện các kỹ năng được nhiều nhất cũng là học sinh đạt kết quả tốt nhất trong thi cử.

Nếu "thi lệch" thì học sinh sẽ học lệch. Ví dụ như thi tốt nghiệp phổ thông, nếu chỉ thi có 3-4 môn thì học sinh cũng sẽ chỉ học 3-4 môn mà bỏ bê các môn khác. Trong một môn thi, nếu chỉ hạn chế đề thi vào một phần kiến thức nào đó, thì học sinh sẽ chỉ tập trung học phần đó thôi, bỏ quên những phần khác. Nếu đề thi toàn bài mẹo mực, thì học sinh cũng học mẹo mực mà thiếu cơ bản. Nếu thi cử có thể gian lận, thì học hành cũng không thực chất. Nếu thi cử quá nhiều lần, thì học sinh sẽ rất mệt mỏi, suốt ngày phải ôn thi, không còn thì giờ cho những kiến thức mới và những thứ khác. Nếu thi theo kiểu bắt nhớ nhiều mà suy nghĩ ít, thì học sinh sẽ học thành những con vẹt, học thuộc lòng các thứ, mà không hiểu, không suy nghĩ. Mấy đề thi trắc nghiệm ở Việt Nam mấy năm gần đây đang có xu hướng nguy hiểm như vậy: đề thi dài, với nhiều câu hỏi tủn mủn, đòi hỏi học sinh phải nhớ mà điền câu trả lời, chứ không đòi hỏi phải đào sâu suy nghĩ gì hết. Thậm chí thi học sinh giỏi toán toàn quốc cũng có lần được thi theo kiểu bài tủn mủn như vậy, và kết quả là việc chọn lọc đội tuyển thi toán quốc tế năm đó bị sai lệch nhiều. Bản thân chuyện thi trắc nghiệm không phải là một chuyện tồi, thi trắc nghiệm có những công dụng của nó, ý tôi muốn nói ở đây là cách dùng nó trong thi cử ở Việt Nam chưa được tốt.

Một điều khá phổ biến và đáng lo ngại ở Việt Nam là học sinh được chính thầy cô giáo dạy cho sự làm ăn gian dối. Có khi giáo viên làm thế để "lấy thành tích" cho mình. Ví dụ như khi có đoàn kiểm tra đến dự lớp, thì dặn trước là cả lớp phải giơ tay xin phát biểu, cô sẽ chỉ gọi mấy bạn đã nhắm trước thôi. Hay là giao bài tập rất khó về nhà cho học sinh, mà biết chắc là học sinh không làm được nhưng bố mẹ học sinh sẽ làm hộ cho, để lấy thành tích dạy giỏi. Hoặc là mua bán điểm với học sinh: cứ nộp thầy 1 triệu thì lên 1 điểm chẳng hạn. Nhưng cũng có nhiều trường hợp mà giáo viên có ý định tốt, vô tư lợi, nhưng vì quan điểm là "làm như thế là để giúp học sinh" nên tìm cách cho học sinh "ăn gian" để được thêm điểm.

Trong hầu hết các trường hợp, thì khuyến khích học sinh gian dối là làm hại học sinh. Như Mark Twain có nói: *"It is better to deserve honors and not have them than to have them and not deserve them."* Có gắn bao nhiêu thành tích rởm vào người, thì cũng không làm cho người trở nên giá trị hơn. Học sinh mà được dạy thói làm ăn gian dối từ bé, thì có nguy cơ trở thành những con người giả dối, mất giá trị. Tất nhiên, trong một xã hội mà cơ chế và luật lệ "ấm ớ", và gian dối trở thành phong trào, ai mà không gian dối, không làm sai luật thì thiệt thòi không sống được, thì buộc người ta phải gian dối. Tôi không phê phán những hành động gian dối do "hành cảnh bắt buộc". Nhưng chúng ta đừng lạm dụng "vũ khí" này, và hãy hướng cho chọ sinh của chúng ta đến một xã hội mới lành mạnh hơn, mà ở đó ít cần đến sự gian dối. Để đạt được vậy, tất nhiên các "luật chơi" phải được thay đổi sao cho hợp lý và minh bạch hơn.

Tất nhiên, không chỉ ở Việt Nam, mà trên thế giới cũng có nhiều người hám "danh hão" và làm ăn giả dối, tuy tỷ lệ chắc là ít hơn nhiều. Tôi biết cả những giáo sư nước ngoài có trình độ cao, nhưng vì "quá hám danh" nên dẫn đến làm ăn giả dối. Sinh viên Pháp mà tôi dạy cũng có quay cóp. Bản thân tôi khi đi học cũng từng quay cóp. Tất nhiên tôi chẳng có gì để tự hào về chuyện đó, nhưng cũng không đến nỗi "quá xấu hổ" khi mà những người xung quanh tôi cũng quay cóp. Chúng ta là con người thì không hoàn thiện, nhưng hãy hướng tới hoàn thiện, giúp cho các thế hệ sau hoàn thiện hơn.

Nên: *Dạy học nghiêm túc, tôn trọng học sinh*

Không nên: *Dạy qua quít, coi thường học sinh*

Điều trên gần như là hiển nhiên. Nhưng ngay trường tôi ở Pháp có những giáo sư dạy học qua quít, nói lảm nhảm học sinh không hiểu, bị học sinh than phiền rất nhiều, ai mà dạy học cùng ê-kíp với họ thì khổ cực lây. Người nào mà không thích hoặc không hợp với dạy học, thì nên chuyển việc. Nhưng đã nhận việc có cả phần dạy học (như là công việc giáo sư bên Pháp, gồm cả nghiên cứu và giảng dạy) thì phải làm việc đó cho nghiêm túc. Dù có "tài giỏi" đến đâu, cũng không nên tự đề cao mình quá mà coi thường học sinh. Công việc đào tạo cũng quan trọng đối với xã hội không kém gì công việc nghiên cứu.

Có một số bạn trẻ, bản thân chưa có đóng góp gì quan trọng, nhưng đã vội chê bai những người thầy của mình, là những người có những hạn chế về trình độ và kết quả nghiên cứu (do điều kiện, hoàn cảnh) nhưng có nhiều cống hiến trong đào tạo, như thế không nên.

Nên: *Đối thoại với học sinh, khuyến khích học sinh đặt câu hỏi*

Không nên: *Tạo cho học sinh thói quen học thụ động kiểu thầy đọc trò chép*

Qua thảo luận, hỏi đáp mới biết học sinh cần những gì, vướng mắc những gì, bài giảng như thế đã ổn chưa, ... Khi học sinh đặt câu hỏi tức là có suy nghĩ và não đang ở trạng thại muốn "hút" thông tin. Học sinh nhiều khi muốn hỏi nhưng ngại, nếu được khuyến khích thì sẽ hỏi.

Nên: *Cho học sinh thấy rằng họ có thể thành công nếu có quyết tâm*

Không nên: *Nhạo báng học sinh kém*

Tôi từng chứng kiến giáo sư sỉ nhục học sinh, ví dụ như viết lên bài thi của học sinh những câu kiểu "thứ mày đi học làm gì cho tốn tiền" hoặc "đây là phần tử nguy hiểm cho xã hội". Như người ta thường nói "người phụ nữ được khen đẹp thì sẽ đẹp lên, bị chê xấu thì sẽ xấu đi". Học sinh bị đối xử tồi tệ, coi như "đồ bỏ đi", thì sẽ bị "blocked": khi việc học trở thành "địa ngục" thì sẽ bị ức chế không học được nữa. Nhưng nếu được đối xử tử tế, cảm thấy được tôn trọng cảm thông, thì họ sẽ cố gắng, dễ thành công hơn. Nếu họ có "rớt", thì họ vẫn còn nhiều cơ hội khác để thành công, miễn sao giữ được niềm tin và ý chí. Học sinh học kém, nhiều khi không phải là do không muốn học hoặc không đủ thông minh để học, mà là do có những khó khăn nào đó, nếu được giải tỏa thì sẽ học được. Trẻ em sinh ra thiếu hiểu biết chứ không ngu ngốc. Nếu khi lớn lên trở thành người ngu ngốc, không biết suy nghĩ, thì là do hoàn cảnh môi trường và lỗi của hệ thống giáo dục. Người "thầy" thực sự phải giúp học sinh tìm lại được sự thông minh của mình, chứ không làm cho họ "đần độn" đi.

Nên: *Cho học sinh những lời khuyên chân thành nhất, hướng cho họ làm những cái mà giảng viên thấy sẽ có lợi nhất cho họ, đồng thời cho họ tự do lựa chọn những gì họ thích.*

Không nên: *Biến học sinh thành "tài sản" của mình, bắt họ phải làm theo cái mình thích.*

Các bậc cha mẹ cũng không nên bắt con cái phải đi theo những sở thích của cha mẹ, mà hãy để cho chúng lựa chọn cái chúng thích.

Nên: *Làm sao cho học sinh hiểu được bản chất các kiến thức*

Không nên: *Lạm dụng ngôn ngữ hình thức, và dạy một cách giáo điều*

Thế nào là "giáo điều"? Là dạy một cách áp đặt, đưa ra các thứ như là "chân lý duy nhất", mà không giải thích vì sao nó như vậy, nó dựa trên cái gì, và không hề nói đến các khả năng khác, các "chân lý" khác. Sự nguy hiểm của lối dạy và học theo kiểu giáo điều, là biến học sinh thành những con người thụ động, mất khả năng suy nghĩ một cách độc lập, trở thành "cuồng tín" chấp nhận các thứ như là chân lý mà không đặt câu hỏi "tại sao", và khi sai thì không biết đâu mà sửa vì "mất gốc".

Một ví dụ đặc trưng của "văn hóa giáo điều" là môn "Tử vi đẩu số" ở Việt Nam. Các sách viết về tử vi mà tôi được nhìn thấy đều rất giáo điều, cái gì cũng do "Thánh bảo", không có giải thích tại sao, và tất nhiên nếu xem bị sai thì chỉ còn cách "kêu trời", không thể biết vì sao sai, sai ở đâu. Mà chắc chắn là dễ sai. Ví dụ, "giờ Tý" thực ra không bắt đầu lúc 11h đêm, mà cách đó khoảng 20 phút (tùy từng ngày), nhưng điều này chỉ có một nhóm nhỏ "thầy tử vi" biết còn có đọc sách cũng không học được. Nếu tìm hiểu kỹ hơn, thì sẽ thấy việc xác định "giờ" đó thực ra ứng với khái niệm Ascendant trong thiên văn học, và có thể tính chính xác "giờ Tý" đến từng giây một bằng các chương trình máy tính cho thiên văn. Hầu hết các "sao" trong tử vi đẩu số là "virtual stars" chứ không phải "sao thật" (nói về mặt toán học, nó có thể coi là một "spectral decomposition" tính ra từ vị trí của 3 điểm: mặt trăng, mặt trời và ascendant trên vòng hoàng đạo ?). Cái "spectral decomposition" này trong tử vi đẩu số có lẽ là một phát minh rất lớn, nhưng rất tiếc là không có sách nào giải thích vì sao lại làm như vậy, và qui tắc xếp sao được đưa ra một cách hoàn toàn thần bí. Ở phương Tây cũng có "Tử vi", gọi là astrology (chiêm tinh học). Tử vi đẩu số và astrology có cùng gốc thiên văn học, và có rất nhiều cái chung. Nhưng khác nhau ở chỗ astrology không giáo điều, mọi thứ có giải thích vì sao, tuy rằng các giải thích đó chưa "đạt mức khoa học", nhưng cho phép người ta suy nghĩ, kiểm nghiệm, phát triển, sửa sai!

Nên: *Tìm cách kích thích sự tò mò của học sinh*

Không nên: *Dạy theo kiểu"nhồi vịt"*

Ông Albert Einstein, người được hậu thế bầu là con người vĩ đại nhất của thế kỷ XX, có nhiều câu nói rất hay. Trong đó có câu *"I have no special talent. I am only passionately curious"*. Ý là bí quyết thành công của ông ta chính là sự "tò mò một cách đam mê". Và Einstein cũng có nói một cách mỉa mai: *"It is a miracle that curiosity survives formal education"* ("thật kỳ diệu là giáo dục hình thức chưa bóp chết sự tò mò"), và kể về sự khổ sở của ông ta khi đi học như sau: *"One had to cram all this stuff into one's mind for the examinations, whether one liked it or not. This coercion had such a deterring effect on me that, after I had passed the final examination, I found the consideration of any scientific problems distasteful to me for an entire year."* (Tạm lược dịch: *"Tôi bị nhồi học như nhồi vịt đủ thứ để trả thi dù có thích chúng hay không; sự ép buộc này khiến tôi ngán khoa học đến tận cổ trong suốt một năm sau kỳ thi đó"*).

Sự tò mò thúc đẩy con người ta tìm tòi hiểu biết, làm cho não tiếp thu kiến thức và khám phá thế giới nhanh hơn. Khi tò mò tức là trong đầu đặt ra các câu hỏi, và não "thèm khát" thông tin trả lời các câu hỏi đó, khi "vớ được" câu trả lời sẽ nhập vào đầu rất nhanh vì trong đầu đã "dọn chỗ" sẵn để đón nhận nó. Trẻ con sinh ra có bản năng tò mò, và học rất nhanh. Vấn đề là làm sao giữ được tính tò mò đó mà không đánh mất nó đi khi lớn lên. Theo một số nghiên cứu về giáo dục học – thần kinh học (xem cuốn sách "Insult to Intelligence" của Frank Smith), thì trẻ em trung bình mỗi ngày học được một cách tự nhiên, nhẹ nhàng mấy chục từ mới trong lúc làm các việc khác, nhưng lúc học ở trường thì có khi vất vả một ngày không học nổi vài từ mới. Một trong các lý do mà các nhà giáo dục học đưa ra để giải thích sự học kém hiệu quả ở trường, chính là cách giáo dục hình thức ở trường làm giảm đi sự tò mò của trẻ em. Khi chán học, không có sự tò mò, thì học rất khó.

Như Leonardo da Vinci có từng nói: *"Giống như việc bị bắt ép ăn khi không muốn ăn có thể làm hại sức khỏe, việc bị bắt ép học cái không muốn học cũng có thể làm tổn thương trí nhớ, và không tiếp thu được gì"*. [Tôi đang tìm câu gốc bằng tiếng Ý nhưng chưa tìm được, nên tạm dịch ra từ câu tiếng Anh]. Một trong những cách nhanh nhất để "tiêu diệt" sự tò mò, là dạy hoc kiểu "nhồi vịt" (nhồi nhét một đống thông tin vào đầu học sinh, không kịp tiêu hóa, không biết để làm gì, đến mức học sinh bị "bội thực", sợ học). Ở VN, từ rất nhiều năm nay, tôi thấy hầu như ai cũng kêu là trẻ con bị học quá tải, nhưng hiểu biết thì không hơn gì trẻ em ở các nơi khác học "vui vẻ nhẹ nhàng" hơn. Đây có lẽ là một lỗi lớn của hệ thống giáo dục. Các bậc phụ huynh không nên bắt con mình học đi thêm liên miên đến mức nó phát ngán, phát sợ học. Còn nếu nó thích học cái gì (đặc biệt là những cái không được dạy ở trường, ví dụ như học nặn tượng, học đánh đàn piano, học chế tạo robot, v.v.), thì cứ cho nó đi học thêm nếu nhà có điều kiện.

Làm sao để kích thích sự tò mò của học sinh (và của người lớn)? Đây có lẽ là cả một môn khoa học và nghệ thuật lớn. Bản thân tôi không phải là "chuyên gia" trong lĩnh vực này. Tôi chỉ có thể kể một vài kinh nghiệm cá nhân nhỏ. Có lần tôi đố con tôi (tôi có hai con đang học phổ thông) chứng minh rằng tổng của chuỗi $\sum 1/n^2$ bằng $\pi^2/6$. Tất nhiên bài toán này là quá khó đối với tụi nó. Tuy tụi nó có thể hiểu (một cách trực giác) rằng chuỗi $\sum 1/n^2$ là chuỗi hội tụ, và cậu lớn tính được giá trị gần đúng của chuỗi đó và thấy nó giống giá trị gần đúng của $\pi^2/6$, nhưng để chứng minh đẳng thức chính xác, thì chưa thể làm nổi. Cái đẳng thức này tất nhiên chỉ là một trong số vô vàn những "sự trùng hợp của tự nhiên", và chẳng có công dụng gì trong đời sống thực tế, thế nhưng trông nó "thú vị, kỳ bí". Tụi trẻ tò mò, muốn hiểu được đẳng thức này, bắt tôi giải thích. Tôi nói "muốn chứng minh được, phải biết giải tích", thì tụi nó bắt tôi giải thích các khái niệm đạo hàm, tích phân, v.v. Qua đó tụi nó học một số kiến thức toán hiện đại, "chỉ vì" tò mò. Cái bài toán đố đó nó như là một thứ "củ cà rốt treo trước mặt con lừa, khiến cho con lừa chịu khó đi với hi vọng ăn được cà rốt". Định lý lớn Fermat cũng vậy. Nó không hề có một "công dụng thực tế" gì hết, nhưng nó gây tò mò cho các nhà toán học (và cho cả những người không phải nhà toán học chuyên nghiệp). Việc đi tìm lời giải cho nó đã làm nảy sinh ra những lý thuyết toán hiện đại có công dụng thực tế rất lớn (ví dụ trong mật mã, an toàn thông tin).

Hồi còn bé, tôi có được đọc cuốn sách "Người mặt nạ đen ở nước An giép" (dịch từ tiếng Nga), đọc rất say mê, và qua đó thấy thích giải phương trình. Sách viết về đại số, nhưng viết như là truyện trinh thám, được rất nhiều người thích. Những ai có con em đang học cấp 1 hoặc cấp 2, có thể thử cho con em mình xem cuốn sách đó (nếu nó chưa xem), có khi sẽ giúp cho nó tò mò thích học toán.

Hình học tĩnh và động*

Lê Bá Khánh Trình - Trường Đại học KHTN, ĐHQG Tp HCM

∇

I. Hình học tĩnh hay động

Trong bài này, tôi muốn trình bày một đôi điều riêng tư về môn hình học phổ thông (hay còn được gọi là hình học sơ cấp) dưới hai cách nhìn có phần nào khác biệt nhau. Trước hết, thông dụng hơn cả là cách nhìn của một người quan tâm đến việc giải các bài toán hình học. Cách nhìn này thường yêu cầu xem xét, phân loại các bài toán khác nhau, trình bày kinh nghiệm giải quyết chúng và tìm ra các mối liên quan giữa chúng với các bài toán đã biết. Cách nhìn này thường được quan tâm hàng đầu và thường là nội dung chính trong các bài viết, các tài liệu về toán phổ thông.

Bên cạnh đó, tôi cũng muốn trình bày các vấn đề ở đây dưới một cách nhìn khác, cách nhìn của người muốn tìm tòi, phát hiện ra các bài toán mới, những bài toán không chỉ mới về nội dung mà còn có tác dụng tích cực trong việc rèn luyện tư duy và các kỹ năng cần thiết của người học, đặc biệt là đối với những học sinh giỏi. Đây là công việc đòi hỏi ở chúng ta nhiều công phu không kém gì công việc giải quyết các bài toán. Tuy nhiên, ở nước ta dường như công việc này còn chưa được quan tâm đúng mức. Đây đó, được ưa chuộng hơn cả vẫn là sử dụng các bài toán hay, mẫu mực đã có hoặc tận dụng các đề toán mới được công bố ở các nước khác. Cách làm này khá tiện lợi, hợp lý và hiệu quả nhưng thực tế có 2 nguy cơ:

- Một là, nếu sử dụng các bài toán đã được công bố trong các kỳ thi, việc đánh giá sẽ thiếu công bằng và chính xác.

- Hai là, đáp án của nhiều bài toán do vô tình hay hữu ý, đã ít nhiều bị biến dạng. Điều này có thể làm cho cách trình bày trở nên ngắn gọn hơn nhưng đồng thời cũng đã làm mất đi những ý tưởng trong sáng và tự nhiên ban đầu khi những bài toán đó được xây dựng nên. Vì thế, nếu sử dụng lại các đáp án một cách máy móc, thiếu sự biên tập cần thiết thì rất có thể chúng sẽ có tác dụng tiêu cực đến việc rèn luyện tư duy của người học.

Với những suy nghĩ đó, tôi nghĩ chắc cũng đã đến lúc chúng ta cần tăng cường sự quan tâm và đầu tư nhiều công sức hơn nữa cho công việc "sáng tác" này. Một công việc không dễ dàng nhưng chắc chắn sẽ rất thú vị và bổ ích.

Bây giờ, đã đến lúc đi thẳng vào chủ đề của bài này: Hình học tĩnh hay động? Nếu chỉ nhìn các bài toán mà chúng ta vẫn thường giải quyết hoặc tìm tòi thì hình học vừa tĩnh lại vừa động. Hình học tĩnh trong những bài toán mà ở đó, các yếu tố như điểm, đường thẳng,

---

*Bài viết được trình bày tại "Hội thảo các vấn đề dạy và học Toán ở trường phổ thông" do trường Đại học FPT tổ chức vào tháng 8/2008 đường tròn, ... đều không thay đổi và yêu cầu đặt ra ở đây thường là chứng minh các tính chất hình học hoặc tính toán các đại lượng nào đó trong hình vẽ đã cho. Còn hình học sẽ động trong những bài toán mà ở đó, bên cạnh các yếu tố cố định, không thay đổi có 1 vài yếu tố thay đổi và yêu cầu ở đây thường là tìm quĩ tích, tìm các điểm cố định hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng hình học.

Tuy nhiên, đây chỉ là cái nhìn ban đầu. Trên quan điểm của những người mong muốn đi tìm lời giải cho các bài toán khó và cả trên quan điểm của những người mong muốn phát hiện ra những bài toán hình học mới, theo tôi, hình học luôn luôn cần vận động, vận động ngay cả trong những bài toán mà các yếu tố được cho đều cố định, không đổi. Bởi vì chính cách nhìn, cách tư duy trong các yếu tố của hình vẽ không ngừng biến động, tương tác, thậm chí toàn bộ cả hình vẽ đều không thay đổi sẽ giúp chúng ta tìm ra đúng những lời giải đẹp nhất và phản ánh trọn vẹn nhất bản chất hình học của một bài toán.

II. Động trong biến hình

Một trong những công cụ quan trọng hàng đầu để thực hiện việc biến đổi các yếu tố trong một hình chính là phép biến hình. Không phải ngẫu nhiên mà hiện nay, những lời giải hay nhất của nhiều bài toán hình học cũng như rất nhiều phát hiện hình học thú vị thường nhận được trên cơ sở vận động ý tưởng và kỹ thuật của các phép biến hình.

Thế nhưng để có thể vận dụng chúng một cách hiệu quả, trước hết phải có được 1 nền tảng tương đối vững chắc về biến hình mà cụ thể là phải nắm bắt được 1 vài mệnh đề quan trọng và làm quen được với 1 số tình huống tiêu biểu cho việc thực hiện các động tác biến hình hợp lý.

Vậy đó là những mệnh đề nào, những tình huống nào? Trong khuôn khổ bài này, tôi chỉ xin phép trình bày những gì liên quan đến phép quay, một loại phép biến hình tuy đơn giản nhưng lại có mức độ áp dụng cao và mang lại rất nhiều kết quả phong phú. Tương tự không khác biệt với phép quay bao nhiêu là phép vị tự quay. Thông thường, phép vị tự quay đem lại các kết quả các kết quả tổng quát hơn và nâng cao độ phức tạp của bài toán mà vẫn giữ nguyên ý tưởng ban đầu của phép quay.

Nhưng trước khi phát biểu ra đây các mệnh đề, tình huống cần thiết được nhắc ở trên, xin phép được nói qua một chút cái gọi là "cảm hứng" thúc đẩy tôi viết ra những dòng này. "Cảm hứng" đó nảy sinh từ việc xem xét giáo trình hình học nâng cao lớp 11 vừa được đưa vào giảng dạy từ năm học vừa qua1, trong đó điểm đáng lưu ý nhất là phần các phép biến hình được trình bày đầy đủ hơn và đặc biệt là đã được phân bố ngay vào đầu năm học (trước đây, phần này chỉ được giảng dạy vào cuối năm lớp 10). Rõ ràng, với sự thay đổi này, hội đồng biên soạn sách giáo khoa cho thấy ý định rất nghiêm túc của mình là tăng cường hơn nữa sự chú ý cho phần các phép biến hình và đây thực sự là điều rất nên làm.

Các phép biến hình chính là mảng kiến thức mà ở đó, học sinh có thể làm được với những ý tưởng và những kỹ năng thích hợp nhất cho việc tiếp thu các kiến thức của toán học hiện đại.

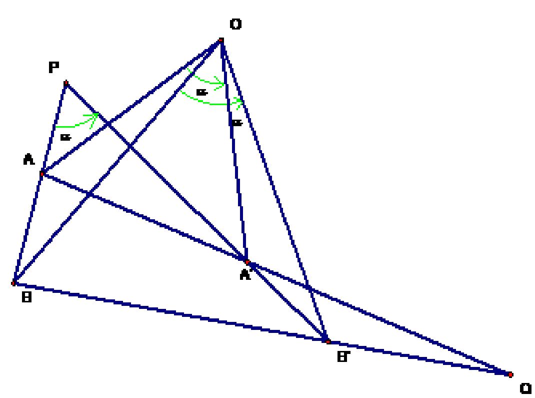
Những ý tưởng và những kỹ năng đó là gì? Đó là ý tưởng ánh xạ rất rõ nét trong cách trình bày và hệ thống các phép biến hình. Đó là ý tưởng phân loại và mô tả đầy đủ các lớp phép biến hình (mà tiêu biểu nhất là các phép dời hình). Và tất nhiên, quan trọng hơn cả là qua việc vận dụng các phép biến hình để giải toán, tư duy hình học của học sinh sẽ được nâng lên ở một cấp độ mới. Thay vì chỉ biết tính toán và so sánh các đại lượng hình học (góc, độ dài, diện tích,...) để từ đó đi đến một chứng minh như trước đây, nay với việc sử dụng các phép biến hình, các em sẽ được tập quan sát những vận động, những tương tác giữa các yếu tố, những cấu trúc tiềm ẩn trong một hình vẽ để rồi từ đó rút ra được những chứng minh, những kết luận sâu sắc, nêu bật toàn diện bản chất của hình vẽ đó.

Những ý định như vậy là rất đúng đắn và chắc cũng đã được hội đồng biên soạn sách giáo khoa đem ra cân nhắc kỹ lưỡng trước khi quyết định việc phân bố lại chương trình sách giáo khoa nâng cao về hình học. Chỉ tiếc 1 điều, theo nhận xét chủ quan của tôi, là nội dung phần trong sách giáo khoa lớp 11 có lẽ vẫn còn chưa đủ để học sinh rèn luyện, nắm bắt và vận dụng công cụ biến hình ở mức độ cần thiết, ít ra là chưa cho phép các em làm quen được với ba ý tưởng quan trọng và bổ ích mà được kể ra ở trên.

Vậy nên cần bổ sung những điều gì? Xin điểm qua một vài điều tôi cho là quan trọng nhất và nhân tiện, đây cũng chính là trả lời cho câu hỏi đặt ra ở đầu phần này. Đó là phát biểu các mệnh đề, các tình huống chính mà bất cứ ai khi học các phép toán biến hình (cụ thể là phép quay) đều phải biết để có thể vận dụng thực sự tốt công cụ này.

1) Trước hết, để giúp cho học sinh hiểu rõ và tự tin hơn khi sử dụng các phép biến hình, nên trang bị cho các em các mệnh đề về tồn tại duy nhất của 1 phép biến hình trong những tình huống đơn giản và thông dụng nhất. Đối với phép quay, mệnh đề sau đáp ứng đủ các yêu cầu đó.

Mệnh đề 1. *Cho 2 đoạn thẳng AB và $A'B'$ sao cho $AB = A'B'$ và $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Lúc đó, tồn tại duy nhất một phép quay R biến tương ứng AB thành $A'B'$.*



Mệnh đề này cho phép ta chỉ cần quan sát thấy có hai đoạn thẳng bằng nhau là có thể liên tưởng ngay đến một phép quay và sẵn sàng vận dụng nó nếu có thêm các điều kiện thích hợp chứ không phải chờ đến khi có được 2 tam giác, hai hình bằng nhau mới bắt đầu nghĩ đến phép quay. Ngoài ra, mệnh đề này còn là cơ sở để mô tả đầy đủ các phép dời hình (sẽ đề cập ở dưới). Tuy nhiên, nó chỉ có ý nghĩa giúp ta làm quen với tình huống. Muốn mang lại hiệu quả thực sự phải bổ sung thêm một ít về việc xác định phép quay tồn tại nói trên.

Mệnh đề 1'.(bổ sung) *Phép quay R có góc quay $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ và tâm O đồng thời nằm trên các trung trực của AA', BB' cũng như các cung tròn (đơn) chứa các điểm nhìn các đoạn AA', BB' dưới 1 góc có hướng bằng α.*

Bổ sung này cho ta một cái nhìn khá toàn diện về tình huống đang xét (xem hình vẽ); nhưng để có được sự quan sát đầy đặn và sâu sắc hơn nữa, cần trang bị thêm:

Mệnh đề 2.

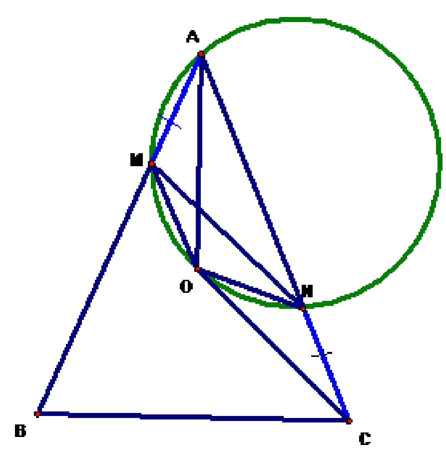
a. Giả sử các đường thẳng AB và $A'B'$ cắt nhau tại điểm P, lúc đó các tứ giác $AA'OP$ và $BB'OP$ nội tiếp.

b. Giả sử các đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại điểm Q, lúc đó các tứ giác $ABOQ$ và $A'B'OQ$ nội tiếp

Các mệnh đề này rõ ràng là chứng minh không khó (nên xin bỏ qua ở đây). Còn lợi ích mà chúng có thể mang lại thì khá lại phong phú. Xin bắt đầu bằng một bài tập khá quen thuộc trong đó việc vận dụng ý tưởng biến hình là rất tự nhiên và đơn giản.

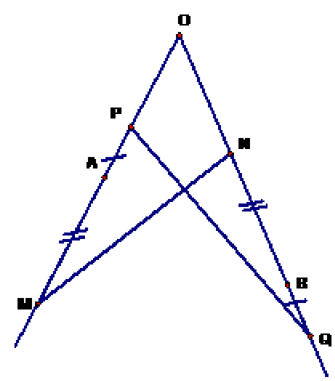
Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = CN$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định khác A.*

Để giải, ta xét phép quay R biến đoạn thẳng AM tương ứng thành đoạn thẳng CN. Tâm quay O theo mệnh đề 1 là giao điểm của trung trực AC và cung tròn quĩ tích những điểm K sao cho $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$ nên tâm quay O cố định. Cuối cùng, do AM và CN cắt nhau tại A nên theo mệnh đề 2, tứ giác $MNAO$ nội tiếp. Vậy đường tròn đi qua tam giác AMN đi qua điểm O cố định.



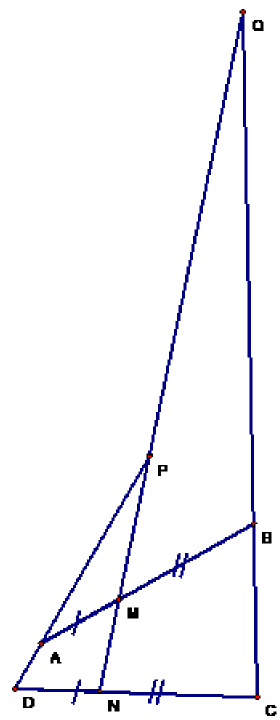
Bài tập này rất thích hợp làm quen với các ứng dụng của phép quay. Nó chỉ có 1 khiếm khuyết là nếu tam giác ABC cân thì điểm O cần tìm chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó, nhiều học sinh có thể mày mò, dự đoán và chứng minh kết quả trên mà không cần sử dụng phép quay. Thực ra, để khắc phục điều này, có thể xem tam giác ABC không cân và còn tổng quát hơn là bài tập sau mà cách giải không có gì thay đổi.

Ví dụ 2. *Trên 2 tia Ox và Oy của góc Oxy, cho 2 điểm A, B. M, N là 2 điểm thay đổi trên Ox, Oy sao cho $AM = BN$ (M khác phía O đối với điểm A, còn N cùng phía O đối với điểm B). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.*



Nếu bổ sung vào bài tập này thêm một vài yếu tố với những mối quan hệ tương tự (Chẳng hạn lấy thêm các điểm P, Q trên Ox, Oy cũng với tính chất $AP = BQ$ để phép quay được xét cũng biến P thành Q) và thay đổi chút ít cách phát biểu cũng như vận dụng tính chất còn lại (tính chất b) của mệnh đề 2. Ta nhận được:

Bài toán 1. *Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$ và các điểm M, N trên AB, CD sao cho $AM = DN$. Giả sử MN cắt AD và BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng tồn tại một điểm O có cùng phương tích với tất cả bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAM, PDN, QBM, QCN.*

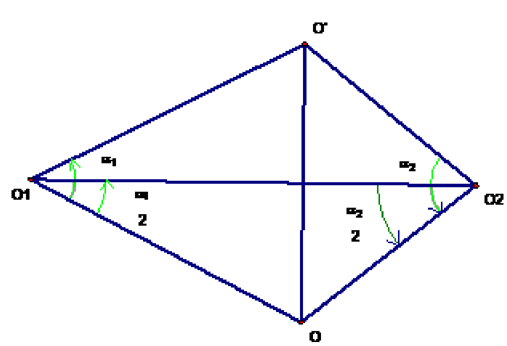


Để giải, xem O là tâm của phép quay R biến AB tương ứng thành DC và M thành N. Theo mệnh đề 2 (tính chất b), các tứ giác $AMOP, DNOP, BMOQ, CNOQ$ đều nội tiếp. Vậy O nằm trên bốn đường tròn nội tiếp các tam giác PAM, PDN, QBM, QCN nên O có cùng phương tích đối với các đường tròn này.

2) Điều cần bổ sung thứ hai liên quan đến bản chất ánh xạ của các phép biến hình. Một khi đã định nghĩa chúng như các ánh xạ thì lẽ tự nhiên cũng cần phải đề cập đến tích của hai phép biến hình. Vậy tích của 2 phép quay là gì?

Mệnh đề 3. *Cho hai phép quay $R(O_1;\alpha_1), R(O_2;\alpha_2)$. Nếu $\alpha_1+\alpha_2 \neq 2k\pi$ thì tích $R = R_2 \circ R_1$ cũng là một phép quay với góc quay $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$. Tâm O của phép quay này được xác định từ điều kiện sau:*

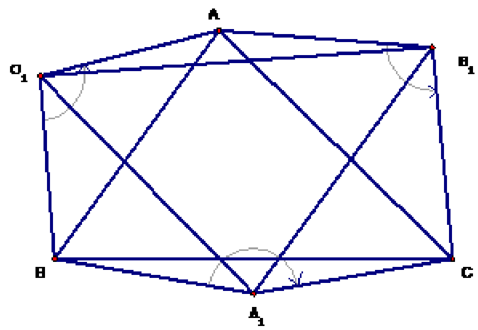
$$(\overrightarrow{O_1O};\overrightarrow{O_1O_2}) = \frac{\alpha_1}{2};\ (\overrightarrow{O_2O_1};\overrightarrow{O_2O}) = \frac{\alpha_2}{2}$$



Thật vậy việc R là một phép quay có thể suy ra ngay từ mệnh đề 1. Còn tâm O chính là điểm bất động duy nhất qua tích $R = R_2 \circ R_1$ nên nếu chọn O như trên và lấy O' đối xứng với O_1O_2 thì ta có $R_1(O) = O'$ và $R_2(O') = O$. Suy ra $R(O) = O$. Vậy điểm O xác định với điều kiện trên chính là tâm quay.

Bài tập sau có thể xem là ứng dụng mẫu mực của việc vận dụng tích 2 phép quay:

Ví dụ 3. *Bên ngoài tam giác ABC và trên các cạnh dựng các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 cân lần lượt tại A_1, B_1, C_1 với góc $BA_1C = 160°$ và các góc $\angle CB_1A = \angle AC_1B = 100°$. Tính góc $\angle B_1A_1C_1$.*



Bài tập này được giải hết sức nhanh gọn và sáng sủa từ mệnh đề trên. Trước hết, nhận xét rằng:

$$R(A_1; -160°) = R(B_1; 100°) \circ R(C_1; 100°).$$

Theo tính chất tâm của tích hai phép quay thì:

$$(\overrightarrow{C_1A_1}; \overrightarrow{C_1B_1}) = (\overrightarrow{B_1C_1}; \overrightarrow{B_1A_1}) = 100^0/2 = 50^0$$

Vì vậy $\angle B_1A_1C_1 = 80°$.

Tất nhiên, với đề bài như trên, một số học sinh vẫn có thể đi "tính được" góc $\angle B_1A_1C_1$ với một khối lượng tính toán hết sức cồng kềnh và với kỹ thuật tính toán đáng nể. Nếu bây giờ biến tấu bài tập này đi một chút bằng cách cất đi điểm "mấu chốt" A_1 và gắn thêm tính di động cho các điểm B_1, C_1 thì có thể nhận được phương án sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, còn A thay đổi trên (O). Bên ngoài tam giác, trên các cạnh AB, AC dựng các tam giác ABC_1, ACB_1 lần lượt tại C_1, B_1 với $\angle AC_1B = \angle AB_1C = 100°$. Chứng minh rằng trung trực của B_1C_1 luôn đi qua một điểm cố định.*

Rõ ràng điểm cố định cần tìm chính là điểm A_1 trong bài tập trên nay đã được "dấu" đi. Và chính vị trí không dễ đoán của A_1 đã làm cho bài toán trở nên vô cùng khó khăn cho những ai chưa nắm được ý tưởng về tích của 2 phép quay.

3) Để kết thúc phần này, xin nêu ra điều cần bổ sung cuối cùng để cho nội dung về phép biến hình được cân đối, hoàn chỉnh và đem lại hiệu quả học tập cao hơn. Chúng ta biết rằng

lớp các phép biến hình được trình bày đầy đủ nhất chính là lớp các phép dời hình có thể được mô tả rất trọn vẹn thông qua các phép dời hình cơ sở là tịnh tiến, quay và đối xứng trục. Vậy nên chăng sau khi đã học xong các phép biến hình cụ thể này, chúng ta sẽ khái quát bằng khái niện các phép dời hình và kết thúc bằng một mệnh đề mô tả đầy đủ lớp các phép dời hình để làm sáng tỏ bản chất khá đơn giản của chúng. Đây thường là sơ đồ mẫu mực khi trình bày một lớp về một lớp các phép biến đổi nào đó trong các lĩnh vực khác của toán học.

Mệnh đề mô tả các phép dời hình ở đây rất gọn, rất đơn giản và có thể suy ra trực tiếp từ mệnh đề 1 ở trên. Nhưng trước khi phát biểu nó, theo tôi nên phân loại các phép dời hình thành các phép dời hình thuận (là các phép dời hình bảo toàn định hướng) và các phép dời hình ngược (thay đổi định hướng). Điều này cũng gần giống như việc phân biệt hai tam giác bằng nhau thuận và bằng nhau nghịch mà học sinh đã rất quen thuộc. Nên tôi nghĩ rằng việc phân loại các phép dời hình như vậy sẽ không gây ra bất cứ khó khăn nào mà trái lại, nó còn có thể giúp học sinh hiểu và cảm nhận rõ ràng hơn về định hướng (cụ thể là chiều "quay" của 1 tam giác) trong các phép biến hình.

Đối với các phép dời hình thuận (quan trọng nhất và được xem xét kỹ lưỡng nhất) ta có sự mô tả đầy đủ sau:

Mệnh đề 4. *Một phép dời hình thuận chỉ có thể là một phép tịnh tiến hoặc một phép quay*

Đối với các phép dời hình nghịch thì khó khăn hơn 1 chút:

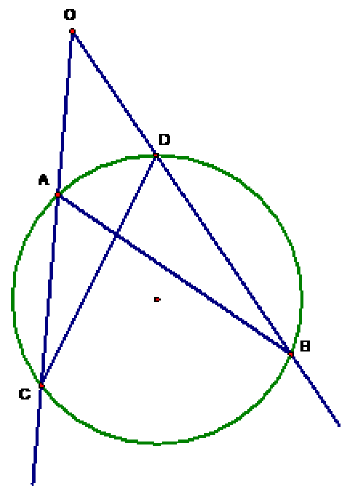
Mệnh đề 5. *Một phép dời hình nghịch có thể được biểu diễn như là tích một phép tịnh tiến với một phép đối xứng trục.*

Trong phần bài tập của bộ sách giáo khoa Hình Học nâng cao lớp 11, dạng tích này cũng được xét đến và được gọi là phép "đối xứng trượt". Theo tôi, mệnh đề 5 có thể không nhất thiết phải trình bày hoặc chỉ cần nhắc qua và đưa ra phần bài tập. Nhưng mệnh đề 4 thì nên phát biểu như một lời đúc kết của phần các phép dời hình để sao cho khi học xong phần này, học sinh có cảm giác nắm bắt trọn vẹn, rõ ràng, không còn chút gì mơ hồ về các phép dời hình.

III. Động trong mô hình.

Bên cạnh việc vận dụng các phép biến hình, trong quá trình giải quyết hoặc tìm ra các bài toán hình học, những học sinh nhạy bén có thể phát hiện ra những mô hình quen thuộc, những bài toán đã biết trước được lồng trong hình vẽ của mình hoặc đã được thay đổi khéo léo để trở thành những bài toán mới. Điều này cho thấy rằng nếu chúng ta chịu khó biến hoá linh hoạt với các mô hình dù là đã rất quen biết thì vẫn có thể có được những phát hiện mới vừa toàn diện, vừa sâu sắc về một vấn đề nào đó đang xem xét.

Xin lấy một ví dụ cụ thể về sử dụng phép biến đổi đối song để thu thập được một vài bài toán mới. Chúng ta biết rằng nếu cho một góc Oxy thì 2 đường thẳng d_1 và d_2 được gọi là đối song nếu ảnh d_1' của d_1 của phép đối xứng qua đường phân giác trong d của góc Oxy cùng phương với d_2. Rõ ràng phép biến đổi đối song biến 1 lớp các đường thẳng cùng phương với d_1 thành một lớp các đường thẳng cùng phương với d_2. (Mỗi đường thẳng trong lớp d_1 đều đối song với mỗi đường thẳng của lớp d_2).

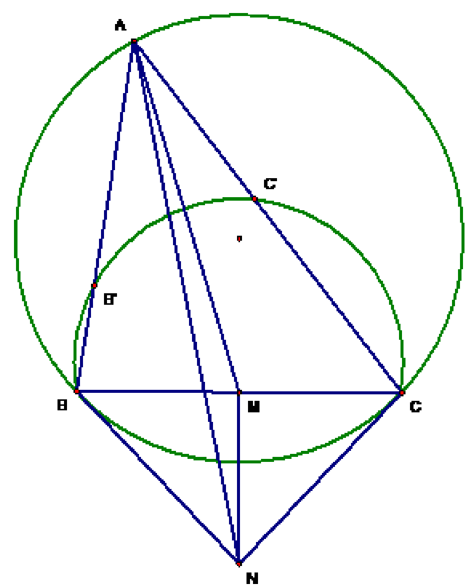


Điều kiện đối song thường được sử dụng rộng rãi dưới dạng sau:

Cho A, C thuộc Ox và B, D thuộc Oy, lúc đó AB đối song với C, D khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

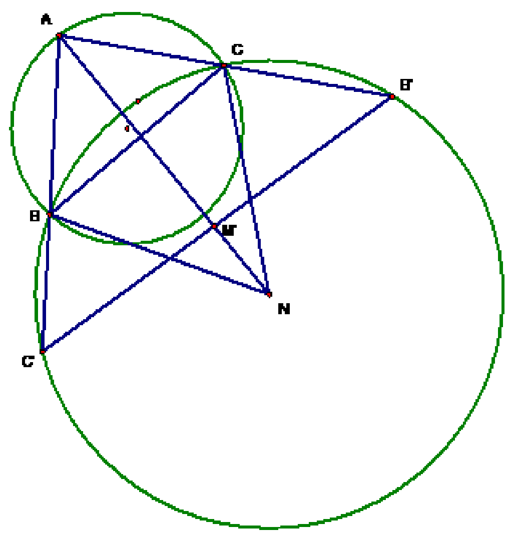
Bây giờ ta chọn một mô hình quen biết để thực hiện động tác đối song. Kết quả thu được sẽ thú vị và có phần nào "bất ngờ" nếu mô hình này cũng liên quan đến hình đối xứng qua đường phân giác trong một mô hình như vậy có thể là bài tập như sau:

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Ký hiệu N là giao điểm của các tiếp tuyến tại B và C của (O). Lúc đó, AN đối xứng với trung tuyến AM qua phân giác góc trong góc A (hay AN đối song với AM).*



Đây là một tính chất hình học khá quen thuộc trong một tam giác và ta hãy thực hiện một phép biến đổi đối song cho nó. Trước hết, ta dựng đường thẳng $B'C'$ đối song với BC bằng cách vẽ một đường tròn qua B, C và cho cắt AB, AC tại C', B'. Rõ ràng theo cấu trúc đối song, nếu ký hiệu M', N' trong tam giác $AB'C'$ là các điểm có vai trò tương ứng với M, N trong tam giác ABC thì AM' cùng phương với AN còn AN' cùng phương với AM tức là A, M', N cũng như A, N', M đều thẳng hàng và ta có được:

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có A thay đổi còn B, C cố định. Một đường tròn thay đổi đi qua B, C và cắt AB, AC tại C', B'. Chứng minh rằng trung tuyến AM' của tam giác $AB'C'$ luôn đi qua 1 điểm cố định.*



Còn nếu thay đổi hình vẽ đi một ít nhằm "dấu" tam giác ABC là cách làm phép đối song khá "lộ liễu" ở trên, ta có thể phát biểu lại bài toán dưới dạng sau:

Bài toán 3'. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm B, C và A là một điểm thay đổi trên (O). AB, AC cắt đường tròn (O') lần lượt tại C', B'. Gọi M' là trung điểm $B'C'$. Chứng minh rằng AM' luôn đi qua một điểm cố định.

Rõ ràng là AM' đi qua giao điểm N của các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C. Cách phát biểu này làm cho bài toán trở nên thanh thoát hơn đồng thời cũng khó hơn một chút, nhưng nếu ta thử nhìn nó với con mắt chuyển động đối song thì quả thực là không có gì phức tạp cả.

IV. Lời kết

Thay cho lời kết về sự cần thiết của việc quan sát các đối tượng hình học dưới con mắt vận động của phép biến hình hoặc của phép một mô hình đã quen biết, xin phép được nói đôi điều về bài toán sau: Bài toán số 2 của kỳ thi Olympic Toán quốc tế (IMO) lần thứ 48 được tổ chức tại Việt Nam năm 2007.

Bài toán 4. Cho 5 điểm A, B, C, D, E sao cho $ABCD$ là hình bình hành và $BCED$ nội tiếp. l là một đường thẳng đi qua A, cắt cạnh BC và đường thẳng DC tại F, G. Giả sử $EF = EG = EC$, chứng minh rằng l là phân giác góc $\angle DAB$.

Cách phát biểu này có phần nào hơi "rối" và có thể làm cho thí sinh ít nhiều lúng túng trong việc nắm bắt yêu cầu và thực chất của bài toán sẽ là rõ ràng và "dễ chịu" hơn nếu phát biểu lại:

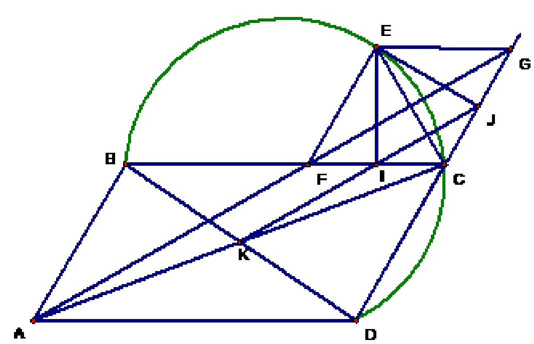
Cho hình bình hành $ABCD$, l là một đường thẳng đi qua A, cắt cạnh BC và đường thẳng DC tại F, G. Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CFG. Chứng minh rằng nếu $BCED$ nội tiếp thì l là phân giác góc DAB.

Dưới con mắt xây dựng một bài toán thì đây là là một bài toán đảo. Nó được đặt ra từ bài toán thuận khá nhẹ nhàng như sau:

Nếu l là phân giác góc DAB thì tứ giác BCED nội tiếp

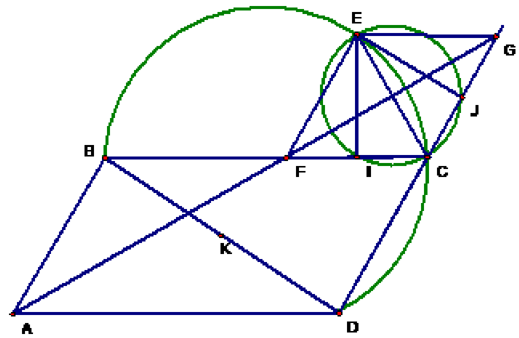
Vì vậy, ý tưởng đầu tiên là đi chứng minh đảo (và đây cũng là ý của đáp án). Tuy nhiên, việc so sánh góc như ở bài toán thuận sẽ không mang lại kết quả, vì thế, cần chuyển sang suy luận kiểu phản chứng: giả sử l không phải là phân giác (tức là tam giác CFG không cân, thì sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Cách giải này ít được các thí sinh làm theo và làm đúng). Nó cũng không đẹp và không làm rõ được bản chất của hình vẽ. Trong khá nhiều cách giải được tìm ra, hai cách sau đây là hay nhất và điều lý thú là một cách thí sử dụng lối nắm bắt mô hình trong bài toán (cách giải 1), còn cách kia lại dựa vào phép biến hình để xử lý vấn đề (cách giải 2).

Cách giải 1. (Mô hình đường thẳng Simson.)



Hạ EI, EJ vuông góc với CF, CG nên IJ đi qua trung điểm K của AC và cũng là trung điểm BD. Mặt khác, do tứ giác $EBDG$ nội tiếp nên IJ chính là đường thẳng Simson của điểm E đối với tam giác BDC. Suy ra EK vuông góc với BD nên tam giác EBD cân tại E. Từ đây không khó suy ra tam giác CFG cân tại C và điều phải chứng minh.

Cách giải 2. (Phép biến hình)



Ở đây sẽ sử dụng phép vị tự quay; so với phép quay, nó cũng không khác biệt lắm và các kết quả như mệnh đề 1, 2 ở phần II đều có thể mở rộng tương tự.

Xét phép vị tự quay S biến đoạn BC thành đoạn DG. Do $FB/FC = CD/CA$ nên S biến F thành C. Suy ra S biến trung điểm I của FC thành trung điểm J của CG. Theo mệnh đề tương tự với mệnh đề 2, tâm O của S phải đồng thời thuộc đường tròn nội tiếp các tam giác CBD và CIJ nên O trùng với điểm E. Suy ra tam giác EBD đồng dạng với tam giác EIJ nên tam giác EBD cân tại E và bài toán được giải quyết.

Tập hợp trù mật và ứng dụng

Phạm Hy Hiếu - H.s trường PTNK ĐHQG Tp HCM khoá 07-10

∇

I - Các khái niệm và định nghĩa

Trù mật là một khái niệm topo. Do vậy, để định nghĩa nó một cách đầy đủ, ta sẽ phải hiểu định nghĩa của một một số khái niệm cao cấp hơn. Tuy nhiên, bài viết này chỉ khai thác một khía cạnh rất nhỏ và rất sơ cấp của khái niệm trù mật, chủ yếu là ứng dụng các tư tưởng ấy vào việc giải một số bài toán sơ cấp nên các khái niệm được đưa ra sau đây chỉ có ý nghĩa nền tảng, không cần phải hiểu một cách sâu sắc.

Định nghĩa 1.1. *Không gian topo là một cặp (X, T) trong đó X là một tập hợp (có thể là tập hữu hạn hay vô hạn), còn $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ là một họ các tập con của X (cũng có thể là họ hữu hạn hay vô hạn) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1. $\emptyset \in T, X \in T$.
2. *Hợp của một họ bất kỳ các tập thuộc T thì cũng thuộc T. Tức là:*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \le |T|,\ \forall X_1, X_2, \dots, X_k \in T:\ X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \in T$$
3. *Giao của hai tập hợp bất kỳ trong T cũng thuộc T. Tức là:*
$$\forall X_1, X_2 \in T:\ X_1 \cap X_2 \in T$$

T được gọi là một topo trên X. Các tập hợp con của X nằm trong T được gọi là những tập mở, còn phần bù của chúng trong X được gọi là những tập đóng của X. Các phần tử của X được gọi là các điểm của không gian topo.

Ví dụ. $X = \{1, 2, 3\}, T = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ cho ta X, T là một không gian topo hữu hạn. Còn nếu $X = (\mathbb{N}, T) = \{\emptyset, \mathcal{P}, \mathcal{H}, \mathbb{N}\}$, trong đó $\mathcal{P}$ là tập hợp các số nguyên tố, $\mathcal{H}$ là tập hợp các hợp số thì (X, T) lại cho ta ví dụ về một không gian topo vô hạn.

Định nghĩa 1.2. *Cho X là một tập hợp. Ánh xạ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ được gọi là một hàm khoảng cách nếu nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$..
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(tính chất đối xứng)*
3. $d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z),\ \forall x, y, z \in X$ *(bất đẳng thức tam giác).*

Định nghĩa 1.3. *Không gian metric là một cặp (X, d) trong đó X là một tập hợp (hữu hạn hay vô hạn) còn d là một hàm khoảng cách xác định trên X. d được gọi là metric của tập X. Trong nhiều trường hợp, khi định nghĩa về khoảng cách đã rõ ràng, người ta chỉ cần gọi X là không gian metric.*

Ví dụ. Không gian Eulicde ba chiều $\mathbb{R}^3$ là một không gian metric với metric của nó là khoảng cách hình học thông thường.

Không gian topo và không gian metric đều là những khái niệm rất tổng quát và trừu tượng. Từ định nghĩa trên, ta suy ra rằng mỗi tập hợp X đều có thể có những topo và những metric khác nhau. Khi đó, mỗi cặp gồm X và một topo T hay một hàm khoảng cách T lại cho ta các không gian topo hay không gian metric khác nhau.

Bây giờ ta đến với khái niệm trù mật.

Định nghĩa 1.4. *Cho B là tập con của một không gian topo. Tập con A của B được gọi là trù mật trong B nếu $B \subset \overline{A}$, trong đó $\overline{A}$ là bao đóng của A. Hơn nữa, nếu A trù mật trong không gian topo X thì nó được gọi là trù mật khắp nơi.*

Nói một cách nôm na, ta hiểu rằng A trù mật trong B nếu như $A \subset B$ và A "kiểm soát" mọi phần tử của B. Trong bài viết này, ta sẽ chỉ quan tâm đến sự trù mật trong những không gian metric. Khi đó, sự trù mật được định nghĩa một cách trực quan hơn như sau:

Định nghĩa 1.4.1. *Cho B là tập con của một không gian metric X mà trên đó xác định hàm khoảng cách d. Tập con A của B được gọi trù mật trong B nếu như nó thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall b \in B, \exists a \in A: \; d(a, b) < \varepsilon$$

Ví dụ. *Chứng minh rằng tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là trù mật trong $\mathbb{R}$.*

Chứng minh

Xét một số thực θ nào đó. Theo định nghĩa trên, ta phải chứng minh rằng:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}: \; |r - \theta| < \varepsilon$$

Thật vậy, nếu $\theta \in \mathbb{Q}$ thì ta chỉ cần chọn $r = \theta$. Ngược lại, nếu $\theta \notin \mathbb{Q}$, xét biểu diễn thập phân vô hạn không tuần hoàn của $\theta = \overline{a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots a_\infty}$. Ta thấy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}: \varepsilon > 10^{-n}$$

Khi đó, chọn $r = \overline{a_0.a_1a_2\ldots a_na_{n+1}} \in \mathbb{Q}$, ta thấy ngay $|r - \theta| < 10^{-n} < \varepsilon$.

Vậy đã có điều phải chứng minh.

II - Các bài toán ứng dụng

Sau đây ta sẽ trình bày một số bài toán ứng dụng trực tiếp sự trù mật hoặc các tư tưởng khác về sự trù mật.

Bài toán 2.1. *Cho* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *và* $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} b_m = +\infty$ *và* $\lim\limits_{m\to\infty} (b_{m+1} - b_m) = 0$

Chứng minh rằng: $\{a_n - b_m \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$ *là trù mật trong* $\mathbb{R}$.

Lời giải

Theo định nghĩa, ta cần phải chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\, \exists m, n \in \mathbb{N}^* : |a_m - b_n - r| < \varepsilon$$

Thật vậy, xét $\theta \in \mathbb{R}$ và $\varepsilon > 0$ nào đó. Do:

$$\lim_{m\to\infty} (b_{m+1} - b_m) = 0$$

nên $\exists N, \forall n \geq N, |b_{n+1} - b_n| < \varepsilon$.

Mặt khác, lại vì:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m = +\infty$$

nên $\exists k :\ a_k - b_N > 0$.

Xét dãy số: $u_n = a_k - b_{N+n}$, ta có:

$$\begin{cases} |u_{n+1} - u_n| = |b_{N+n+1} - b_{N+n}| < \varepsilon \\ u_0 \geq 0 \\ \lim\limits_{m\to\infty} b_m = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \end{cases}$$

Suy ra ngay rằng phải tồn tại m sao cho $\theta - \varepsilon < u_m < \theta + \varepsilon$ hay $|a_k - b_{N+m}| < \varepsilon$.

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.2. *Cho* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là dãy số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:*

$$0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng tập hợp S *là trù mật trong* $(0; ; 1)$ *với:*

$$S = \left\{ \frac{a_k}{a_l} \mid k, l \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Lời giải

Lần này ta sẽ chứng minh nhận định sau:

$$\forall 0 < x < y < 1, \exists k, l \in \mathbb{N}^* : x < \frac{a_k}{a_l} < y$$

Thật vậy, từ giả thiết suy ra $\{a_n\}$ là dãy số nguyên dương tăng nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Suy ra rằng $\forall x, y > 0, \exists l \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a_1}{a_l} < x \ v \frac{1}{\sqrt{a_l}} < y - x$$

Xét các phần tử của dãy số hữu hạn:

$$\frac{a_1}{a_l} < \frac{a_2}{a_l} < \cdots < \frac{a_{l-1}}{a_l} < \frac{a_l}{a_l} = 1$$

Khi đó, $\forall k = 1, 2, \ldots, l-1$ ta đều có:

$$\frac{a_{k+1}}{a_l} - \frac{a_k}{a_l} < \frac{\sqrt{a_k}}{a_l} < \frac{\sqrt{a_l}}{a_l} = \frac{1}{\sqrt{a_l}} < y - x$$

Hơn nữa $\frac{a_1}{a_l} < x$ nên phải tồn tại k sao cho: $x < \frac{a_k}{a_l} < y$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 2.3. (Định lý Kronecker) *Cho θ là một số vô tỉ. Kí hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Chứng minh rằng: $\{\{n\theta\} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ là trù mật trong $(0, 1)$.*

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $\theta > 0$.

Xét $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có nhận xét:

$$\{n\theta + m\} = \begin{cases} \{n\theta\} \text{ nếu } n\theta\,(n\theta + m) > 0 \\ \{-n\theta\} \text{ nếu } n\theta\,(n\theta + m) < 0 \end{cases}$$

nên ta chỉ cần chứng minh $\{\{n\theta + m\}\,|m, n \in \mathbb{Z}\}$ trù mật trong $(0, 1)$.

Xét một khoảng $\Delta = (a, b) \subset (0, 1)$, ta sẽ chứng minh rằng $\exists m, n \in \mathbb{Z}$: $\{n\theta + m\} \in (a, b)$.

Thật vậy, ta chia $(0; ; 1)$ thành một số hữu hạn các nửa khoảng $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n_0}$ sao cho độ dài của mỗi nửa khoảng đều nhỏ hơn một số thực dương ε mà ta sẽ lựa chọn về sau.

Khi đó, vì ta có thể tìm được vô hạn các giá trị m, n sao cho $n\theta + m \in (0, 1)$ mà lại chỉ có hữu hạn các khoảng nên theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại các số nguyên dương m_1, m_2, n_1, n_2 sao cho các số $n_1\theta + m_1$ và $n_2\theta + m_2$ thuộc cùng một khoảng Δ_k nào đó. Ta có:

$$0 < (n_1 - n_2)\,\theta + (m_1 - m_2) < \varepsilon$$

Bây giờ chọn ε thỏa mãn:

$$\varepsilon < \frac{b-a}{2}$$

Ta có:

$$\frac{b-a}{(n_1-n_2)\,\theta + (m_1-m_2)} > \frac{b-a}{\varepsilon} > 2$$

Do đó, sẽ tồn tại một số nguyên k nằm giữa $\dfrac{a}{(n_1-n_2)\,\theta + (m_1-m_2)}$ và $\dfrac{b}{(n_1-n_2)\,\theta + (m_1-m_2)}$

Tức là:

$$a < k\,(n_1-n_2)\,\theta + k\,(m_1-m_2) < b$$

Bây giờ chọn $N = k\,(n_1-n_2)$ và $M = k\,(m_1-m_2)$ thì số $N\theta + M \in (a,b)$.

Vậy ta kết luận $\{\{n\theta+m\}\,|m,n\in\mathbb{Z}\}$ trù mật trong $(0,1)$.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán được nêu ra tiếp theo là một ứng dụng của định lý Kronecker gắn liền với một câu chuyện buồn của tôi, và cũng là một vấn đề khá quen thuộc đối với các học sinh Việt Nam từng tham dự kỳ thi giải toán trên máy tính bỏ túi Casio. Bản thân tôi từng 2 lần dự kì thi này (và đều trượt ngay từ vòng loại) vì một dạng bài toán như sau: *Hãy tìm một lũy thừa của* 2009 *mà bốn chữ số mở đầu của nó trong hệ thập phân cũng là* 2009. Khi còn ôn tập thi vòng loại, cách làm chúng tôi được dạy để làm bài toán này là mò mẫm với các lũy thừa lớn 2009, do máy tính luôn hiển thị các chữ số đầu tiên. Tôi không chấp nhận sự mò mẫm ấy nên đã hỏi lại thầy của mình: *"Thưa thầy, chắc gì đã có một số như vậy?"* (Nếu yêu cầu là "tận cùng bằng 2009" thì với kiến thức về đồng dư, có lẽ đây đã trở thành bài toán quen thuộc với các bạn). Nhưng bây giờ, với định lý Kronecker, tôi sẽ khẳng định niềm tin của các bạn vào việc ấy.

Bài toán 2.4. *Cho $a \in \mathbb{N}^*$, không phải là một lũy thừa của* 10 *và $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là các chữ số. Chứng minh rằng luôn tồn tại k sao cho a^k mở đầu bằng $\overline{d_1 d_2 \ldots d_n}$.*

Lời giải

Trước hết ta có nhận xét: số chữ số của m trong hệ thập phân chính là $\lfloor \log m\ \rfloor$.

Áp dụng nhận xét, ta thấy điều kiện cần và đủ để a^k bắt đầu bởi $\overline{d_1 d_2 \ldots d_n}$ là:

$$a^k - 10^{\lfloor k\log a\ \rfloor - n}.\overline{d_1 d_2 \ldots d_n} < 10^{\lfloor k\log a\ \rfloor - n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^k}{10^{\lfloor k\log a\rfloor}} < \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{\overline{d_1 d_2 \ldots d_n}}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow k\log a\ \ - \lfloor k\log a\rfloor < \log\left(\frac{1}{10^{n-1}} + \frac{\overline{d_1 d_2 \ldots d_n}}{10^n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \{k\log a\} < \log\left(\frac{1}{10^{n-1}} + \frac{\overline{d_1d_2\ldots d_n}}{10^n}\right) = \varepsilon$$

Áp dụng định lý Kronecker với $\theta = \log a$ (là số vô tỉ do giả thiết a không phải là lũy thừa của 10), ta thấy $\{k\log a \ \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ trù mật trong $(0,1)$ nên:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}^* : \{k\log a\ \} < \varepsilon$$

Bài toán được chứng minh.

Qua các bài toán nêu trên, ta bắt gặp tư tưởng của việc giải quyết các bài toán liên quan đến trù mật là tư tưởng nhảy bước. Đây là một lối suy nghĩ khá Tổ Hợp và có thể áp dụng vào trong những bài toán trên các tập hữu hạn và rời rạc chứ không chỉ có lớp các bài toán liên quan đến các tập hợp vô hạn như đã nêu trên. Điển hình là bài toán sau đây:

Bài toán 2.6. (Problem 2, bảng A, VMO 1997) *Cho số tự nhiên $n > 1$ và không chia hết cho* 1997. *Xét 2 dãy số $\{a_i\}$ và $\{b_j\}$ được xác định như sau:*

$$a_i = i + \frac{ni}{1997} \text{ vi } i = 1, 2, 3, \ldots, 1996$$

$$b_j = j + \frac{1997j}{n} \text{ vi } j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Xét tất cả các số của hai dãy số trên viết theo thứ tự không giảm, ta được dãy số:

$$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{1995+n}$$

Chứng minh rằng: $c_{k+1} - c_k < 2$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, 1994 + n$.

Lời giải

Ta có:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{1997} = n + 1997$$

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n = n + 1997$$

Xét 2 trường hợp:

1. Nếu $n < 1997$ thì:

$$a_{i+1} - a_i = 1 + \frac{n}{1997} < 2$$

Hơn nữa với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n + 1995$ thì tồn tại duy nhất j sao cho $a_j \leq c_k < a_{j+1}$ và $0 \leq j \leq n-1$. Khi đó, $c_{k+1} \leq a_{j+1}$ và vì thế $c_{k+1} - c_k \leq a_{j+1} - a_j \leq 2$

1. Nếu $n > 1997$ thì:

$$b_{i+1} - b_i = 1 + \frac{1997}{n} < 2$$

Hơn nữa với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n+1995$ thì tồn tại duy nhất j sao cho $b_j \leq c_k < b_{j+1}$ và $0 \leq j \leq 1996$. Khi đó, $c_{k+1} \leq b_{j+1}$ và vì thế $c_{k+1} - c_k \leq b_{j+1} - b_j \leq 2$

Tóm lại, ta luôn có $c_{k+1} - c_k \leq 2$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n+1995$.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 2.7. (Problem 3, IMO 2009) *Cho $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: hai dãy số: $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots, s_{s_n}, \ldots$ và $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots, s_{s_n+1}, \ldots$ đều là các cấp số cộng. Chứng minh rằng bản thân $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ cũng là một cấp số cộng.*

Lời giải

Gọi d và d' tương ứng là công sai của hai cấp số cộng $\{s_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{s_{s_n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

Ta xét 2 trường hợp:

1. $d \neq d'$:

Khi đó, ta giả sử như đã sắp xếp các hạng của $\{s_{s_n}\}$ lên trục số nguyên dương, cách đều nhau các khoảng bằng d, sau đó, bắt đầu từ s_{s_1+1}, ta lại điền các số hạng của dãy $\{s_{s_n+1}\}$ lên trục số, cách đều nhau các khoảng bằng d'. Ta kí hiệu $\overline{s_{s_n+1}}$ là khoảng cách từ s_{s_n+1} đến số hạng gần nhất đứng trước trong dãy số $\{s_{s_k}\}$. Thế thì do $d \neq d'$, nên theo định lý số dư Trung Hoa thì tồn tại vô hạn n sao cho $\overline{s_{s_n+1}} = 0$, hay 2 cấp số cộng đang xét có vô hạn điểm trùng nhau.

Mặt khác, giả sử $u, v \in \mathbb{N}^*$ sao cho $s_{s_u} = s_{s_v+1}$, thế thì do $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt nên $s_u = s_v + 1$, suy ra $u = v + 1$, tức là $s_{v+1} = s_v + 1$. Khi đó, nếu tồn tại một bộ u', v' khác sao cho $s_{s_{u'}} = s_{s_{v'}+1}$ thì cũng theo lý luận trên, ta lại phải có $s_{v'+1} = s_{v'} + 1$, và vì $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt nên $s_{k+1} - s_k = 1$ với mọi k từ v đến v'. Và do tồn tại vô hạn các bộ u', v' như thế nên $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một cấp số cộng có công sai $d = 1$. Nhưng từ đây ta lại suy ra $\{s_{s_n}\}$ và $\{s_{s_n+1}\}$ có công sai bằng nhau (và bằng 1). Mâu thuẫn.

1. $d = d'$:

Khi đó, với mọi số nguyên dương n ta đều có: $s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_{n+1}+1} - s_{s_n+1}$ hay là $s_{s_n+1} - s_{s_n} = s_{s_{n+1}+1} - s_{s_{n+1}} = \lambda$ với mọi n nguyên dương. Suy ra $s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = d - \lambda$, với mọi n nguyên dương. Hơn nữa, vì $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt nên $|s_k - s_l| \geq |k - l|$ với mọi k, l nguyên dương. Do đó: $d - \lambda = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} \geq s_{n+1} - s_n$, với mọi số nguyên dương n. Nói cách khác, dãy số sai phân của $\{s_n\}$: $u_n = s_{n+1} - s_n$ là dãy số bị chặn. Đặt: $m = \inf(u_n)$ và $M = \sup(u_n)$, thế thì $m \leq \lambda \leq M$. Thế thì tồn tại các chỉ số m' và M' sao cho $s_{m'+1} - s_{m'} = m$ và $s_{M'+1} - s_{M'} = M$. Do khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp ở giữa $s_{M'+1}$ và $s_{M'}$ đều không lớn hơn M nên ta có $d \leq M^2$. Mặt khác:

$$d = s_{s_{M'+1}} - s_{s_{M'}} = s_{s_{M'}+M} - s_{s_{M'}} \geq mM$$

Vậy $mM \leq d \leq M^2$. Lý luận tương tự với $s_{m'+1} - s_{m'} = m$, ta cũng có:

$$d = s_{s_{m'+1}} - s_{s_{m'}} = s_{s_{m'}+m} - s_{s_{m'}} \leq mM$$

Nên $mM \leq d \leq mM$, từ đó $d = mM$. Nhưng để điều đó xảy ra được thì tất cả khoảng cách giữa các số hạng liên tiếp ở giữa $s_{s_{M'}+M}$ và $s_{s_{M'}}$ đều phải bằng m cũng như tất cả các khoảng cách giữa các số hạng liên tiếp ở giữa $s_{s_{m'}+m}$ và $s_{s_{m'}}$ đều phải bằng M. Vậy:

$M = s_{M'+1} - s_{M'} = m$ hay $\inf(u_n) = \sup(u_n)$

Vậy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hằng số, có nghĩa là $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ là cấp số cộng.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Trù mật là một khái niệm sâu sắc của Toán học. Theo tôi, cái hay là từ những ý tưởng mang tính Giải Tích, ta có thể nghĩ đến những "bước nhảy" khá tinh tế trong Tổ Hợp, và có lẽ sẽ có ứng dụng trong nhiều vấn đề khác. Mong rằng bài viết nhỏ này sẽ có ích cho các bạn.

III - Bài tập rèn luyện

Bài 3.1. Chứng minh rằng $\{\sin n \ \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ là trù mật trong $(0;1)$.

Bài 3.2. Cho f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số cộng tính nhưng không tuyến tính. Tức là hàm số thỏa điều kiện $f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ nhưng không tồn tại c sao cho $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}^2$.

Bài 3.3. Cho $a \in \mathbb{N}^*$ và không là lũy thừa của 10 còn $d_1, d_2, \ldots, d_m$ và $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$ là các chữ số. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho a^k trong hệ thập phân mở đầu bằng $\overline{d_1 d_2 \ldots d_m}$ và tận cùng bằng $\overline{d'_1 d'_2 \ldots d'_n}$.

Bài 3.4. (IMO 1997) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = 1 \ v \ \ |x_i| \leq \frac{n+1}{2}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Chứng minh rằng tồn tại một song ánh: $\pi : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ thỏa mãn:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k\pi(x_k)\right| \leq \frac{n+1}{2}$$

Bài 3.5. (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ) Cho tập hợp $M \subset \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

$M \neq \emptyset$ và $\forall m \in M, \lfloor \sqrt{x} \rfloor \in M$ và $4x \in M$

Chứng minh rằng $M = \mathbb{N}^*$ (ta hoàn toàn có thể nói M trù mật trong $\mathbb{N}^*$).

IV - Tài liệu tham khảo

[1]. Tài liệu tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2009.

[2]. Các trang web: `http://www.mathlinks.ro/`, `http://www.diendantoanhoc.net/`.

Kỷ niệm một ngày gặp lại bạn bè: 31/7/2009

Đôi điều về phong trào Olympic Toán học Việt Nam

Trần Nam Dũng - Trường Đại học KHTN, ĐHQG Tp.HCM

$\triangledown$

Tóm tắt. Phong trào Olympic Toán học Việt Nam những năm gần đây có khá nhiều sự kiện nổi bật và những thay đổi. Bài viết này trình bày một số cảm nhận và đánh giá cá nhân của tác giả về những sự kiện, những thay đổi đó. Bối cảnh của bài viết là 5 năm, từ năm 2005 đến năm 2009.

I - Olympic Toán quốc tế lần thứ 48: Sự kiện nổi bật nhất

Sự kiện nổi bật nhất của giai đoạn này chính là việc Việt Nam đăng cai Olympic Toán quốc tế lần thứ 48. Sau 33 năm kể từ lần đầu tiên tham dự Olympic Toán quốc tế vào năm 1974, Việt Nam trở thành chủ nhà đón tiếp bạn bè quốc tế.

Olympic Toán quốc tế lần thứ 48 đã được tổ chức rất tuyệt vời. Bạn bè quốc tế không có điều gì có thể phàn nàn về các điều kiện ăn ở, về phòng thi, các chương trình tham quan, về lễ khai mạc và bế mạc. Sự có mặt của Thủ tướng Nguyễn Tấn Dũng, Phó Thủ tướng Nguyễn Thiện Nhân ở lễ khai mạc, của chủ tịch nước Nguyễn Minh Triết ở lễ bế mạc cho thấy sự quan tâm sâu sắc của Chính phủ, Nhà nước và toán xã hội đối với sự kiện này.

Và bạn bè quốc tế cũng hết sức ấn tượng trước lực lượng chuyên môn hùng hậu của Việt Nam. Ban chấm thi gồm khoảng 70 người, trong đó hơn 1 nửa về từ nước ngoài gồm toàn những GS, TS, những cựu IMO, những tài năng trẻ Toán học Việt Nam. Các trưởng phó đoàn khối Liên Xô cũ cảm thấy mình như ở nhà vì đến bàn nào cũng được nói tiếng Nga. Các đoàn khác cũng rất thoải mái vì đội giám khảo Việt Nam nói thành thạo các thứ tiếng Anh, Pháp, Đức.

Những ngày làm đề thi và chấm thi quả là tuyệt vời. Ngoài việc được giao lưu với bạn bè quốc tế (họ luôn tuyệt vời!), anh em giáo khảo còn có dịp gặp nhau, tay bắt mặt mừng, từ các thế hệ lão làng như Hà Huy Khoái, Nguyễn Văn Mậu, Ngô Việt Trung, Nguyễn Tự Cường, Phạm Ngọc Ánh đến những thế hệ đầu tiên dự IMO: Đỗ Đức Thái, Vũ Kim Tuấn, Lê Bá Khánh Trình, Lê Tự Quốc Thắng rồi các thế hệ trẻ gần đây: Đào Hải Long, Đỗ Quang Yên, Bùi Viết Lộc, Nguyễn Trọng Cảnh, Lê Hùng Việt Bảo, Trần Vĩnh Hưng, Nguyễn Tiến Khải. Thật hiếm có dịp anh em làm toán của Việt Nam có dịp tụ tập đông vui như vậy. Rất cảm ơn IMO 2007 về điều đó.

Tất nhiên, việc đội ngũ chấm thi chuyên nghiệp quá, sắc bén quá cũng đem đến đôi điều "khó chịu" cho một số bạn bè. Thông thường thì ở Olympic Toán quốc tế, việc cho điểm đánh giá bài cũng không cần quá chặt chẽ, có thể châm chước những lỗi nhỏ, có thể cho 1 điểm thay vì 0 điểm (chỉ để có điểm!). Tuy nhiên, do quá quán triệt tinh thần chuyên môn, các giám khảo Việt Nam đã chấm "vô cùng chắc tay".

Nhưng có lẽ bạn bè quốc tế sẽ mau quên đi những "giận hờn" đó thôi, vì dù sao thì chúng ta cũng đã làm rất tốt trách nhiệm của mình. Công bằng cho tất cả chứ không phải chặt tay chỗ này, lỏng tay chỗ khác. Điều lấn cấn lớn nhất đối với đội ngũ anh em chuyên môn về kỳ IMO 2007 thực ra là ở thành tích có phần vượt trội của đội tuyển Việt Nam: xếp thứ 3 toàn đoàn với 3 huy chương vàng, 3 huy chương bạc, lần đầu tiên trong những năm gần đây xếp trên đoàn Mỹ. Tại sao lại lấn cấn, Việt Nam cũng đã từng đạt thành tích như vậy cơ mà? Xin bạn đọc xem tiếp phần sau.

II - Cột mốc 2005

Kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO năm 2005 có lẽ cũng trôi qua bình thường như những kỳ thi khác nếu như không có "sự cố" đề thi. Sau khi kỳ thi kết thúc, khi BGK bắt đầu được triệu tập để chấm thì xuất phát từ một số nguồn tin, báo chí bắt đầu đăng thông tin về sự trùng lặp của bài toán số 3, một trong hai bài toán khó của kỳ thi, với đề thi học sinh giỏi Hà Nội vừa nóng hổi xảy ra.

Phân tích tiếp đề thi, giới chuyên môn tiếp tục phát hiện ra rằng bài toán 5 của đề thi VTST05 gần giống bài 4 của kỳ thi chọn đội tuyển Hàn Quốc năm 2000, còn bài 2 của đề thi VSTS05 là một trường hợp riêng của bài 6 của đề thi chọn đội tuyển năm 1997 của... chính Việt Nam.

Báo chí đã phân tích, mổ xẻ khá nhiều về vấn đề này, chúng tôi xin phép không tiếp tục phân tích ở đây. Nguyên nhân có lẽ cũng dễ hiểu: việc làm đề thi chọn đội tuyển quốc gia đã không được quan tâm một cách đúng mức và các chuyên gia ra đề cũng như ban chọn đề đã chọn giải pháp đơn giản: sử dụng lại hoặc "xào nấu" lại các kết quả trong sách báo. Nhưng vì đầu tư quá ít nên hay đúng hơn là đã bê nguyên xi đề thi nên hậu quả là bị trùng đề. Ở đây không nên biện hộ rằng đó là "tư tưởng lớn gặp nhau" giữa các ban ra đề: chẳng qua là đều lấy từ một nguồn hoặc từ các nguồn thứ cấp.

Nguyên nhân thì như vậy còn hậu quả là có sự kiện tụng. Rồi một giải pháp được đưa ra là thi lại cho 3 thí sinh. Kết quả là đội tuyển có một thành viên mới và một thành viên cũ phải xếp va li về nhà. Tâm lý các thành viên đội tuyển rõ ràng là bị ảnh hưởng, công việc bồi dưỡng đội tuyển cũng không được chăm lo chu đáo (do các nỗ lực đều tập trung vào việc ... chữa cháy). Kết quả là tại kỳ thi IMO 2005, đội tuyển Việt Nam có thành tích rất khiêm tốn: 3 huy chương bạc, 3 huy chương đồng, đứng thứ 15 toàn đoàn. Thành tích này đặc biệt khiêm tốn nếu nhớ rằng nhiều năm trước đó, đoàn Việt Nam luôn có huy chương vàng và luôn xếp vị trí cao. Đặc biệt, năm 2003 đoàn Việt Nam lần đầu tiên có 2 thí sinh đạt điểm tuyệt đối (trong số 3 thí sinh đạt thành tích này!), xếp thứ tư toàn đoàn và năm 2004, Việt Nam đã đoạt 4 huy chương vàng, xếp thứ tư toàn đoàn. Năm 2002, Việt Nam cũng xếp thứ 5 với 3 huy chương vàng.

Bắt đầu từ cột mốc 2005, Việt Nam bắt đầu "chắc chân" ở ngoài Top 10. Năm 2005 ở vị trí 15, năm 2006 ở vị trí 13, năm 2008 ở vị trí 12 và năm 2009 ở vị trí 15. Riêng năm 2007, khi IMO được tổ chức tại Việt Nam, do lợi thế phong thổ, đoàn Việt Nam đã xuất sắc chia vị trí thứ ba với đoàn Hàn Quốc.

III - Bắt đầu phải giật mình

Từ trước đến nay, dù vẫn nói rằng là thành tích IMO không phải là tiêu chuẩn đánh giá nền toán học của một quốc gia, nhưng chúng ta vẫn thường đem các thành tích IMO của mình ra để so sánh. Nhưng đến 5 năm gần đây (không tính đến năm 2007), chúng ta bắt đầu thường xuyên xếp sau Hàn Quốc, Nhật Bản, Đài Loan, Thái Lan và có năm xếp sau cả Singapore là những nước mới ra nhập phong trào Olympic và vài năm trước còn học hỏi ở chúng ta.

Điều này bắt buộc chúng ta phải giật mình. Rõ ràng có vấn đề gì đó trong phòng trào Olympic Toán của chúng ta. Sự cố năm 2005 có lẽ chỉ là một nguyên nhân thứ yếu, còn bản chất có lẽ nằm ở chỗ khác. Chúng tôi sẽ thử đưa ra một số nguyên nhân.

Thứ nhất, và quan trọng nhất là động cơ dạy và học của chúng ta hiện nay là hướng đến thành tích chứ không hướng đến thực chất. Người ta đánh giá một thầy giáo, một trường học bằng số huy chương, số giải quốc gia. Học sinh cũng học để cốt có giải quốc gia, cốt được đi thi toán quốc tế. Phụ huynh cũng mong mỏi như vậy. Ít có ai nhắm đến một cái đích xa hơn: trở thành nhà toán học, trở thành nổi tiếng như Terence Tao, trở thành người thành đạt. Vì nhắm đến những cái đích gần, lại không có bài bản nên thích học "hiệu quả" hơn là học căn bản, dạy "chiêu thức" hơn là dạy "công phu". Và đặc biệt, không bỏ qua các cơ hội để có lợi thế hơn so với bạn khác nhờ "làm việc" với những người có khả năng ra đề.

Thiếu trung thực, thiếu công bằng, chăm sóc đến quyền lợi một số nhóm nhỏ thay vì quyền lợi chung. Đó là những điều sẽ làm hỏng phong trào, đánh mất động lực thi đua thực sự trong các bạn học sinh. Chúng tôi sẽ tiếp tục phân tích về vấn đề này ở trong các mục sau. Đã đến lúc phải dũng cảm có những thay đổi, đề cao trách nhiệm và danh dự của những người có quyền ra đề thi, mở rộng đội ngũ và công khai tên tuổi các tác giả. Hãy đặt niềm tin và giao trách nhiệm cho họ.

Thứ hai, những thay đổi của Bộ giáo dục về quy chế thi HSG. Rồi xã hội sẽ quen với việc học sinh đạt giải quốc gia không còn được tuyển thẳng đại học. Suy cho cùng, đó cũng không phải là vấn đề gì quan trọng lắm. Hãy để các trường ĐH tự đánh giá và đưa ra quyết định của mình. Một thay đổi khác, tuy có thể nói là nhỏ nhưng thực sự đã đem đến những hệ luỵ khá lớn. Đó là việc Bộ GD chuyển format thi 6 bài trong vòng 2 ngày thành 7 bài trong vòng 1 ngày.

Hệ thống thi 2 ngày là một hệ thống hết sức khoa học và được áp dụng ở hầu hết các kỳ thi Olympic. Tại kỳ thi HSG quốc gia môn Toán, hình thức thi 2 ngày, mỗi ngày 3 bài cũng đã được áp dụng từ năm 1975 cho đến hết năm 2006. Không có ai phàn nàn về hệ thống này. Lý do của các "nhà cải cách" đưa ra là tiết kiệm kinh phí coi thi (?), còn lý do để có số lượng bài toán trong 180 phút là 7 bài là để "tránh ảnh hưởng của tiêu cực".

Bài viết này không đi sâu tranh luận về ý nghĩa của các cải cách. Chỉ biết rằng số học sinh đạt giải (kể cả giải KK) của năm 2007 là 13% và năm 2008, con số tương ứng là 8%. Không những thế, kiểu thi mới này còn có "thành tích" gạt rất nhiều thành viên đội tuyển quốc gia của năm trước ngay từ vòng 1. Theo đánh giá của chúng tôi, đây cũng là một lý do khiến đội tuyển quốc gia 5 năm gần đây yếu đi rõ rệt: Để đạt giải ở kỳ thi HSG quốc gia (điều kiện cần để có thể dự kỳ thi chọn đội tuyển Toán), học sinh và các thầy giáo bắt buộc phải tốn công sức để luyện kỹ năng "giải toán nhanh" hay còn gọi là "luyện cơ bắp" và hệ quả là không còn thời gian để tập trung cho những bài toán kiểu IMO nữa.

IV. Giải pháp nào?

Giải pháp chuyển từ hệ thống 7 bài/ngày thành 5 bài/ngày với biểu điểm "dễ chịu" của năm 2009 đã đẩy con số học sinh đạt giải lên mức 34% (kể cả giải KK). Tuy nhiên, đó vẫn chưa phải là giải pháp cơ bản. Bộ lọc của kỳ thi HSG quốc gia vẫn chưa tốt khi vẫn loại đi khá nhiều học sinh có khả năng ra khỏi kỳ thi chọn đội tuyển, trong khi đó lại dành vé cho những học sinh chỉn chu và biết lượng sức mình – chỉ làm bài dễ. Có lẽ các nhà cải cách nên cải cách thêm một lần nữa bằng cách... quay lại hệ thống cũ.

Để nâng cao chất lượng đội tuyển, nên mạnh dạn có chính sách mở rộng cửa tham dự kỳ thi chọn đội tuyển cho các học sinh: ngoài các bạn đạt giải 3 trở lên của kỳ thi HSG quốc gia nên đặc cách cho các thành viên đội tuyển quốc gia năm trước còn học lớp 12 tham dự (và họ không cần phải thi HSG quốc gia). Điều này về mặt nào đó có thể không công bằng khi tạo lợi thế cho các em "cựu binh", nhưng chính điều này mới giúp có một đội tuyển mạnh, có chiều sâu.

Nên học tập nhiều nước như Nga, Mỹ, Rumani, Bulgaria... tổ chức thi HSG từ các lớp 9, 10, 11. Tuy nhiên không phải là cho học sinh lớp 9, 10 học trước chương trình để thi chung với lớp 12, mà có đề thi riêng. Như vậy sẽ có thể phát hiện được những tài năng ngay từ những lớp dưới. Sẽ có cơ chế cho các em từ lớp 10 trở lên tham gia kỳ thi chọn đội tuyển.

Muốn làm được điều này, dĩ nhiên công tác chuyên môn của ban ra đề, ban giám khảo sẽ nặng nề hơn. Tuy nhiên, đừng lo ngại về điều đó. Chúng ta có rất nhiều bạn trẻ tài năng, xuất thân từ phong trào Olympic và sẵn sàng đóng góp cho phong trào. Chỉ cần tin tưởng và giao phó cho họ. Và cũng đừng lo ngại những chuyện "tiêu cực" này kia, cũng chẳng cần phải "nhốt" các chuyên gia trong trại 2, 3 tuần làm gì.

Tiến đến việc tổ chức các cuộc thi cụm (cho vòng HSG quốc gia) và Trại tập huấn (cho các học sinh được dự kỳ thi chọn đội tuyển) để tăng cường giao lưu và bồi dưỡng kiến thức và văn hoá toán học cho học sinh.

Và một điều rất quan trọng, cả thầy và trò phải cùng hiểu rằng động cơ của việc dự thi, tham gia Trại tập huấn không chỉ nhất nhất để đạt giải, để lọt vào đội tuyển, mà là được giao lưu, được học hỏi (ở những thầy cô giáo giỏi và tâm huyết nhất), được cập nhật những vấn đề mới nhất, nóng hổi nhất của toán học đương đại (qua lời giảng của các nhà toán học lớn).

V - Thay cho lời kết

5 năm gần đây có khá nhiều các hoạt động mới của phong trào Olympic được triển khai như Trại hè Hùng Vương, kỳ thi Olympic Hà Nội mở rộng, cuộc thi ViOlympic, Việt Nam lần đầu tiên tham dự kỳ thi Toán quốc tế dành cho SV ... Đặc biệt là việc hàng loạt các

diễn đàn về toán được khai trương cùng với nhiều hoạt động đa dạng của mình. Nhưng phải thật lòng mà nói rằng, đa số các hoạt động của phong trào Olympic hiện nay có chất lượng chưa cao, chưa có chiều sâu. Không kể kỳ thi HSG quốc gia đã phân tích ở trên, các kỳ thi như Olympic sinh viên, Olympic 30/4, cuộc thi giải toán trên báo Toán học tuổi trẻ... đều thuộc diện "phải cải tổ". Trong các kỳ thi do các diễn đàn tổ chức cũng chưa có kỳ thi nào vượt qua được kỳ thứ ba (tính ổn định và truyền thống) và vượt qua được con số trăm thí sinh dự thi (quy mô tổ chức) vì vậy tầm ảnh hưởng rất hẹp.

Để có được một sự thay đổi thật sự về lượng và chất, có lẽ những cố gắng của một vài cá nhân, một vài nhóm nhỏ những người tâm huyết với phong trào là chưa đủ. Rất cần đến sự tham gia của các tổ chức mạnh hơn, có uy tín cao về khoa học và tổ chức như Hội toán học Việt Nam, Viện Toán học Việt Nam, các trường Đại học lớn (đặc biệt là hai trường ĐH Quốc gia). Đã đến lúc các nhà toán học Việt Nam noi gương Kolmogorov, Gelfald, Arnold, A.Gleason, Erdos, Lang xắn tay áo xuống làm việc với các bạn học sinh phổ thông.

Đào tạo chuyên toán tại ĐHTHQG Lomonosov

Đinh Trung Hoà, ĐHTH Kazan - LB Nga

▽

Tóm tắt. Nước Nga không những nổi tiếng với nguồn tài nguyên thiên nhiên nhiều hàng bậc nhất thế giới mà còn là nơi sản sinh ra nhiều nhà khoa học kiệt xuất, trong đó có những nhà toán học. Hằng năm đoàn thi Olympic Toán quốc tế của LB Nga luôn chiếm vị trí cao trong bảng xếp hạng. Không ít những người từng đoạt huy chương ở các kì thi này đã trở thành những tên tuổi lớn và để lại dấu ấn sâu sắc trong sự phát triển của Toán học, ví dụ gần đây nhất là hiện tượng G.Perelman, nhà toán học trẻ từ Viện Toán Steklov Saint-Peterburg đã giải quyết trọn vẹn Vấn đề Poincare làm điên đầu giới toán học mấy trăm năm liền. Tất cả những điều đó không phải là kết quả tức thời của một thế hệ mà đó là thành công của nhiều thế hệ các nhà toán học Nga và một hệ thống đào tạo khoa học, từ phổ thông đến đại học và sau đại học.

Trong bài này chúng ta sẽ tìm hiểu các mô hình đào tạo và những hoạt động ngoại khóa giành cho học sinh chuyên toán của trung tâm toán học hàng đầu LB Nga là ĐHTH Lomonosov hay viết tắt là MSU (Moscow State University).

I - Vài nét lịch sử

Từ những năm 30 của thế kỷ trước tại Khoa Toán – Cơ của MSU đã hình thành những nhóm chuyên toán nhằm phát hiện, bồi dưỡng những tài năng toán học phổ thông. Theo thời gian những nhóm học này thay đổi tên gọi và nhiều hình thức khác nhau. Cuối những năm 70 những nhóm này được tổ chức cho HS từ lớp 7-9 dưới tên gọi "Trường dành cho nhà toán học nhỏ". Đến 11/12/1981 một trường duy nhất cho "những nhà toán học nhỏ" đã được hình thành, mang tên "Tiểu Khoa Toán – Cơ" (tiếp theo sẽ gọi tắt là Tiểu Khoa). Tại đây ngoài việc đào tạo gà chọi cho các kỳ thi Olimpic người ta còn đặt một mục tiêu khác: đào tạo những tài năng trẻ ham mê toán học thành những nhà toán học tài năng trong tương lai. Trong những năm 80 Tiểu Khoa phát triển mạnh dưới sự hỗ trợ của khoa Toán - Cơ. Nhiều sách chuyên đề được các nhà toán học hàng đầu viết với phong cách dễ hiểu đối với học sinh. Tuy nhiên tình hình kinh tế chính trị bất ổn định vào cuối năm 80 đầu những năm 90 đã ảnh hưởng đáng kể đến hoạt động của khoa. Từ năm 1992 trên khoa đã bắt đầu thu tiền học phí (trước đó tất cả học sinh được dạy miễn phí). Điều đó đã làm cho số lượng học sinh tham gia học giảm đi đáng kể và đã ảnh hướng không lớn đến chất lượng đào tạo. Chỉ đến những năm đầu của thế kỉ này Tiểu Khoa mới vực dậy được sức mạnh vốn có của mình. Từ năm 2003 đến 2008 đã có nhiều sách chuyên đề được in ấn và nhiều sách nữa sẽ được tiếp tục in ra nhằm phục vụ cho việc dạy và học. Số lượng học viên tăng lên đáng kể, nhiều học sinh từ các nước gần LB Nga cũng đến đăng ký học tại Tiểu Khoa.

II - Chương trình và phương thức đào tạo

Trên Tiểu Khoa có các nhóm cho học sinh từ lớp 4 đến 11. Các nhóm được tổ chức dưới sự hỗ trợ của Khoa Toán – Cơ trường MSU và Cung thiếu nhi của thành phố Moscow. Học sinh các lớp cuối cấp (từ 9-11, ở Việt Nam là từ 10-12) được học thêm chương trình toán cao cấp được dạy ở năm 1 tại các khoa tự nhiên của các trường đại học, song song đó còn có những buổi giảng về những mối liên hệ giữa toán học với vật lý, tin học và lập trình. Hằng năm Tiểu Khoa phối hợp với các trung tâm toán học khác của LB Nga tổ chức các cuộc thi đấu trực tiếp giữa các đội tuyển và các Hội thảo khoa học dưới dạng Trường Hè cho học sinh từ lớp 5-11.

Các buổi học của tất cả các nhóm học đều miễn phí. Những ai có nguyện vọng đều có thể tham gia đăng ký học, thậm chí không có buổi xét trình độ đầu vào của học sinh.

Trên các buổi học học sinh sẽ làm quen với các bài toán thú vị, chúng học cách suy luận đúng đắn và logic, học cách cảm nhận và con đường tìm thấy vẻ đẹp của toán học. Mỗi nhóm từ lớp 4 – 8 bao gồm 15-30 người. Mỗi học sinh sẽ được phát một tờ giấy với những bài tập. Chúng phải giải những bài toán này và thảo luận riêng với giáo viên. Mỗi phòng học cùng lúc có vài giáo viên, những bài toán quan trọng của mỗi học sinh sẽ được thảo luận trên bảng. Những bài tập này có thể tìm thấy trên trang web của Tiểu Khoa (hiển nhiên bằng tiếng Nga).

Đối với những lớp cuối cấp hằng ngày từ 16h45 đến 18h30 sẽ có những bài giảng riêng. Nhờ sự sắp xếp thời gian như vậy mà mỗi học sinh lớp 9-11 mỗi ngày có thể tham gia chương trình trên nhóm học của mình và có thể theo dõi các bài giảng về toán. Mỗi bài giảng là một chuyên đề, và hầu như tất cả những chuyên đề này không liên hệ gì với nhau và thậm chí không liên quan gì tới bài tập trên lớp. Đôi lúc những chuyên đề nói về những ý tưởng và những kết quả khó, tuy nhiên để hiểu những chuyên đề này chỉ cần những kiến thức cơ bản trong chương trình chung phổ thông. Những bài giảng như vậy được đọc bởi những nhà toán học hàng đầu của Moscow và chúng được mở cửa cho tất cả những ai có nguyện vọng.

Những học sinh hoàn thành khóa học với kết quả xuất sắc và giỏi sẽ được phát chứng chỉ chứng nhận đã kết thúc Tiểu khoa. Nếu học sinh chỉ đạt được kết quả trung bình thì chỉ được cấp chứng nhận đã kết thúc khóa học.

Những học sinh học cùng trường có điều kiện học cùng nhau theo hình thức nhóm "Học sinh tập thể". Nhóm sẽ được hướng dẫn bởi giáo viên của trường, nếu nhiều học sinh có nguyện vọng học thì có thể chia thành nhiều nhóm, nhưng số lượng mỗi nhóm không quá 15. Các nhóm dạng này chủ yếu học theo chương trình được dạy song song tại Tiểu Khoa. Và theo nhận xét của các giáo viên thì hình thức học tập như vậy mang đến hiệu quả khá tốt. Thường thì những học sinh ham thích toán sau 1-2 năm học tại Tiểu Khoa sẽ tiếp tục thi vào các nhóm chuyên toán và các trường chuyên toán để tiếp tục học toán ở đó.

Một hình thức học nữa là trao đổi thư từ. Học sinh sẽ nhận được các bài tập theo những chương trình được soạn thảo của Tiểu Khoa. Sau khi giải quyết chúng học sinh phải gửi lời giải cho các giáo viên kiểm tra. Trong một năm thì mỗi học sinh hoàn thành từ 6-9 bài tập như vậy. Các giáo viên sau khi kiểm tra các bài giải sẽ chỉ ra những lỗi về lý luận hoặc tính toán, nếu có, sau đó họ sẽ chỉ cho học sinh cách tự sửa những lỗi đó. Những bài tập chưa giải được sẽ nhận được những hướng dẫn. Sau khi kiểm tra bài làm sẽ được trả lại cho học sinh. Những học sinh nhận được điểm kém cho bài tập nào đó có thể nhận được các đánh giá và hướng dẫn của giáo viên, sau đó tiếp tục hoàn thành bài tập và gửi cho giáo viên kiểm tra. Quá trình đó sẽ lặp đi lặp lại cho đến khi học sinh nhận được điểm thỏa đáng. Những học sinh hoàn thành được những bài tập bắt buộc sẽ dược chuyển lên lớp trên trong năm học mới. Học như vậy thì các bài thi và kiểm tra tại lớp gần như không có.

Hằng năm Tiểu Khoa có tổ chức Trường Hè cho học sinh nhằm phối hợp nghỉ ngơi và tổ chức các bài giảng toán (ở Nga có những khu vực được gọi là Trại nghỉ cho học sinh, đến hè sẽ các trường sẽ tổ chức cho học sinh của mình đến các Trại này vui chơi, thường là 2-3 tuần). Trường Hè là nơi tạo điều kiện để học sinh có thể làm quen với những ý tưởng mới và những câu chuyện toán thú vị. Chúng học cách giải những bài toán khó và đồng thời được nghỉ ngơi, trao đổi với bạn bè trong Tiểu Khoa. Ở đây chúng sẽ được nghe những chuyên đề khác nhau, trong đó một số chuyên đề là tiếp theo của chương trình được học tại Tiểu Khoa. Nhưng chủ yếu họ tập trung giải quyết những bài toán không mẫu mực và những bài toán Olimpic. Như thường lệ mỗi nhóm học không quá 15 người, và theo thực tế cho thấy trình độ của những nhóm mạnh khá cao.

Một mô hình khá thú vị nữa hằng năm diễn ra tại Khoa Toán – Cơ trường ĐHTH Kazan, đó là trường hè Kvant và Hội thảo khoa học mang tên N.I.Lobachevskii giành cho học sinh. Mô hình trường hè Kvant giống như Trường Hè tại Tiểu Khoa MSU. Hội thảo khoa học mang tên N.I.Lobachevskii được tổ chức thường niên cho học sinh từ lớp 9-11 tại các vùng ven song Volga và những thành phố khác của LB Nga. Tại Hội thảo các học sinh (hoặc các nhóm học sinh không quá 3 người) trình bày miệng các "công trình" nghiên cứu của mình dưới sự hướng dẫn của thầy cô tại trường phổ thông hoặc giáo viên toán của các trường đại học. Hội đồng khoa học là những nhà khoa học và những chuyên gia hàng đầu của ĐHTH Kazan và các trường đại học khác tại Kazan. Ngoài ra người ta còn tổ chức các cuộc nói chuyện trực tiếp giữa học sinh và những nhà khoa học nổi tiếng, nhằm tăng thêm sự đam mê toán học của từng học sinh.

Ngoài ra, hàng năm tại LB Nga còn rất nhiều hoạt động tương tự diễn ra tại nhiều vùng miền khác nhau, và mục đích của họ vẫn là tạo sân chơi bổ ích cho học sinh yêu toán. Đa phần những nhà toán học xuất sắc của LB Nga đều đã trải qua những trường lớp như vậy, và không ít người trong số họ vẫn giữ nguyên phong cách đó. Trong nhiều câu chuyện kể về Kolmogorov thì hằng năm ông cùng các học trò thường đi nghỉ hè cùng nhau, và cứ sau mỗi lần như vậy chắc chắn lại có nhiều định lý toán học được tìm thấy.

III - Một vài nhận xét

Trong lịch sử toán học rất nhiều người có những phát minh để đời từ khi còn rất trẻ, ví dụ như định lý Tikhonov (1906-1993) về tích các không gian topo được tìm ra khi ông là sinh viên năm 2 (năm đó không mới 19 tuổi), công trình của Kolmogorov (1903-1987) về chuỗi Fourier phân kỳ hầu hết khắp nơi làm cho tên tuổi ông nổi tiếng thế giới khi còn là sinh viên (năm đó ông mới 19 tuổi), nhà toán học nổi tiếng người Pháp E.Galois (1811 - 1832) trước khi hi sinh trong trận đấu súng đã để lại cho đời những công trình nổi tiếng trong đại số, còn ông vua toán học Gauss (1777 - 1855) lúc 19 tuổi đã có những công trình kinh điển bài toán chia góc bằng compa và thước kẻ, còn guyên lý đối ngẫu được Pontryagin (1908-1988) tìm ra khi còn là sinh viên v.v. Qua những ví dụ trên xét thấy nếu học sinh có niềm đam mê toán học nếu được đào tạo bài bản họ có thể cống hiến những công trình để đời từ khi còn rất trẻ. Tuy nhiên cũng có một số trường hợp thú vị như M.M.Postnikov, thời còn học sinh ông rất kém về toán, thậm chí còn nhận điểm 2 ở môn này, hoặc nhà toán học nổi tiếng người Ấn Độ S.Ramanujan không được đào tạo cơ bản về toán nhưng nổi tiếng với những công thức phức tạp đến nhà toán học nổi tiếng người Anh G.H.Hardy cũng nói rằng ông không hiểu từ đâu mà có được.

Một điều có thể nhận thấy trong phương thức đào tạo của người Nga đó là mục đích của họ có phần không thiên về đào tạo gà chọi để thi Olympic toán các cấp mà mục tiêu chính là đào tạo ra những nhà toán học xuất sắc trong tương lai. Học sinh ngoài việc học cách tiếp cận với vẻ đẹp của toán học họ còn rèn luyện cách thức tự giải quyết các bài toán khó và làm quen với việc tự nghiên cứu toán. Thực tế cho thấy cách đào tạo như vậy mang lại hiệu quả cao, mà minh chứng là nhiều tên tuổi của những nhà toán học Moscow đã đi vào lịch sử toán học như những cha đẻ của nhiều ngành toán khác nhau hoặc là nhiều người đã từng đoạt giải thưởng Fields cao quý, đấy là chưa nói đến hàng trăm định lý quan trọng được phát minh bởi người Nga.

Những năm gần đây do ảnh hưởng của điều kiện kinh tế và chính trị rất nhiều nhà toán học Nga chọn con đường ra nước ngoài làm việc hoàn toàn hoặc thỉnh giảng. Tuy vậy nhờ được đào tạo bài bản trong nước thế hệ trẻ các nhà toán học Nga trong nước đã có những thành tích nổi bậc, mà gần đây nhất là nhà toán học trẻ G.Ya.Perelman (bố ông là Yakov Perelman nổi tiếng với hàng loạt sách toán cho học sinh phổ thông) đã giải quyết trọn vẹn Giả thuyết Poincare làm điên đầu giới toán học trong mấy trăm năm qua.

Về các kỳ thi Toán dành cho học sinh ở Đức

Lê Nam Trường - Darmstadt, CHLB Đức

Ở CHLB Đức có hai kỳ thi Toán chính là BWM (Bundeswettbewerb Mathematik – kỳ thi Toán Liên bang) và Mathematik-Olympiaden in Deutschland (Olympic toán học Đức).

I - Kỳ thi Toán Liên bang

Đối tượng của kỳ thi

Là một cuộc thi toán học dành cho các học sinh phổ thông có niềm yêu thích toán học. Kỳ thi bao gồm hai vòng thi làm bài tại nhà và vòng thi cuối cùng, vòng thi thứ ba là một cuộc phỏng vấn. Kỳ thi hướng đến các học sinh học ở các trường Gymnasium (ở Đức hệ thống giáo dục phổ thông không chỉ đơn giản như ở Việt Nam, các học sinh ở trường Gymnasium được định hướng là sẽ vào học đại học, một số lượng học sinh khác thì được định hướng trước là đi học nghề). Bằng các bài toán hấp dẫn và đòi hỏi tư duy mục đích của cuộc thi là để cho các thí sinh tập trung sâu vào toán học trong một thời gian dài. Ngoài những kiến thức trong trường học cuộc thì cũng muốn mang đến cho các thí sinh tính tập trung và kiên nhẫn.

Kỳ thi diễn ra như thế nào?

Trong mỗi vòng thi làm bài tại nhà thì có bốn bài toán trong các mảng toán sơ cấp (Hình học, rời rạc, số học, đại số) được đặt ra, tất nhiên bài vòng hai thì bao giờ cũng khó hơn bài vòng một. Mỗi vòng thi, các thí sinh phải tự giải các bài toán trong vòng hai tháng tại nhà và viết lời giải.

Trong vòng một cuộc thi cho phép giải theo nhóm: nhiều nhất là ba thí sinh lập thành một nhóm, bài giải được tính cho cả nhóm. Và nếu được giải thì mỗi người trong nhóm đều được nhận, nếu được vào vòng hai thì cả nhóm đều được vào vòng sau. Trong vòng hai thì không được phép làm bài theo nhóm nữa.

Trong vòng ba, còn gọi là vòng phỏng vấn (Kolloquium) thì cuộc thi không còn là việc giải các bài toán nữa. Trong vòng này, mỗi thí sinh sẽ có một cuộc nói chuyện với một người làm toán trong trường đại học trong thời gian một tiếng. Dựa trên những cuộc phỏng vấn này người ta sẽ chọn ra các thí sinh đoạt giải. Ngoài ra đây cũng là một dịp để các thí sinh làm quen với nhau qua các hoạt động ngoại khóa. Và các thí sinh cũng có cơ hội để nhận được học bổng của các tổ chức.

Cụ thể thời gian của kỳ thi được diễn ra như sau:

Tháng 12	Viết và gửi đề thi	
Đến cuối tháng 2	Các thí sinh giải bài	
1 tháng 3	Kết thúc vòng 1	**Vòng 1**
Đến cuối tháng 3	Chấm bài và chọn giải	
Đầu tháng 6	Gửi kết quả cho các thí sinh	
Đầu tháng 6	Gửi đề thi vòng hai	
Đến cuối tháng 8	Các thí sinh giải bài	
1 tháng 9	Kết thúc vòng hai	**Vòng 2**
Đến cuối tháng 10	Chấm bài và chọn giải	
Đầu tháng 11	Gửi kết quả cho các thí sinh	
Đầu tháng 2	Phỏng vấn	**Vòng 3**

Ai có thể tham gia các vòng thi?

Tất cả mọi học sinh ở tất cả các lớp trong các trường Gymnasium đều có thể tham gia vòng thứ nhất. Cuộc thi tập trung chủ yếu các kiến thức từ lớp 10 đến lớp 13. Tất cả những thí sinh được giải ở vòng 1 được phép vào thi vòng 2. Những người được giải nhất ở vòng thi thứ 2 thì được vào vòng phỏng vấn.

Phần thưởng là gì?

Trong vòng một thì có chứng nhận cho các giải nhất, nhì và ba.

Trong vòng hai thì giải thưởng cũng như vòng một nhưng có thêm tiền thưởng đến 160 EURO.

Trong vòng ba thì chỉ có một giải duy nhất, những ai được giải này thì bắt đầu một chương trình học của Förderung der Studienstiftung des deutschen Volkes. Bên cạnh đó còn được nhận học bổng và nhiều trợ giúp cho học tập.

Ngoài ra còn có những giải thưởng đặc biệt khác.

Số lượng người đoạt giải ở các vòng có thể không bị hạn chế hoặc là được nói trước.

Ai tổ chức cuộc thi này?

Cuộc thi được tổ chức bởi Bundesministerium für Blidung und Forschung và Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft dưới sự bảo trợ của Bundespräsident. Cơ quan trường học và văn hóa mỗi bang hỗ trợ cho cuộc thi và các thí sinh. Đề thi và lời giải các bạn có thể tìm thấy ở địa chỉ:

`http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de/aufgaben/aufgaben.htm`

II - Kỳ thi tuyển chọn đội IMO

Kỳ thi TST không phải là một kỳ thi đơn lẻ được đặt ra mà là được xây dựng từ những thí sinh đạt giải trong các cuộc thi toán khác nhau.

Ai có thể tham gia TST?

Điều kiện đầu tiên để được tham gia TST là phải tham gia thành công vòng hai của BWM hoặc là vòng liên bang của Olympic toán học Đức hoặc là một huy chương bang trong kỳ thi "Jugend forscht" (tạm dịch: thanh niên nghiên cứu), môn chuyên ngành Toán. Điều kiện thứ hai là thí sinh phải còn là học sinh và không lớn hơn 19 tuổi.

Kỳ thi diễn ra như thế nào?

Kỳ thi TST diễn ra hàng năm vào đầu tháng 12 với hai bài kiểm tra. Các thí sinh có đủ điều kiện được mời tham gia cuộc thi qua trường các thí sinh đang học. Thí sinh tham gia tự nguyện.

16 thí sinh đỗ hai bài kiểm tra sẽ được mời đến năm seminar vào đầu tháng 1 năm tới. Những giảng viên có kinh nghiệm sẽ truyền thụ các kiến thức quan trọng, các kỹ năng giải toán trong các seminar này. Bên cạnh đó là các bài kiểm tra để chọn ra sáu người cuối cùng của đội tuyển.

Seminar đầu tiên bắt đầu theo truyền thống là ở Rostock và diễn ra trong một tuần. Sau đó là ba seminar vào cuối tuần ở gần Frankfurt am Main. Sự chuẩn bị quan trọng nhất cho IMO là seminar cuối cùng. Trong vòng 9 ngày các học sinh sẽ được làm khách ở Mathematikern weltweit hocgeschätzen Mathematischen Forschungsinstitut (`http://www.mfo.de/`) ở Oberwolfach ở Schwarzwald. Ở viện nghiên cứu này diễn ra các cuộc gặp gỡ kéo dài một tuần về các vấn đề đương đại trong nghiên cứu trong toán học, những người làm toán trên toàn thế giới được mời đến chứ không chỉ ở nước Đức. Hàng năm seminar cuối cùng cùng đội IMO luôn được tổ chức song song với một cuộc gặp gỡ do viện tổ chức, một trải nghiệm tuyệt vời cho các thành viên đội IMO.

Đề thi các bạn có thể tìm thấy ở đây:

`http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo/aufgaben/aufgaben.htm`

III - OLYMPIC TOÁN HỌC ĐỨC

Olympic toán học là gì?

Olympic toán học này là một cuộc thi hàng năm mà có trên 125.000 thí sinh tham gia. Kỳ Olympic có truyền thống từ năm học 1961/62. Kỳ Olympic tạo cơ hội cho tất cả học sinh thể hiện khả năng toán học của mình. Những học sinh từ lớp 3 đến lớp 13 có tư duy logic, khả năng kết hợp cũng như sáng tạo trong toán học. Với các lớp dưới thì mục đích của kỳ thi là tạo ra hứng thú trong học toán và chú trong vào tư duy logic. Ở lớp trên thì yêu cầu cao hơn ở các khả năng toán học và xử lý các bài toán, kiểm thử, khẳng định và phát triển.

Các vòng của kỳ thi

Kỳ Olympiad này là một kỳ thi theo vòng. Với các học sinh từ lớp 3 đến lớp 7 thì có ba vòng, với các học sinh từ lớp 8 trở đi thì có 4 vòng.

- Vòng 1, vòng trường (Schulrunde): là một cuộc thi giải toán ở nhà, cuộc thi được tiến hành vào tháng 9 hàng năm. Đề thi được gửi đến tất cả các thí sinh tham gia.
- Vòng 2, vòng vùng (Regionalrunde): vào giữa tháng 11 thì các thí sinh qua vòng trường sẽ tham gia một bài kiểm tra. Vòng này được tổ chức tập trung và bao gồm năm bài toán.
- Vòng 3, vòng bang (Landesrunde): diễn ra vào cuối tháng hai ở trung tâm của mỗi bang trong vòng hai ngày, mỗi ngày bốn tiếng rưỡi. Các thí sinh qua vòng vùng thì được tham gia vòng này.
- Vòng 4, vòng liên bang (Bundesrunde): vào đầu tháng ba hàng năm bao gồm thí sinh đến từ 16 bang. Hai ngày thi cho các đội, mỗi đội gồm khoảng 12 thí sinh đến từ một bang. Vào mỗi buổi sáng mỗi đội phải giải ba bài toán trong vòng bốn tiếng rưỡi. Sau đó là các hoạt động vui chơi. Cuối cùng là lễ trao giải.

Tất cả các bài toán cho các vòng đều được đăng tải trên trang www.mathematik-olympiaden.de trong tháng 10 cho vòng trường, tháng 12 cho vòng vùng, tháng 4 cho vòng bang và sau đó là vòng liên bang. Hàng năm đều được xuất bản một cuốn sách tuyển tập tất cả các đề thi và lời giải kèm theo.

3 vòng thi đầu tiên được tổ chức bởi các trường, thành phố và các bang. Vòng 4 mỗi năm sẽ được tổ chức ở một bang được chọn và bang đó sẽ chịu trách nhiệm tổ chức.

Toàn cảnh Toán Học trong nền giáo dục Pháp

Đinh Ngọc Thạch - CH Pháp

$\triangledown$

Để dễ dàng hơn cho việc tiếp cận bài viết, đầu tiên tôi xin giới thiệu khái quát với các bạn toàn cảnh chung của hệ thống giáo dục Pháp-một hệ thống giáo dục khá gần gũi và có nhiều nét tương đồng với hệ thống giáo dục nước ta.

Ngày nay, hệ thống giáo dục Pháp luôn luôn được tập trung và đặt nền tảng trên 3 yếu tố chính:

- Phổ cập giáo dục là bắt buộc cho đến 16 tuổi
- Các trường công đều miễn phí
- Giáo dục không phân biệt tôn giáo

Chính phủ Pháp luôn coi giáo dục là ưu tiên hàng đầu của quốc gia. Họ ban hành nhiều điều luật nhằm quản lý một cách triệt để cuộc sống học đường, các hoạt động giáo dục đào tạo ở phổ thông cũng như ở bậc đại học và việc đánh giá hệ thống giáo dục.

Trẻ em có thể đến trường ngay từ khi 3 tuổi (vào các trường mẫu giáo) nhưng chỉ bắt buộc bắt đầu từ 6 tuổi. Bậc tiểu học kéo dài trong 5 năm bao gồm 5 cấp độ lần lượt là CP (khóa học chuẩn bị), CE1, CE2 (khóa học cơ bản), CM1 và CM2 (khóa học trung bình). Giáo dục tiểu học được chia làm 2 giai đoạn là giai đoạn "rèn luyện" (CP-CE1) và giai đoạn "đào sâu" (CE2-CM1-CM2). Giáo dục mẫu giáo và giáo dục tiểu học tạo chung thành giáo dục bậc một cho trẻ từ 3 đến 11 tuổi.

Giáo dục bậc hai kéo dài trong khoảng 7 năm tương ứng từ lớp 6 đến lớp 12 như ở nước ta bao gồm 2 giai đoạn là trung học cơ sở (4 năm) và trung học phổ thông (3 hoặc 4 năm). Cuối cấp, học sinh phải trải qua một kì thi tốt nghiệp quốc gia (le Baccalauréat). Đây là điều kiện tiên quyết xác nhận kết quả phấn đấu của học sinh trong cả quá trình giáo dục bậc hai cũng như cung cấp cho học sinh quyền để có thể bước vào những chương trình giáo dục cao hơn.

Nhìn chung nước Pháp có một hệ thống giáo dục tập trung với một cơ cấu tổ chức tương đối phức tạp mà ở đó toán học cũng có một vai trò nhất định. Toàn cảnh toán học trong nền giáo dục Pháp mà tôi sẽ trình bày với các bạn dưới đây không đi sâu vào tất cả các chi tiết nhưng sẽ cố gắng đưa ra một cái nhìn tổng quan và chân thực nhất có thể về vị trí của toán học trong hệ thống giáo dục Pháp cũng như một cái nhìn bao quát các chương trình đào tạo khác nhau.

I - Giáo dục bậc một

Như đã trình bày ở trên giáo dục bậc một bao gồm giáo dục mẫu giáo và giáo dục tiểu học được chia ra làm 3 giai đoạn: giai đoạn "rèn luyện đầu tiên" (3 năm mẫu giáo), giai đoạn "rèn luyện cơ bản" (2 năm đầu tiểu học) và "giai đoạn đào sâu" (3 năm cuối tiểu học)

1.1. Mẫu giáo

Khái niệm toán học chưa được giới thiệu nhưng những đứa trẻ sẽ được trải nghiệm dưới hình thức "nghĩ" về toán học. Chúng sẽ tự hình thành những hiểu biết đầu tiên về số, các hình khối, các đại lượng và phát triển những kĩ năng liên quan đến cấu trúc không gian, thời gian. Những hoạt động giáo viên đưa ra cũng đồng thời xây dựng cho trẻ sự phát triển về suy nghĩ logic như so sánh, phân lớp, sắp xếp, tượng trưng hóa.

- Cấu trúc không gian thể hiện bằng việc trẻ biết xác định vị trí đồ vật, biết tổ chức di chuyển, biết mô tả những điểm nhìn khác nhau từ vị trí của trẻ hay từ vị trí của một người khác. Sự tiến bộ trong quản lý không gian của trẻ đi kèm với sự gia tăng một vốn từ vựng thích đáng.
- Cấu trúc thời gian thể hiện dựa trên việc trẻ làm chủ được 2 ý tưởng về tính chu kỳ và về một khoảng thời gian.
- Làm việc với các hình khối được tổ chức xoay quanh các trò chơi (ghép hình, lắp ráp, các trò chơi mô tả...). Các trò chơi này giúp trẻ định dạng được những hình khối thông thường (tam giác, hình vuông, hình tròn...) và một vài các đặc tính của chúng như thẳng, cong, nhọn...
- Việc tiếp cận các đại lượng (chủ yếu là độ dài, khối lượng, dung lượng) được hướng đến trẻ thông qua các hoạt động về so sánh, phân lớp và sắp xếp.
- Những rèn luyện đầu tiên liên quan đến số cho trẻ đã được các nhà khoa học về tâm lý và giáo dục nghiên cứu kĩ lưỡng. Chúng được tổ chức, làm quen với trẻ thông qua cấu trúc của chuỗi số đếm (ít nhất là đến 30). Số trở thành công cụ giúp trẻ kiểm soát số lượng. Chúng cho phép ghi nhớ, dự đoán kết quả của một vài hoạt động liên quan đến số lượng như tăng thêm, giảm đi, phân chia... mà không thông qua tính toán. Đó mới chính là mục đích của các trường mẫu giáo. Số được diễn tả bằng miệng, các kí hiệu để biểu diễn số tạo thành mục tiêu tiếp cận về sau.

1.2. Tiểu học

Trong giai đoạn này, học sinh sẽ được học từ 4,5-5,5 giờ toán mỗi tuần với 4 ưu tiên hàng đầu trong chương trình toán:

- Tập phân tích, giải quyết vấn đề-đây là nguồn gốc, nền tảng chính cho việc rèn luyện toán học;
- Tính nhẩm-đây được xem như một phần của việc ghi nhớ những kết quả đầu tiên và một phần khác liên quan đến khả năng xây dựng những kết quả không nhớ được (những tính toán phải suy nghĩ);

- Biết tổ chức việc giải quyết vấn đề theo từng bước và một số kĩ năng lập luận cần thiết;
- Khả năng trình bày lập luận một cách chính xác, biện luận cách làm và nhận biết được những lỗi sai trong bài giải.

Chương trình toán ở bậc tiểu học hướng dẫn học sinh xoay quanh 5 chủ đề chính: khai thác những dữ liệu số học, số tự nhiên, tính toán, không gian và hình học, đại lượng và phép đo.

Mục tiêu quan trọng của toán học ở bậc tiểu học là giúp học sinh thành thạo với các phép toán cộng, trừ, nhân chia, so sánh... trong hệ cơ số 10, biết xây dựng bảng, đồ thị. Ngoài ra học sinh cần biết những khái niệm đầu tiên về hệ quy chiếu, thẳng hàng, vuông góc, song song, so sánh độ lớn hai góc. Xử lý được một số dạng hình cơ bản như hình vuông, hình chữ nhật, hình tam giác, hình thoi, hình tròn kèm theo một số tính chất hình học đặc trưng của những hình khối này. Nắm rõ mối quan hệ giữa các đại lượng độ dài (cm2, dm2, m2, km2) cũng như việc tính toán diện tích.

II - Giáo dục bậc hai

Đây là giai đoạn quan trọng để phát triển sâu khả năng toán học trong mỗi học sinh. Thời lượng môn toán ở bậc trung học cơ sở thay đổi nhẹ theo từng khối lớp như khoảng 4H/1tuần trong giai đoạn quan sát và hòa nhập với giáo dục bậc hai (lớp 6), giảm nhẹ 3,5H/1tuần với khối lớp 7 và 8 nhưng ở 2 khối lớp này có 1H hành trình khám phá toán học rất thú vị mỗi tuần và cố định 4H/1tuần với khối lớp 9.

Ở bậc trung học phổ thông, thời lượng toán không cố định mà tùy theo chương trình học học sinh lựa chọn theo học. Nếu như tương ứng ở nước ta, hệ trung học phổ thông chia làm 2 loại là các lớp chuyên và các lớp thường thì ở Pháp lại có 3 hướng chính là hướng "giáo dục chung", hướng kĩ thuật và hướng giáo dục nghề. Ứng với mỗi hướng giáo dục khác nhau, học sinh nhận những loại bằng tốt nghiệp khác nhau. Trong 68% học sinh đỗ tốt nghiệp mỗi năm, tỷ lệ lần lượt là: bằng tốt nghiệp chung: 34%, bằng tốt nghiệp kĩ thuật: 21%, bằng tốt nghiệp nghề: 13%.

Mỗi hướng giáo dục này lại được chia ra làm nhiều loại khác nhau:

- Hướng "giáo dục chung" có 3 loại: Văn học (L) (chương trình giáo dục chủ yếu là tiếng pháp, triết học và tiếng nước ngoài), khoa học kinh tế và xã hội (ES) (chương trình giáo dục chủ yếu dựa trên kinh tế, xã hội), Khoa học (S) (chương trình giáo dục chủ yếu dựa trên toán học, vật lý và các môn khoa học đời sống)
- Hướng kĩ thuật bao gồm 4 loại: Khoa học và kĩ thuật chuyên sâu (STT), Khoa học và kĩ thuật công nghiệp (STI), Y học và khoa học xã hội (SMS), Khoa học và kĩ thuật phòng thí nghiệm (STL)

Khối lớp	Loại	Thời lượng toán/tuần
Lớp 10	Tất cả	4h-5h
Lớp 11	L	2h-5h
Lớp 11	ES	3h-5h
Lớp 11	S	5h
Lớp 12	L	0h-3h
Lớp 12	ES	4h-6h
Lớp 12	S	5,5h-7,5h

Thời lượng toán thông thường trong các trường cấp 3 theo hướng "giáo dục chung"

Chương trình toán ở bậc trung học cơ sở chủ yếu về hình học, số học và hàm số.

- Về hình học, học sinh được học cách chứng minh một bài toán hình học, về quan hệ Pythagore, định lý Thalès, các phép biến hình, tịnh tiến, các hàm lượng giác (sin, cos, tan...), vector được giới hạn ở việc tính tổng 2 vector, tọa độ của vector trong mặt phẳng, các thí nghiệm trên hình khối...
- Về số học, học sinh được bắt đầu bằng các mối quan hệ số học cơ bản, giải phương trình, lũy thừa, sử dụng công thức tính toán số học, tổng quát hóa từ một công thức đơn giản, giải quyết những vấn đề số học liên quan đến lập trình...
- Về hàm số, học sinh được tiếp cận với khảo sát một số hàm đơn giản, vẽ đồ thị giúp nghiên cứu những bài toán về chuyển động đều, vận tốc trung bình, phần trăm, đặc biệt học sinh sẽ được giới thiệu sơ qua về các dãy thống kê...

Chương trình toán ở bậc trung học phổ thông phân bố phức tạp hơn. Học sinh theo các hướng "giáo dục chung" và hướng kỹ thuật có chương trình toán lớp 10 không khác nhau và sẽ thay đổi ở lớp 11 và 12 tùy theo chuyên ngành chọn lựa. Chúng ta cùng xem qua "trọng lượng" của toán học trong kì thi tốt nghiệp:

Loại	Thời gian làm bài	Hệ số
L	1,5h hoặc 3h tùy theo lựa chọn	Tương ứng 2/38 hoặc 4/34
ES	3h	5/37(+2 nếu chuyên về toán)
S	4h	7/38(+2 nếu chuyên về toán)

Chúng ta thấy rõ rằng, ngay cả với những học sinh của khối khoa học (S), môn toán cũng chỉ chiếm 20%.

Sẽ thật khó để có thể giới hiệu chính xác và đầy đủ chương trình toán học cho tất cả các loại khác nhau của bậc trung học phổ thông, ở đây tôi chỉ xin giới thiệu ngắn gọn các chương chính:

- "Số và hàm số" bao gồm vẻ tự nhiên và biểu diễn số, giá trị gần đúng, kĩ năng tính toán bằng tay và bằng máy, số nguyên tố, bậc, giá trị tuyệt đối, khái niệm hàm và khảo sát, các hàm căn bản, công thúc đại số, phương trình và bất phương trình (chủ yếu là bậc nhất), các phương pháp giải đại số và hình học...
- "Hình học" bao gồm hình học trong không gian, cấu trúc không gian và hình học giải tích...

- "Thống kê" bao gồm khảo sát sự biến động của một mẫu chọn, mô phỏng, thống kê mô tả...

★ *Các trường nghề:*

Mục đích chủ yếu là giúp học sinh có một sự lành nghề tối thiểu. Thời lượng môn toán không nhiều, chỉ khoảng 2h mỗi tuần và xoay quanh các vấn đề như cấp số cộng, cấp số nhân, các hàm thông dụng, thống kê mô tả, các môn toán tài chính, hình học vector, hình học trong không gian, lượng giác, phương trình và bất phương trình bậc 2, đạo hàm-tích phân, logarithme-lũy thừa, dãy thống kê 2 biến, phương trình vi phân, xác suất.

Ở Pháp việc dạy toán ở bậc phổ thông phải đương đầu với những thay đổi quan trọng, đầu tiên là sự cạnh tranh với sự phát triển của những môn học khác, đòi hỏi việc dạy toán phải khẳng định được vị trí của mình trong chương trình cũng như giá trị nghề nghiệp trong tương lai.

Trở thành môn học quan trọng, toán học lại đối mặt với sự gia tăng tính không đồng nhất của học sinh và phải tìm cách thích ứng với từng trình độ, sở thích khác nhau. Nó cũng phải đổi mới và chú trọng củng cố các mối quan hệ giữa toán học với các môn học khác cũng như giữa toán học với xã hội. Cùng với sự phát triển không ngừng của khoa học kĩ thuật, giáo dục toán học không còn chỉ mang tính "lý thuyết" mà cần có những hiệu ứng trên "thực hành". Một thực tế đáng buồn là giới trẻ Pháp ngày càng mất dần niềm tin vào khoa học và toán học cần phải góp phần chống lại điều này. Có như vậy nền toán học của đất nước đã sản sinh ra những đứa con tài năng như Évariste Galois, Pierre de Fermat, Jean-Pierre Serre... mới có thể tiếp tục phát triển vững mạnh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Panorama des mathématiques dans l'éducation française, Jean-Luc Dorier (trưởng ban giáo dục toán Pháp) cùng với các cộng sự.

Nhật ký IMO 2009

Hà Khương Duy, Phạm Hy Hiếu các bạn Đội tuyển IMO Việt Nam

▽

Ngày 11/7/2009

11h30 ngày 11/7/2009, chiếc Boeing 777 của hãng hàng không quốc gia Vietnam Airlines cất cánh, chở theo 6 thành viên của đội tuyển, 4 thầy quan sát viên và 1 thầy phó đoàn rời Tổ quốc lên đường. Ta hãy chúc họ chiến thắng rực rỡ trong ngày trở về.

Ngày 12/7/2009

10 tiếng bay trên máy bay đối với những người lần đầu bay lâu như vậy thực sự là rất mệt mỏi nên hầu như các sĩ tử của chúng ta đều chìm trong giấc ngủ ngon lành, trừ những lần "bị" tiếp viên đánh thức dậy cho những bữa ăn giữa chuyến bay. Ngoài ra, chúng tôi còn để ý thấy Duy có vài lần thức dậy, bật đèn ghế của mình để ghi chép gì đó vào quyển sổ tay IMO report của cậu. 6h30p giờ địa phương, máy bay hạ cánh xuống sân bay Frankfurt - thế là cả đoàn đã đến nước Đức! Thủ tục nhập cảnh rất nhanh chóng, vì hầu như chỉ cần đưa hộ chiếu cho nhân viên hải quan là được. Tập trung nghỉ ngơi được một lát, mọi người lại "tay xách nách mang" các loại ba-lô, va-li lên đường đến bến tàu. Đến nơi, vì còn 2h00 nữa tàu mới đến, lại được thầy Khoái đi trước thông báo rằng khi lên tàu sẽ cảm thấy đói còn giá thức ăn trên tàu lại đắt nên thầy Minh dẫn Hiếu, Duy và Hùng đi ra hàng McDonald's gần ga tàu để mua hamburger cho mọi người. Tàu đến, và chỉ dừng lại đúng 3 phút. Cả đoàn thật sự cảm thấy bất ngờ về sự làm việc đúng giờ, chi tiết đến phút của người Đức. Tàu chạy từ Frankfurt, băng qua Bonn, Koln, dọc theo sông Reine và cuối cùng cũng đến Bremen. Suốt chuyến tàu, lúc đầu còn có vài người hứng thú chụp ảnh phong cảnh nhưng sau đó cả 6 sĩ tử đều chìm vào giấc ngủ, có lẽ vì chưa kịp thích nghi với múi giờ mới. Khi tàu đến Bremen, đoàn Việt Nam được đón tiếp bởi 2 cô guide người Đức (xin tả: họ ăn mặc cực kỳ diêm dúa và hippy), cùng một chàng guide Việt Nam (sau này chính là guide của đoàn): Lê Trần Thái (Thai Le Tran), sau này được đoàn Việt Nam đặt cho cái tên Việt Kiều: Tony Thái. Anh Thái sinh ra và lớn lên ở Đức, đã từng về Việt Nam 3 lần nhưng nói tiếng Việt cũng chỉ bập bẹ. Anh Thái dẫn đoàn đến khách sạn Inter City, nhận phòng và nghỉ ngơi, và hẹn ngày hôm sau lúc 10h30 sáng sẽ có xe đến đón đoàn Việt Nam vào trường Đại học Jacobs tập trung với các đoàn khác. Chiều hôm ấy đoàn đi ăn ở quán Mai-Mai trong nhà ga, được cô chủ quán người Việt tiếp đãi, cho uống nước ngọt miễn phí, thật tình thấy hơi ngại nhưng thức ăn ở quán này rất ngon lại rẻ nên cả đoàn hứa với cô chủ quán sẽ quay lại đây sau khi thi xong. Đêm ấy, ai cũng ngủ ngon lành vì mệt sau chuyến đi dài.

Ngày 13/7/2009

Ngày thứ nhì trên nước Đức mở ra với bữa ăn sáng vô cùng khó chịu. Toàn bơ sữa, bánh mì, phô mai, khó chịu từ mùi đến cách ăn. Các sĩ tử dù cảm thấy khó ăn nhưng cũng phải cố gắng "hoàn thành" nhiệm vụ ăn sáng, nếu không sẽ phí 14 Euro tiêu chuẩn ăn sáng của Bộ. 10h30, rất đúng hẹn – phong cách của người Đức – anh Thái có mặt để dẫn đoàn đến Đại học Jacobs. Các sĩ tử được chở bằng một xe taxi đến "trại lính", chuẩn bị cho một "trận đánh" lớn nhất cuộc đời học sinh của họ. Ấn tượng đầu tiên là đường đi được làm rất mịn, rất bằng phẳng chứ không lồi lõm, đầy "ổ gà - ổ voi" như ở Việt Nam, hơn nữa hai bên đường trồng cây xanh nên dù đi vào lúc giữa trưa, trời vẫn rất mát mẻ. Xe đi ngang qua một hải cảng, những cánh đồng rộng lớn với cối xay gió rồi lại đến những vạt cây rừng cứ lướt qua cửa xe, và cuối cùng dừng lại trước cửa trường Đại học Jacobs – đích đến của cuộc hành trình. Đoàn lấy hành lý rồi cùng vào làm thủ tục check in. Thủ tục diễn ra khoa học và khá nhanh chóng. Mỗi thành viên đều được phát 1 tấm thẻ ghi tên mình, kèm theo vé để được sử dụng miễn phí các phương tiện giao thông, bản đồ campus của Đại học Jacobs, ba lô, nón và một chiếc áo trên đó in logo IMO 2009. Sau đó, đoàn được phát chìa khóa phòng. Đường di chuyển đến các khu nhà ở khá dài, và các sĩ tử của chúng ta lần lượt gặp mặt đội tuyển Canada, Singapore và đã chào hỏi họ được vài câu. Rõ ràng là trình độ tiếng Anh của đội tuyển ta đủ để giao tiếp với họ! Về phòng, ổn định chỗ ngủ và nghỉ ngơi một chút, cả đội đến khu nhà của thầy Khắc Minh để ăn trưa: bữa ăn có cả thức ăn châu Á nên dễ chịu hơn nhiều so với bữa sáng ở khách sạn. Sau bữa trưa, cả đội có khoảng 3h30p để nghỉ ngơi, và vào lúc 6h00, anh Thái gọi tất cả cùng ra sân tập thể thao. (...). Sau phần thi đấu thể thao chung Hải, Cương đi chơi tennis, Thành về phòng một mình còn Duy, Hùng và Hiếu đã giao lưu được với đội tuyển Mông Cổ trong khi cùng chơi bóng rổ với họ. Đoàn Mông Cổ gồm các thành viên từ 14 – 16 tuổi nhưng lại rất thích thú trong việc "đố và khoe" với các thành viên của chúng ta. Họ hỏi Duy "Cậu có biết bất đẳng thức AM – GM, Cauchy – Schwarz, Tchebychev không?", làm các cậu Việt Nam cười thầm. Cuối cùng, Duy và Hiếu đi tìm trong máy tính, chép vào USB tặng các bạn Mông Cổ bài viết về phương pháp EMV của Phạm Kim Hùng và *"On a class of 3 variable inequalites"* của Võ Quốc Bá Cẩn, các bạn Mông Cổ cũng rất quen thuộc với 2 cái tên này nên đã cảm ơn rất nhiều. 7h00, cả đội cùng ăn tối. Các bữa ăn gần như đã trở nên quen thuộc và dễ chịu hơn nhiều cho các sĩ tử của chúng ta.

Ngày 14/7/2009

7h00, anh Thái đánh thức đội tuyển dậy để ăn sáng và chuẩn bị cho lễ khai mạc. Trong khi bữa trưa và bữa tối dần trở nên dễ chịu thì bữa sáng vẫn "khó nuốt" như hôm đầu ở khách sạn Inter City. Ăn sáng vội vàng xong, 6 người quay về phòng thay đồng phục của đội tuyển rồi ra tập trung ở bến xe bus, chuẩn bị đến nơi làm lễ khai mạc. Đội tuyển Việt Nam ngồi trên xe bus số 7 cùng các đội Indonesia, Cambodia, Malaysia, Thailand và Iran. Ấn tượng nhất trong số đó là đội tuyển Iran với 6 chàng trai cao lớn và gương mặt có nhiều nét rất giống người phương Tây. Các chàng trai Iran cũng rất thân thiện và cởi mở, đã mời đội tuyển Việt Nam cùng chụp ảnh với họ trước khi lên xe. Đương nhiên, họ không quên lời chúc thi tốt và có những kỷ niệm thật đáng nhớ với IMO 2009. Xe khởi hành, đi khoảng 30p thì đến nơi làm lễ khai mạc: một địa điểm "trông bề ngoài như một quán bia, còn trông bên trong như một quán rượu" (nhận xét của Duy). Chương trình của lễ khai mạc theo nhận xét của các sĩ tử của chúng ta thì cũng không tốt, đặc biệt là tiết mục nhảy hip hop làm mất đi tính trang trọng của buổi lễ - có lẽ điều này hợp với phong cách của học sinh nước ngoài hơn chăng? Nhưng dù sao đi nữa, trong lễ khai mạc cũng còn có tiết mục tính nhẩm nhanh bằng các mẹo mực, giúp người trình diễn có thể nhân nhẩm 987 với 804 trong thời gian ngắn. Vui và ấn tượng nhất trong trò chơi tính nhẩm nhanh này là ở chỗ người trình diễn nói đầy thách thức: *"If I give this little problem to the young mathematicians here, I bet there will be many results"*, và sự thật, Hiếu để ý thấy đội tuyển Hy Lạp ngồi ngay trên đội tuyển Việt Nam tìm được 6 kết quả *đôi một khác nhau* (!). Quan trọng nhất trong lễ khai mạc là màn diễu hành của các nước tham gia. Phần này được tổ chức khá hoành tráng, tuy nhiên vì có đến 104 nước tham dự nên thời gian cho mỗi nước là không nhiều. Có một số nước mang linh vật của mình lên sân khấu khi diễu hành, có nước lại chuẩn bị những quả bóng giấy trong đó ghi đôi điều về nước của họ hay những đồng xu của nước ấy để khi lên sân khấu, ném xuống phía dưới cho khán giả. Riêng đoàn Việt Nam không ngờ đến điều này nên chỉ "tặng" cho bạn bè năm châu những cái vẫy tay chào thân thiện rồi lại quay về chỗ ngồi. Ấn tượng nhất có lẽ là 6 cô gái của các tiểu vương quốc Ả rập thống nhất với trang phục hồi giáo rất đặc trưng, không lẫn vào đâu được. Sau lễ khai mạc, xe chở tất cả quay lại ký túc xá để nghỉ ngơi. 6h00, bữa tối diễn ra cũng ngắn gọn, và sau đó, khoảng 8h00, thầy Minh gọi tất cả vào phòng của Cương rồi dặn thật kỹ về nội qui phòng thi. Từ việc được mang những gì vào phòng thi đến việc phải làm bài như thế nào, viết lên tờ giấy nào, cho bài làm vào phong bì ra sao đến việc nếu có thắc mắc về đề, phải đặt câu hỏi ra sao cho hợp lệ, đến cả chiến thuật làm bài, cách "câu điểm" nếu không làm được là sao, rồi việc sử dụng 5 tấm thẻ *"More paper, Water, Toilet, Question & Answer, Help"* như thế nào, ý nghĩa của chúng, etc. Ngần ấy việc mà mất đến 2h. Đến 10h00, thầy Minh bảo tất cả cùng về ngủ để có sức mai làm bài.

Ngày 15/7/2009

Ngày thi thứ nhất mở ra cũng bằng một bữa ăn sáng qua loa, sau đó tất cả tập trung ra xe bus để đến địa điểm thi – một hội trường trông giống như một cái nhà kho ở hải cảng nhưng rộng đến mức có thể chứa được tất cả các thí sinh. Hội trường chia làm 6 block, mỗi nước có 1 thí sinh ngồi trong 1 block sao cho 2 người bất kì cùng một nước không bao giờ nhìn thấy được nhau – một bài toán sắp xếp khó đấy nhỉ?! Giờ thi đã đến, các sĩ tử bước vào phòng thi với tâm trạng hồi hộp và cũng không kém phần háo hức. Sau 4h30p, tất cả nộp bài, ra ngoài cửa. Đề thi ngày đầu gồm bài 1 là 1 bài lý thuyết số khá đơn giản, có lẽ là N1 của Shortlist, bài 2 là một bài hình mà về sau Hiếu và Hùng bảo "không xứng đáng làm đề thi IMO", riêng Hiếu "khoe" thành tích là chỉ đọc đề, chưa vẽ hình đã biết làm (!), còn bài 3 là một bài toán dãy số, liên quan đến cấp số cộng, có lẽ là A6 hay A7, đúng là khá hóc đối với những người không quen. Tình hình làm bài của đội tuyển trong ngày thứ nhất, tốt nhất là Duy và Hùng – giải quyết trọn vẹn cả 3 bài, tiếp đó là Hiếu và Cương: làm trọn vẹn 2 bài đầu và "cắn" một ít của bài 3 (nhưng ngay sau đó, Cương phát hiện thiếu sót trong bài 1), Thành và Hải hôm đầu có lẽ bị run tay, làm bài không tốt, mỗi cậu chỉ được 1 bài trọn vẹn nhưng cũng có làm được một chút ở những bài khác. Chiếc xe bus chở đội tuyển quay về trong nhiều tâm trạng khác nhau. Bữa trưa hôm ấy diễn ra nhanh, rồi tất cả lại cùng ngủ một mạch đến giờ ăn tối. Ăn tối xong, thầy Minh lại gọi 6 sĩ tử tập trung lại, dặn dò về chiến lược làm bài của ngày hôm sau. Đầu tiên, thầy nói rằng 2 bạn Duy và Hùng là ứng cử viên cho chiếc huy chương Vàng, tuy nhiên Hiếu và Cương cũng có thể, còn Thành và Hải nếu hôm sau cố gắng làm bài, vẫn có thể giữ được màu huy chương Bạc. Tuy nhiên, điều quan trọng, thầy nhấn mạnh, là phải có chiến thuật làm bài hợp lý. Nếu không, có thể ta sẽ đánh mất lợi thế của ngày thứ nhất, hoặc có thể, đã tệ lại càng tệ hơn. Rồi thầy đi vào các vấn đề chi tiết hơn, thầy bảo rằng điều quan trọng nhất là hãy coi như ngày thứ 2 mình chỉ phải làm bài 4 và bài 5 quên mất sự có mặt của bài 6 kẻo gặp phải vấn đề khó, mất thời gian và mất lợi thế. Thầy cũng căn dặn rằng đừng nên xác định tư tưởng là ngày thứ 2 đề thi sẽ còn một bài hình nữa, vì hình vốn là thế mạnh của đội tuyển Việt Nam năm nay, hơn nữa ngày thứ 2 chắc chắn phải có tổ hợp (vì ngày đầu chưa có). Lúc đó, cả bọn đều để ý thấy sự thất vọng trên gương mặt Hiếu, nhưng liền sau đó, Hiếu phát biểu rất 'mạnh dạn': "Thưa thầy, nếu ngày mai bài 6 là hình thì em nghĩ chúng ta vẫn có thể tập trung vào làm nó, có khi còn tốt hơn là làm bài tổ hợp nếu nó là bài 5 chưa chắc mình đã làm được". Thầy Minh lập tức nhắc nhở cậu về gương Phạm Đạt – thành viên đội tuyển năm trước: được coi là "vua hình" trong giới học sinh Việt Nam nhưng vẫn phải "chào thua" trước bài 6, nhắc cậu đừng chủ quan, hãy nghe lời thầy thì hơn. Xong buổi "giáo huấn", thầy Minh không quên chúc các sĩ tử ngày mai sẽ làm bài tốt hơn ngày trước và chúc tất cả ngủ ngon. Đêm ấy ai cũng ngủ sớm, có lẽ vì làm bài căng thẳng hơn dự lễ khai mạc chăng?!

Ngày 16/07/2009

Ngày thi thứ nhì cũng bắt đầu với bữa sáng. Nhưng bữa sáng hôm ấy trầm lặng hơn hôm trước, vì không chỉ có các sĩ tử Việt Nam mà ngay cả các đoàn khác cũng có những tâm trạng khác nhau do ngày thi thứ nhất mang lại. Từng miếng bánh mỳ được nhai nhanh nuốt lẹ trong im lặng, tất cả chỉ nhìn nhau, gần như không nói năng gì. Nhưng cuối cùng, tiếng cười vang lại xuất hiện khi Hiếu và Duy phát hiện ra Fan Zheng một thí sinh người Trung Quốc, có cách ăn uống hết sức lập dị. Cậu Fan Zheng ấy ăn bánh mì chỉ quết bơ ở ngoài, đã thế khi ăn lại cúi mặt xuống, đã thế khi ăn xong chỉ đi lấy li sữa mà khi quay lại ghế ngồi cũng lạc đường – có lẽ Trung Quốc huấn luyện các thành viên của họ kĩ đến mức mọi người đều bị "đơ": làm Toán thì rất giỏi nhưng ngoài ra chắc không biết làm gì. Chiếc xe bus đợi sẵn ngoài cổng trường, chở các sĩ tử đến địa điểm hôm trước: họ đã sẵn sàng "đối mặt" với 3 bài toán hứa hẹn sẽ khó khăn hơn, vì theo nhận xét của thầy Minh, đề ngày đầu tiên vẫn còn khá nhẹ nhàng. Đề bài ngày thứ hai đúng như thầy Minh dự đoán: có phần phức tạp hơn ngày đầu, nó bắt đầu bằng một bài hình học với yêu cầu tính góc và một "cạm bẫy" cho những kẻ hay suy nghĩ vấn đề đơn giản, nhưng may mắn thay, trong đề đã ghi rõ "tìm các giá trị có thể có của $\angle BAC$" như một lời cảnh báo rằng có thể có nhiều nghiệm nên các sĩ tử Việt Nam không ai làm sai bài này, riêng chỉ có Hiếu là không hài lòng về cách làm của mình: cậu không tìm được cách làm thuần túy mà phải dùng cách tính toán, việc tính toán của cậu dài đến 3 mặt giấy thi, hơn nữa lại rất phức tạp. Bài 5 là một bài phương trình hàm trên tập số nguyên dương, có lẽ tầm A4 hay A5 của Shortlist. Khi ra khỏi phòng thi, cả 6 người đều báo cáo là làm được, nhưng ngay sau đó, Cương phát hiện ra cậu ngộ nhận ngay từ bước đầu tiên, và đã ra vô số nghiệm hàm, trong khi đáp số là $f(n) = n$, còn Hùng cũng nhận ra bước qui nạp của cậu chưa đầy đủ. Duy, Hiếu, Hải, Thành thì đều chưa thấy sai sót gì. Bài 6 thực sự là một vấn đề đáng nói: bài toán Grasshopper (con châu chấu), về sau được đánh giá là bài khó thứ nhì trong 50 năm IMO, chỉ thua bài 6 của ở IMO 2007 tại Việt Nam. Bài 6 đội tuyển Việt Nam trừ Duy ra không ai có chút ý tưởng nào cho lời giải. Hiếu có viết được vài chữ linh tinh vào, về sau đượct thầy Minh nhận xét "Những gì em viết đều đúng, nhưng không phải là lời giải". Rời khỏi phòng thi, và đã nắm được tất cả kết quả làm bài của mình, các sĩ tử Việt

Nam còn mang nhiều màu sắc tâm trạng hơn ngày thứ nhất. Về đến ký túc xá, cả đội vui mừng gặp lại thầy Hà Huy Khoái – người trưởng đoàn đã lên đường trước từ ngày 10/7, và bị cách ly với các thí sinh trong suốt thời gian vừa qua. Thầy Khoái cho biết tình hình là ngày đầu tiên, Duy chắc chắn được 21đ, Hùng thì có thể 19đ đến 21đ, tùy vào việc thầy có cãi được với jury không, Hiếu ngày đầu chắc chắn 15đ, Hải và Thành đều có thể từ 9đ đến 11đ, còn Cương có thể 12đ đến 13đ, tùy vào việc thầy có bảo vệ được học trò trước jury hay không. Quá mệt mỏi, cả bọn ăn vội bữa trưa, nhưng thầy Khoái và thầy Minh đã vào ăn cùng, và còn ngồi thảo luận với Duy về bài 6 của cậu. Lúc này Duy mới nhận ra rằng mình xét còn thiếu trường hợp, và những trường hợp cậu thiếu, tuy là một phần nhỏ các trường hợp nhưng lại rơi vào các trường hợp khó nên thầy Khoái nói bài 6 cậu chỉ được cùng lắm là 4đ, đương nhiên như thế đã là quá xuất sắc rồi. Sau bữa trưa là một giấc ngủ dài để quên bớt những ấn tượng về hai ngày thi, chuẩn bị cho những ngày vui chơi, tham quan du lịch sắp tới. (. . .). Bữa tối diễn ra cũng nhanh chóng vì thầy Minh dặn sau bữa tối phải tập trung để trình bày chi tiết tình hình làm bài cho thầy. Sau buổi họp với 6 sĩ tử mà không thu được thông tin gì nhiều, trừ việc phát hiện ra thêm một số lỗi của Hùng ở bài 5, thầy Minh ra về. Thầy Khoái tiếp tục ngồi lại, nói về việc sẽ phải chấm bài ra sao: thì ra ngày hôm sau sẽ chấm các bài 1,4,3,6 tương ứng vào lúc 9h00 sáng, 12h00, 3h00 chiều và 6h00 tối. Mọi chuyện gần như đã ngã ngũ: Duy chắc chắn Vàng, Hiếu và Hải chắc chắn Bạc, Thành đang ở giữa Đồng và Bạc còn Hùng đang ở giữa Bạc và Vàng, riêng Cương có nguy cơ phải nhận HM, nhưng có lẽ vẫn là Đồng – theo thầy Khoái nói. Sau buổi nói chuyện với thầy Khoái, đám học sinh lại tụ tập trao đổi với nhau. 11h30p, chuông điện thoại lại reo vang: thầy Minh gọi Hải, Cương và Hiếu sang phòng thầy để nói lại một số chỗ trong bài làm. Cả 3 tìm áo khoác cho đỡ lạnh rồi chạy đi ngay. Đến nơi, thầy Minh hỏi Cương cách làm các bài của cậu ở ngày thứ 2. Lúc ra khỏi phòng thi, Cương nói ngày 2 làm được 2 bài, nhưng sau khi nói chuyện với thầy Minh, cậu nhận ra bài 5 đã hoàn toàn bỏ đi, còn bài 4 có lẽ "cứu vớt" được chút ít. Có lẽ lúc này Cương rất buồn. Về phần Hải, bài 4 cậu dùng định lý Ceva sin nên không thấy rõ việc phải làm chiều đảo như thế nào, thầy Minh sợ mất điểm nhưng Hải trình bày lại rõ ràng mọi thứ và đã xóa được nỗi lo ấy của thầy. Câu chuyện vui nhất có lẽ là của Hiếu: thầy Minh nói rằng tính toán của cậu không biết đúng không, vì các thầy đã thử tách nhân tử mãi mà không đưa đến được dạng cuối cùng như cách làm của cậu. Lúc đó, Hiếu rất lo lắng, lập tức chạy về tìm laptop, bật Maple lên và. . . tính lại. Maple cho ra kết quả, đúng như biểu thức của cậu, nhưng nhìn rất "dễ sợ". Lúc này, cả Hiếu và thầy Minh đều thở phào nhẹ nhõm, yên tâm về bài làm. Nói chuyện với thầy Minh một lúc, cả 3 được "tha", cùng về và ngủ say giấc đêm ấy.

Ngày 17/07/2009

Ngày đi chơi dã ngoại thứ nhất. 10h sáng, tất cả cùng đến bảo tàng xuất nhập cảnh của bến cảng Bremen – một hải cảng lớn nhất thế giới. Nơi đây lưu trữ thông tin về những đợt nhập cư, xuất cư của người các nước và cả người Đức thông qua hải cảng này. Nhờ vào bảo tàng Bremen haven (haven trong tiếc Đức nghĩa là hải cảng) mà tất cả hiểu thêm về cuộc sống trên tàu như thế nào, tuy nhiên cũng có những điều rất nhàm chán, cụ thể là cuộc đời của những người không lấy gì làm nổi tiếng mà nhập cư, xuất cư nhưng người hướng dẫn viên cứ bắt cả đội tuyển phải nghe đi nghe lại. Tóm lại, việc tham quan bảo tàng Bremen Haven chỉ thú vị trong khoảng 30p đầu, sau đó tất cả đều bước đi chán nản. Trưa, tất cả các đoàn được đưa vào một phòng rộng và thoáng, đủ chỗ để ngồi và ăn túi thức ăn được phát đem theo như hôm đi dự lễ khai mạc. Đến chiều, tất cả được vào tham quan bảo tàng thời tiết (climate house). Nơi đây thu nhỏ các vùng đất khác nhau trên thế giới với địa hình, khí hậu, nhiệt độ, mùi vị... đặc trưng của từng vùng và sắp xếp thành vòng theo một kinh tuyến để tạo cho khách tham quan cảm giác như là được đi vòng quanh thế giới. Chuyến tham quan ấy nhìn chung là thú vị, nhưng mệt mỏi vì phải đi bộ qua những chặng đường dài, đã thế, có những lúc đi vào vùng mô phỏng sa mạc Sahara của châu Phi, cát bám vào giày làm giày trơn, một lúc sau lại đến Nam Cực với những tảng băng trôi lớn, làm các thành viên đội tuyển nhiều lần suýt trượt ngã. Rời khỏi climate house, đoàn Việt Nam phải tìm mãi mới gặp được guide của đoàn mình. Thầy Minh về sau nhận xét "Lẽ ra guide là phải 'bám' đoàn, nhưng guide Việt Nam chắc chỉ lo 'bám' các chị guide xinh đẹp của mấy đoàn Trung Quốc, Nhật, Thái Lan thôi". (...)

Ngày 18/07/2009

Ngày đi chơi dã ngoại thứ hai. Hôm nay không bị anh Thái gọi dậy sớm nên cả đội đều ngủ đến tận 10h00, hậu quả là không ai kịp ăn sáng mà vẫn phải lên xe đi vào trung tâm thành phố Bremen. Hành trình của đội tuyển Việt Nam bắt đầu từ dưới một chân cầu, nơi có khu chợ bán những món đồ second hand rẻ tiền, nhưng thực ra trông cũng còn hơi mới, có lẽ vẫn còn mua được. Chợ bán chủ yếu là các đồ điện tử và quần áo, nhưng cũng có một số món lưu niệm. Tại khu "chợ trời" ấy, 2 nước láng giềng Việt Nam và Cambodia đã có mộ pô ảnh kỷ niệm với nhau. Rời "chợ trời", cả đội đi đến quảng trường Bremen, nơi có tượng tướng Bismack – người anh hùng có công thống nhất đất nước, vào thăm nhà thờ Bremen và lại quay lại đi dạo xung quanh quảng trường. Thành phố Bremen êm đềm ngay cả ở trung tâm với những ngôi nhà đỏ hiền hòa bao quanh tháp chuông nhà thờ cao gần 100m. Nhà thờ Bremen có 2 tháp chuông, đều bị tàn phá vì bom đạn trong Đại chiến thế giới lần thứ 2, nhưng một tháp đã được tu sửa hoàn toàn, còn tháp kia vẫn đang chờ vào lòng thành quyên góp của những người theo đạo. Bước vào trong nhà thờ, chúng tôi thấy mái vòm được chạm trổ rất tinh xảo những hình ảnh tôn giáo, ấn tượng nhất là bức tranh về bữa tiệc ly cuối cùng với hình ảnh Chúa Jesus cùng các tông đồ. Ra khỏi nhà thờ, đoàn được anh Thái dẫn đến trước biểu tượng của thành phố Bremen: con gà trống đứng trên lưng con mèo, con mèo đứng trên lưng con chó, và con chó đứng trên lưng con lừa. Hình ảnh ấy xuất phát từ câu chuyện cổ tích quen thuộc "Những nhạc sĩ thành Bremen", và tương truyền rằng ai đến cầm vào 2 chân con lừa và ước một điều gì thì điều ấy sẽ trở thành hiện thực, thế là cả 6 thành viên đội tuyển tranh nhau nắm lấy chân lừa và chụp ảnh. Sau tiết mục "sờ chân lừa" là việc đi dạo phố. Mọi người không quên ghé qua những hàng lưu niệm dọc đường để mua những hình ảnh về Bremen, đặc biệt là hình ảnh 4 con vật thiêng kể trên. Việc mua bán ở Đức diễn ra hết sức lịch sự, kể cả đối với những hàng dọc lề đường như thế này. Thậm chí người bán hàng để khách tự do lựa chọn mà không cần trông coi, không lo bị trộm cắp. Đến trưa, mọi người ngồi trên những chiếc ghế gỗ bày giữa quảng trường Bremen để ăn bánh được phát theo trong túi thức ăn từ sáng. 12h00 nhưng hôm ấy gió mạnh nên ai cũng cảm thấy lạnh. Khổ nhất là Duy vì lúc sáng chủ quan không mang theo áo khoác. Ăn trưa xong, anh Thái lại dẫn mọi người vào tiệm chocolate Hachez để mua chocolate về làm quà. Đây là nhãn hiệu tự sản xuất và tự bán chocolate nổi tiếng về chất lượng tại Đức, nhưng giá thành vì thế cũng hơi cao hơn bên ngoài. 2h00, cả đoàn quay ra xe bus để quay về Đại học Jacobs. Chiều hôm ấy là buổi tiệc barbercue ngoài trời, và đây là lần đầu tiên mọi người được chứng kiến "tài năng" của Hiếu và Duy: 2 cậu vòng đi vòng lại để lấy thức ăn, cuối cùng Hiếu đã ăn 4 miếng thịt lợn, 1 miếng thịt gà còn

Duy 3 miếng thịt lợn, 1 miếng thịt gà, mỗi miếng đều có diện tích hơn lòng bàn tay một chút, đã thế hai cậu này còn uống Coca Cola liên tục và ăn thêm bắp rang, salad trước sự ngỡ ngàng của không chỉ đội Việt Nam mà cả các đội xung quanh. Nhưng cũng phải công nhận, bữa barbercue ấy là bữa ăn ngon nhất trong suốt khoảng thời gian ở Đại học Jacobs của đoàn Việt Nam. Kết thúc bữa ăn, mọi người về phòng nghỉ, riêng Hiếu và Duy chạy đến khu nhà jury đang chấm điểm để "xem trước" kết quả. Hiếu thật sự bất ngờ vì bài 4 cậu được 7 điểm, bởi vì bản thân cậu cũng không ngờ rằng những tính toán khủng khiếp của mình lại được chấp nhận, còn Duy vừa vui vừa buồn vì đã được 4 điểm bài 6: vui vì được 4 điểm, cao hơn nhiều người, nhưng buồn vì không làm được trọn vẹn. Thế là Duy đã chắc ăn được 39/42 điểm, chắc chắn sẽ lọt vào top 10 và sẽ còn hơn rất nhiều thành viên của đội tuyển Trung Quốc, vì điều này mà cậu cũng hăm hở lắm, cứ vừa đi vừa kể mãi.

Ngày 19/07/2009

Kỷ niệm 50 năm IMO. Một buổi lễ hoành tráng không thể quên được. Ngày 19 có buổi sáng tự do, và như thường lệ, các thành viên của chúng ta sử dụng sự tự do ấy cho giấc ngủ kéo dài đến 10h30 của mình, lại bỏ mất bữa sáng. Bữa trưa cũng không có gì đặc sắc, vì tất cả đều đang nghĩ đến buổi lễ khá đặc biệt của IMO 2009 này. 12h00, tất cả có mặt trên chuyến xe bus số 7 để đến nơi làm lễ. Thầy Khoái cũng đi với đoàn, các trưởng đoàn khác cũng thế, đủ thấy buổi lễ được coi trọng đến mức nào. 30p sau, xe đến nơi. Lễ kỷ niệm 50 năm IMO được tổ chức ở một nơi trông như nhà hát lớn của thành phố Bremen với những khách mời đặc biệt là những người từng thi IMO đạt thành tách cao và giờ đây đã trở thành những nhà Toán học nổi tiếng trên thế giới, trong đó được biết đến nhiều nhất có lẽ là **Terence Tao** – "Mozart của Toán học" – giành huy chương Vàng IMO ở tuổi 13, được nhận giải thương Fields năm 2004 và hiện đang là giáo sư của Đại học California, là chuyên gia về lý thuyết số, phương trình đạo hàm riêng, lý thuyết biểu diễn và giải tích điều hòa, ngoài ra còn có **Bela Bollobas**, giáo sư đại học Cambridge và Memphis, là chuyên gia về giải tích hàm, tổ hợp và lý thuyết đồ thị, người đầu tiên giành 2 huy chương vàng IMO (1959 và 1961), **Timothy Gowers**, Đại học Cambridge, là chuyên gia về tổ hợp và giải tích hàm, huy chương vàng IMO 1981 và được giải thưởng Fields năm 1998, **Laszlo Lovasz**, huy chương Vàng IMO 1963, Bạc IMO 1966, chuyên gia về Toán rời rạc và Tin học lý thuyết, hiện là chủ tịch Hội Toán học thế giới, **Stanislav Smirnov**, huy chương Vàng IMO 1986 và 1987, hiện đang làm việc ở Đại học Geneva, chuyên gia về Giải tích phức, hệ động và lý thuyết xác suất, **Jean-Christophe Yoccoz**, huy chương Bạc IMO 1973, huy chương Vàng IMO 1974, giải thưởng Fields năm 1994, là chuyên gia về hê động, lý thuyết số và giải tích phức, hiện đang là giáo sư ở Đại học Paris XI. Lễ kỷ niệm bắt đầu bằng các bài phát biểu của các quan chức cao cấp, trong đó có Chủ tịch Hội đồng trưởng đoàn, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Nghiên cứu Liên bang, Hiệu trưởng Đại học Jacobs và đại diện của nhà tài trợ IMO 2009. Thú vị nhất có lẽ là quá trình tổ chức các kỳ IMO từ năm 1959 được kể lại khá tỉ mỉ: IMO cũng bắt đầu với chỉ 7 nước tham dự, và sau đó đã ngày càng lớn mạnh, trở thành một sự kiện quan trọng như hiện nay. Sau diễn văn của các quan chức cấp cao là phần giao lưu giữa các nhà Toán học nổi tiếng nêu trên với các thí sinh IMO 2009 thông qua các bài thuyết trình. Có tổng cộng 6 nhà Toán học được mời diễn thuyết, và cứ sau 2 người thì lại có một khoảng thời gian nghỉ ngơi. Trong khoảng thời gian ấy, các thí sinh được cung cấp bánh, nước uống và có cơ hội tiếp xúc, giao lưu với các thần tượng Toán học của mình. Người diễn thuyết đầu tiên là Terence Tao. Với đề tài về cấu trúc và sự phân bố của các số nguyên tố đầy hấp dẫn và phong cách nói cuốn hút của mình, Tao làm cho cả khán phòng tập trung vào phần diễn thuyết của mình. Tuy chỉ là giới thiệu sơ lược cũng như có những đánh giá khó hiểu, đặc biệt là phương pháp xác suất trong việc phát hiện một số nguyên tố, nhưng điều này cũng để lại ấn tượng trong nhiều IMOer hôm nay, kích thích họ đi theo con đường nghiên cứu. MC của buổi lễ còn nói "Tôi tin rằng sau vài chục năm nữa, tại IMO 60, 70, hay 100, một trong số các bạn sẽ đứng trên sân khấu, thuyết trình về những đề tài riêng của mình". Phần giao lưu với các nhà Toán học cũng khá thú vị, đặc biệt là với Terence Tao. Các thành viên Việt Nam cũng không bỏ lỡ cơ hội này. Hiếu, Hùng và Cương chen được qua đám đông để đến gần Tao, xin chữ ký và chụp ảnh lưu niệm với nhà Toán học nổi tiếng này. Khổ cho Duy: rất ngưỡng mộ Tao nhưng lại không thể tìm được ông giữa đám đông ngùn ngụt bao quanh Tao như một ngôi sao nhạc rock thực sự (. . .)

Ngày 20/7/2009

Chuyến tham quan đảo Wangerooge – di sản thiên nhiên của Đức do UNESCO bình chọn. Vì lý do đi đảo phải đi bằng thuyền, mà thuyền thì chạy rất đúng giờ nên xe không thể chờ đợi bất cứ ai lâu được cả. Một trong những "nạn nhân" của sự nguyên tắc ấy chính là thầy Minh: thầy đến quá trễ nên cả xe đành quyết định bỏ thầy lại. Không biết tại sao mà tối hôm trước Hiếu đọc nhầm tờ thông báo nên đã thông tin với cả đội rằng bữa ăn sáng sẽ được phát trên xe, thế là tất cả cùng lên đường mà không có gì vào bụng. Xe đến bến thuyền thì gặp phải một trận gió lớn, thổi cái lạnh của buổi sớm mai vào sâu tận da thịt, khiến cả 6 thành viên đội tuyển đều phải khoác áo lạnh kín hết cả tay, riêng Hiếu còn "diện" thêm mũ cho gió đỡ táp vào mặt. Tất cả nhanh chóng lên thuyền cho đúng giờ khởi hành. Đoàn Việt Nam được xếp ngồi cùng một chỗ nên tất cả cùng tựa vào nhau và vào. . . những chiếc ba-lô IMO màu đỏ tựa cho có cảm giác đỡ lạnh. Tàu lướt trên sóng rất êm và đến đảo sau khoảng 30p. Cả đoàn lại lên một chuyến tàu lửa ngắn, thêm khoảng 10p để đến chỗ tập trung, sau đó lại phải đi bộ thêm khoảng 1h để đến được chỗ tổ chức vui chơi. Đó là một bãi cát dài, phẳng và rất mịn. Có lẽ nhờ bãi cát đẹp thế này nên đảo Wangerooge mới được chọn làm di sản thiên nhiên của UNESCO. Bãi cát rộng và thoáng, hàng cây xanh lại ở tít xa phía sau nên những cơn gió buốt được dịp thổi cát bay mù mịt, mang theo cái lạnh cắt da từ trong nước biển và cả từ không khí. Trời lại âm u mây sau cơn mưa nên ánh nắng vẫn chưa lên hẳn, càng làm tăng thêm cái lạnh thấu xương. Thế mà vẫn có người nhảy xuống nước đến tận bụng, rồi chơi đùa, hất nước, nhảy sóng được. 11h30, tất cả cùng xếp hàng đi vào nhà ăn, và một lần nữa, Hiếu làm mọi người trầm trồ khi một mình "xử lý" 5 đĩa thức ăn đầy ắp. Nhưng lần này, các thành viên khác cũng không chịu thua kém: Duy và Hùng đều ăn 4 đĩa, Hải, Cương và Thành cũng mỗi người 2 đĩa (trong khi tiêu chuẩn là mỗi người chỉ được 1 đĩa!). Sau bữa trưa thì mặt trời lên, không khí cũng bớt lạnh. Cả đội cùng đi dạo xuống bãi cát, chụp ảnh và ngắm cảnh biển, rồi sau đó khi nhiệt độ xung quanh lên cao hơn và cảm thấy bớt lạnh, tất cả cùng chơi đá bóng. Trong lúc đội Việt Nam đá bóng, các đội khác cũng có nhiều trò thú vị như xây lâu đài cát, đào các hố sâu xuống cát bằng cuốc nhựa, rồi những trò chơi thể dục như lắc vòng, xoay bông vụ, đi xe đạp một bánh đều diễn ra sôi nổi. Các cuộc vui chơi diễn ra trong tiếng cười rộn rã đến tận 6h chiều thì mọi người cùng quay ra bến tàu hỏa, đi ngược lại bến thuyền để quay vào bờ. Trong lúc trên tàu đi từ biển về, một cánh chim hải âu bay xuống rất thấp, sát với tầng trên của tàu nên có một cậu người Nga đưa bánh mỳ lên cho nó quắp lấy trong sự vỗ tay hò reo sôi nổi của mọi người xung quanh.

Ngày 21/7/2009

Bế mạc IMO 2009. Bữa sáng của đội tuyển Việt Nam hôm nay được lên kế hoạch rõ ràng vì mọi người vẫn không quên được sự nhầm lẫn tai hại hôm qua của Hiếu. 8h00, mọi người ăn sáng xong, cùng quay về phòng khoác lên mình chiếc áo đồng phục của đội tuyển Việt Nam, chuẩn bị đi nhận những tấm huy chương rạng rỡ của mình. 10h00, xe bus khởi hành đến địa điểm tổ chức lễ bế mạc và trao huy chương. Đó là phòng hòa nhạc Bremen, một khán phòng sang trọng và rộng lớn đủ để chứa tất cả các thí sinh và jury cùng các quan sát viên. Các thí sinh được sắp xếp chỗ ngồi theo màu huy chương. Huy chương Vàng ngồi trên cùng, rồi đến Bạc, sau đó là Đồng và đằng sau nữa là những thí sinh còn thiếu may mắn nên chưa giành được tấm huy chương IMO danh giá. Khi các vị khách mời đã có mặt đông đủ, lễ bế mạc IMO được bắt đầu bằng diễn văn của bà Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Nghiên cứu liên bang, sau đó đến Hiệu trưởng trường Đại học Jacobs rồi đại diện của nhà tài trợ. Nối tiếp sau các bài diễn văn là một màn ảo thuật vật lý khá thú vị với việc làm cho ngọn lửa xoay tròn và cháy mạnh lên trên cao, rồi màn bắn ra các vòng tròn khói từ những chiếc máy khổng lồ tự tạo, đều thu hút được sự quan tâm và ủng hộ của khán giả. Tiếp đến là phần trao huy chương. Đây là giây phút hồi hộp và đáng trân trọng của tất cả những thí sinh đã cố gắng làm bài, và giờ đây sắp được đeo vào cổ tấm huy chương IMO danh giá. Các huy chương được phát bắt đầu từ huy chương Đồng. Huy chương được trao bằng cách mời các thí sinh lên sân khấu, chào khán giả rồi quay lại phía sau lưng, để các đại biểu được mời trao huy chương đeo những tấm bằng khen danh giá ấy lên cổ họ. Trong số các thí sinh giành huy chương Đồng có Raul Chavéz người Peru – năm nay 11 tuổi và là thí sinh trẻ tuổi nhất tại IMO 2009 – thật tình cờ, cậu bé bằng tuổi thần đồng Terence Tao khi lần đầu đoạt huy chương Đồng IMO. Có những câu bông đùa *"Raul can solve an IMO problem but can not take a bath himself"* khiến mọi người phải phì cười. Khi Raul lên nhận huy chương, cả hội trường vỗ tay nhiệt liệt, hy vọng cậu bé này sẽ phá được kỷ lục của Terence Tao bằng cách đạt được huy chương Vàng tại IMO 2010 tiếp theo. 2 sĩ tử Việt Nam: Cương và Thành lên nhận huy chương Đồng sau cùng, vì trong những người cùng màu huy chương thì huy chương lại được phát theo thứ tự từ điển của tên nước, và quay về chỗ ngồi vui vẻ với chiếc huy chương Đồng trên cổ. Tiếp đến là huy chương Bạc. Vì MC của buổi lễ cũng là một giáo sư Toán học và được mời tham gia trao huy chương Đồng nên trong lúc ấy phải nhờ đến một MC khác, khi đến huy chương Bạc, MC chính trở lại vai trò của mình khiến cho việc đeo các huy chương vào cổ các thí sinh trở nên sinh động hơn. Ông liên tục nói những câu như: *"Come on, turn around and receive your medals"*, *"We are proud of you"*, etc, nhưng không bao giờ nói lặp lại câu đã nói trước đó, khiến cho việc trao – nhận huy chương diễn ra thú vị hơn. Khi Hiếu và Hải lên nhận huy chương Bạc, hai cậu nhờ guide của đội Cambodia cầm máy ảnh bấm giúp vài kiểu kỷ niệm. Kế đến là phần trao huy chương Vàng với nhiều hình ảnh rất đáng nhớ. Cũng với hình thức như cũ nhưng số lượng thí sinh được gọi lên nhận trong một đợt chỉ còn 5 thí sinh. Và MC đã thật khéo léo khi sắp xếp 6 thí sinh: 3 người Hàn Quốc và 3 người Bắc Triều Tiên – 2 đất nước chung đường biên giới đang chia cắt nhau bởi vĩ tuyến 38 – cùng lên sân khấu nhận giải. Quốc kỳ 2 nước được căng ra cạnh nhau là một hình ảnh rất đẹp về mặt chính trị, nói lên ước mơ hòa bình hữu nghị trong công cuộc toàn cầu hóa, một trong những mục tiêu của IMO muốn xây dựng. Cuối phần trao huy chương Vàng, Duy và Hùng cùng lên nhận huy chương, rất vui vẻ. Phần hoành tránh nhất của việc trao huy chương là đối với 3 thí sinh đã đạt điểm cao nhất của kỳ thi: Dong Ji Wei (CHN), Makoto Soejima (JPN) và Lisa Sauermann (GER). 3 thí sinh được mời riêng lên sân khấu, và khi những tấm huy chương đẹp nhất được trao cho họ, cả hội trường cùng đứng lên vỗ tay rất trịnh trọng. Đó là một tràng vỗ tay dài, có cả sự ngưỡng mộ, ước mơ và một chút ganh tị, nhưng để lại những ấn tượng rất sâu sắc trong lòng tất cả mọi người. Lễ trao giải kết thúc, tiếp đến là một tiết mục hòa tấu của dàn nhạc thành phố Bremen: một bản nhạc hùng tráng của Beethoven, thôi thúc các thí sinh hướng về tương lai của mình với những ước mơ đẹp nhất. Sau bài hòa tấu lại là một bài hát opera bằng tiếng Đức của một nữ ca sĩ với giọng cao và rất truyền cảm nên dù ít người hiểu, cả hội trường vẫn im lặng lắng nghe và cảm động. Lễ bế mạc chính thức kết thúc bằng việc trao cờ IMO cho nước chủ nhà tiếp theo. Đầu tiên, họ phát một đoạn video clip về Kazakstan, sau đó các quan chức của nước này lên nhận cờ IMO từ nước Đức. Thế là IMO 51 sẽ được tổ chức tại thành phố Astana đầy nắng của đất nước Trung Á Kazakstan. Nghi thức kết thúc trong trang trọng cũng khép lại buổi lễ bế mạc. Tất cả cùng ra xe bus quay về campus của Đại học Jacobs, không quên chụp những tấm ảnh với chiếc huy chương nóng hổi vừa được đeo vào cổ để làm kỷ niệm. Theo thầy Khoái nhận xét, huy chương của Đức làm không được sắc sảo và đẹp như huy chương của nước chủ nhà Tây Ban Nha năm trước, tuy nhiên, dù đẹp hay không, nó cũng đáng quý vì đó là kết tinh của những ngày tháng cố gắng không ngừng của các thành viên đội tuyển. Tối ngày 21 là bữa ăn tối từ biệt, cũng được tổ chức ngoài trời như bữa barbercue hôm trước. Các thành viên Việt Nam cũng như các nước khác đều không tập trung vào ăn uống mà chủ yếu là đi giao lưu, tặng cho nhau những món đồ lưu niệm từ nước của mình, rồi chụp với nhau những tấm ảnh để ghi nhớ suốt đời về một kỷ niệm đẹp tại IMO. Đến khoảng 10h00, một night party được tổ chức với những màn dancing ấn tượng của cả các ca sĩ trên sân khấu lẫn những thí sinh trên bãi cỏ. Cương, Duy và Hiếu cũng chen chúc vào đám đông, "biểu diễn" các động tác vũ công vừa tập của mình, trông cũng có hồn lắm. Màn dancing kéo dài đến tận hơn 12h00 mới kết thúc. Lúc này ban tổ chức công bố Miss và Mr IMO theo kết quả bầu chọn. Miss IMO là một bạn nữ khá xinh đẹp đến từ Venezuela – vương quốc của những hoa hậu, còn Mr IMO cũng đến từ Nam Mỹ, là Feliz của Brazil – một người bạn mới quen của đội Việt Nam, đặc biệt có vẻ thân với Hiếu, về sau hai cậu này còn bắt tay và chụp ảnh với nhau. Khoảng 3h00, bữa party tạm biệt nhau mới kết thúc, chính thức khép lại IMO 2009 với bao khoảnh khắc đáng nhớ trong lòng cả những thí sinh lẫn ban tổ chức. Họ chia tay nhau về phòng nghỉ và những người còn cơ hội tiếp tục không quên nói những lời hẹn gặp lại rất tự tin với nhau. Sáng ngày 22/7/2009, tất cả cùng rời đại học Jacobs, kết thúc chuyến đi tốt đẹp.

Hành trình du học của các sinh viên Toán

Lim Nguyễn - Toronto, Canada

▽

Nếu như Đổi Mới là một khái niệm cải cách có ảnh hưởng toàn diện đến đời sống, xã hội, kinh tế và chính trị của Việt Nam từ những năm 1980 trở lại đây, thì Du học cũng có ảnh hưởng và ý nghĩa tương tự đối với nền giáo dục và văn hóa của nước nhà. Từ một mẫu, với 30 thành viên của diendantoanhoc.net, đã và đang là các du học sinh, nghiên cứu sinh và giảng viên ở nước ngoài, chúng ta có thể hình dung được phần nào hành tình du học của học sinh, sinh viên Việt nam qua hơn một phần tư thế kỷ gần đây.

I - Liên Xô hùng vĩ và du học thời "bố mẹ" [1]

Khái niệm du học bắt đầu hình thành ngay sau khi Việt Nam hoàn toàn giải phóng. Được đi ra nước ngoài và du học ở các nước cộng hòa liên bang Xô Viết quả là một thiên đường. Liên Xô cũ đã đào tạo cho Việt Nam rất nhiều chuyên gia, nhà quản lý giỏi trên mọi lĩnh vực. Thế hệ học sinh, sinh viên Toán đầu đời của Việt Nam cũng có may mắn được nuôi dưỡng và phát triển từ xứ sở bạch dương, và cho tới hiện tại, hình ảnh về một nước Nga hùng vĩ, với bao kỉ niệm vẫn còn đọng lại trong nhiều thế hệ du học sinh Việt nam.

LBKTrình, PHTiệp, LTQThắng, ĐTSơn, PPĐạt và TNDũng thuộc thế hệ sinh viên Toán, được đào tạo từ những trường đại học tiên tiến nhất của Nga, như ĐH Lomonosov, ĐHTH Leningrad. Họ tuy đi theo những con đường khác nhau : người được nhà trường cử đi do đỗ ĐH điểm cao, người thì do một trường thuộc khối quân sự cắt cử, hay do Bộ chủ quản (nay là Bộ GD ĐT) cử đi. Song đều có một điểm chung là học hành chăm chỉ và rất tự giác, một phần vì có sự chọn lọc trong xét tuyển du học, phần vì nước mình còn nhiều khó khăn nên luôn phải cố gắng vươn lên trong học tập. Đến trường, sinh viên ở ký túc xá, khoảng 4-8 người/phòng, nghiên cứu sinh thì thỏa mái hơn, 2 người/phòng, đến năm cuối thì được ở riêng để hoàn thành luận án. Học phí và tiền phòng đều được miễn phí. Ngoài ra, mỗi sinh viên đều được khoảng 70 rúp/ tháng, nghiên cứu sinh được khoảng 85 rúp/tháng (sau này tương ứng là 90 rúp và 120 rúp) sinh hoạt phí để mua sách, ăn uống và giải trí.

Học hành, vui chơi thỏa mái nhưng ai cũng nhớ nhà, nhớ quê hương. Hồi ấy, thông tin liên lạc đâu có hiện đại và đa dạng như bây giờ. Không email, không chát, không dịch vụ chuyển phát nhanh nào, chỉ viết thư tay, nhưng cũng nhờ đó mà cung cách trình bày của họ cái gì cũng mạch lạc, từ hành văn, chính tả, ngữ pháp đến nét chữ đều đâu ra đấy.

Hiện tại, họ đều đã trở thành những nhà khoa học, nhà chuyên môn trong lĩnh vực của mình. Có người vẫn theo đuổi nghiệp Toán, như PHTiệp - giáo sư trường đại học Florida; LTQThắng - giáo sư trường đại học công nghệ Gatech, LBKTrình - giáo sư trường

ĐHKHTN HCM. Có người chuyển sang lĩnh vực khác như vật lý, ĐTSơn - giáo sư trường đại học Washington, hoặc lĩnh vực công nghệ thông tin, như tiến sĩ PPĐạt, tiến sĩ TNDũng - giảng dạy trong trường đại học KHTN và quản lý tại công ty FPT. Nước Nga cũng như khối Đông Âu không những đã nuôi dưỡng họ trở thành những con người ưu tú, mà còn để lại trong họ nhiều dấu ấn khó quên. Đặc biệt, mỗi khi nghe đến tên gọi...Nga, Lê Na, hay An Na, thì kỉ niệm về một đất nước hùng vĩ ấy lại trào dâng trong họ...

II - Nước Úc tươi đẹp, nơi chấp cánh những ước mơ [2]

Thế hệ của PTHDương, ĐTCường, HHTài tốt nghiệp phổ thông trung học cũng chính là thời điểm mà một loạt các nước đông Âu vừa sụp đổ, chương trình gửi học sinh đi du học của chính phủ bị gián đoạn. Lúc bấy giờ cũng chưa thấy nói nhiều về chuyện đi học ở các nước tư bản. Thi thoảng cũng có thấy người này, người kia đi, nhưng tin tức thì kín mít, và cũng chẳng biết họ kiếm đâu ra thông tin. Thế là "yên tâm" học đại học trong nước. Hơi thất vọng một chút (sau những cố gắng cày ngày cày đêm của bản thân và của cha mẹ), nhưng rồi cũng quen đi và hòa mình vào với những người bạn mới, những thú vị và những trò nghịch ngợm của lứa tuổi không còn là trẻ con nữa, nhưng cũng chưa phải là người lớn.

Năm đại học đầu tiên qua đi một cách bình lặng, chơi nhiều hơn học. Cuối kì chỉ " cầu trời khấn phật" cho qua để còn kéo nhau đi ăn mừng. Lỡ có thằng nào trượt vở chuối thì cũng phai đi ăn "giải hạn" ngay. Tóm lại, cả năm chỉ có lang thang và ăn mừng. Đùng một cái, vào cuối hè, có tin Bộ GDĐT sẽ gửi khoảng 25 sinh viên của các trường đi sang Úc du học. Thế là lao đầu vào học tiếng Anh, được khoảng 2 tháng thì thi. Tôi (HHTài) măy mắn nên cũng đậu " vớt" vào nhóm được gửi đi. Thế là từ đó tôi bắt đầu phiêu du trên con đường du học của mình.

Từ mệnh đề Du học

Tôi được gửi sang Perth, thành phố thủ phủ của bang miền Tây nước Úc.Buổi đầu tiên đến lớp, cô giáo yêu cầu từng người đứng lên giới thiệu về bản thân. Tụi nó nói vù vù, tôi nghe toát mồ hôi mà chẳng hiểu gì. Một lúc sau, đến phiên mình, tôi lắp bắp tự giới thiệu tên, rồi nói với cô giáo là từ nãy đến giờ mọi người nói gì tôi chẳng hiểu chút nào cả. Cô giáo cười và "dịch" lại cho tôi biết tên từng người, những gì họ đã tự nói về bản thân. Thì ra, ngoài tôi, đứa ở Úc ít nhất cũng đã là 3 năm rồi. Có mấy đứa, tiếng Anh còn là tiếng mẹ đẻ nữa. Sau nay tôi mới được biết là ở Úc, trong kỳ thi vào đại học có môn tiếng Anh, và đứa nào trượt môn này (nhưng vẫn đủ điểm vào trường) thì phải qua một khoá học như tôi. Từ buổi đó, ngày ngày tôi đến lớp ngồi nghệt mặt ra nghe mấy đứa bạn cùng lớp nói chuyện với nhau và với cô giáo mà chẳng hiểu câu nào. Sợ nhất là những giờ đọc và bình luận tiểu thuyết - Mỗi tuần cô giáo cho cả lớp một cuốn tiểu thuyết về đọc, tuần sau thì thảo luận với nhau về những gì mình đã đọc. Trong một tuần, tôi ngồi tra từ điển tới đau cả mắt cũng chỉ đọc được khoảng 20 - 30 trang là cùng. Sau khoảng một tháng, tôi nản quá nên "cho qua" luôn môn này .. nghĩa là hàng ngày vẫn đến lớp, nhưng nghe và ngủ gật là chính. Tôi biết trượt khoá học này thì không được tiếp tục học nữa mà bị trả về nước ngay, nhưng lúc đó quả thật tôi bí quá nên "làm liều". Tôi thực hiện chính sách "chày cối" như thế được 2 tuần thì bị cô giáo phát hiện, và thế là từ đó, mỗi ngày cô đều dành ra 30 phút để kiểm tra trước lớp xem tôi đã đọc những gì. Đúng là một cực hình!

Đến định lý Học

Thời sinh viên ở Việt nam có thể nói là rất đẹp. Ngoại trừ một số người, ngoài việc học, còn phải vật lộn với cuộc sống, phần lớn số còn lại giành rất nhiều thời gian cho việc "hưởng thụ". Sau một kỳ thi đại học ngốn quá nhiều sức lực, ai cũng có xu hướng "xả hơi" một chút - nhất là khi, ngoài các kỳ thi cuối kỳ ra, chẳng có gì phải lo lắng cả. Thời sinh viên của du học sinh không hẳn là nhẹ nhàng dễ chịu như vậy. Những đêm thức trắng ngồi ở phòng lab có lẽ không là chuyện lạ đối với bất kỳ người du học sinh nào. Nhất là đối với diện du học sinh "tự túc", mỗi môn học được tính bằng bao nhiêu mồ hôi nước mắt của các bậc phụ huynh, vì thế họ không được phép "trượt vỏ chuối" bất cứ môn nào. Để như vậy, chẳng có cách nào khác ngoài việc lao đầu vào học. Thêm vào đó, ở Việt nam, các trường đại học tập trung hầu hết ở các thành phố lớn, nơi mà xã hội xung quanh vô cùng sôi động, có biết bao chuyện diễn ra hàng ngày thu hút sự chú ý của mình. Trong khi đó, rất nhiều các trường đại học ở Úc đặt ở các thành phố chỉ khoảng trên dưới 50 nghìn dân – môi trường xung quanh rất bình lặng – vì thế, ngoài việc học ra cũng chẳng có mấy chuyện để làm.

Và bổ đề Về hay ở.

Trong quá trình du học, năm đầu tiên và năm cuối cùng là những năm vất vả nhất. Năm đầu tiên là khoảng thời gian để thích nghi và "thám hiểm" môi trường mới, xã hội mới ở quanh mình. Đối với những người lần đầu rời xa gia đình, đây có thể gọi là bước chập chững của quá trình "tiến hóa", học "làm người". Năm cuối cùng, tuy không còn phải chật vật với những bữa ăn hàng ngày, nhưng lại là khoảng thời gian phải đối đầu với những quyết định có ảnh hưởng tới cả cuộc đời sau này. Một trong những vấn đề nổi cộm nhất là việc "về hay ở". Đơn giản gói ghém trong 3 chữ, nhưng đây là vấn đề mà bất cứ quyết định như thế nào cũng có mặt hay mặt dở, những cái "được" và "mất". Có lẽ chỉ những ai đã từng trải qua những tháng ngày tự hỏi, dằn vặt, và lo lắng mới hiểu rõ để có một quyết định quả không phải là một điều dễ dàng.

Tôi đã từng trải qua những tháng ngày lo lắng về tương lai. Lần thứ nhất, khi chuẩn bị tốt nghiệp đại học và rời Perth. Lúc đó, như mọi người, tôi nộp hồ sơ vào một số nơi để tiếp tục theo học chương trình sau đại học. Bên cạnh đó tôi cũng để ý tới khả năng tìm việc làm. Thế rồi, tôi đứng trước 3 sự lựa chọn: về làm việc cho một công ty Úc ở Việt nam, ở lại Perth tiếp tục học cao học, hoặc sang Canada.

Kết quả...

Tôi tiếp tục với hành trình "Tây du" của mình trên đất nước Canada. Bấy giờ do không còn bỡ ngỡ với môi trường lạ nữa nên trong một thời gian khá ngắn, tôi đã thích nghi với cuộc sống mới. Điểm khác biệt đầu tiên giữa Canada và Úc (tất nhiên ngoài cái lạnh đến kỳ dị) là việc ở Canada có nhà ăn cho sinh viên. Tôi mừng như "bắt được vàng". Mua ngay "meal plan" cho một học kỳ - Hàng ngày, tới bữa chỉ việc vác bụng đến nhà ăn, no rồi về. Mấy tuần đầu tiên "sung sướng" phải biết – mỗi bữa, ăn đủ thứ, cuối buổi còn có kem tráng miệng. Được một thời gian, công việc bắt đầu bận rộn, thời gian không còn chủ động như trước. Lúc đói thì bận mà lúc rảnh lại không đói. Thế là nhiều bữa chỉ kịp chạy vào nhà ăn nhặt vội mấy miếng pizza rồi chạy đi tiếp. Thêm vào đó, khi bắt đầu có nhiền bạn bè (mà phần lớn dân học sau đại học không ăn trong nhà ăn), tụi nó lại hay rủ ra ngoài ăn quán –

Mỗi lần đi như vậy thấy "tiếc" khẩu phần ăn trong nhà ăn của mình (đã trả tiền cho cả học kỳ rồi). Sang học kỳ 2, tôi quyết định tự nấu lấy. Quay lại với nồi niêu xoong chảo không phải là điều "thú vị" chút nào, vì thế tôi ăn pizza và các đồ ăn sẵn khác là chính. Cho tới tận bây giờ, tôi cũng chẳng hiểu mình đã "sống" qua những năm tháng đó bằng gì nữa.

Việc học hành cũng sang một bước ngoặt mới. Lần đầu tiên làm quen với việc "nghiên cứu". Lần đầu tiên thực sự cảm thấy có trách nhiệm đối với kiến thức của mình, đối diện với những vấn đề (trong học tập) mà trăn trở trằn trọc hàng tháng trời vẫn không giải quyết được. Thời gian đầu, vì không phải lên lớp nhiều, lại chưa biết cách sắp xếp lịch trình cho bản thân, tôi cảm thấy học sau đại học thật thoải mái và rảnh rỗi. Tôi bỏ ra rất nhiều thời gian lang thang trong thư viện và các hiệu sách lớn. Được khoảng nửa năm, giật mình khi thấy mình chưa làm được gì mấy trong công việc. Thế là lại cuống cuồng lao vào học, học ngày học đêm. Câu hỏi lớn nhất trong thời gian này luôn là "Học gì và học bao nhiêu thì đủ?". Dần dần, tôi nhận ra rằng "học chẳng bao giờ là đủ". Điều quan trọng nhất là biết cách sắp xếp thời gian để lúc nào cũng học, nhưng không bao giờ bị quá tải – Tiếc rằng khi nhận được ra "chân lý" thì tôi đã tốt nghiệp. 4 năm trời, nhiều lúc thức trắng 2 đêm liền, nhiều lúc lại chơi thả cửa cả mấy tuần. Câu nói mà tôi ưa thích nhất có lẽ là câu "Khối kiến thức như một quả bóng, và những gì mình chưa biết là phần không gian bên ngoài. Quả bóng càng to, phần bề mặt tiếp xúc với không gian bên ngoài càng rộng".

Điều sai lầm lớn nhất của tôi là trong thời kỳ học ở Canada tôi không về Việt nam lần nào. Chỉ 3 tháng cuối cùng vì có việc nhà nên về đến 2 lần. Lần đầu về lại quê hương sau gần 4 năm, nhận ra bố mẹ mình đã già đi rất nhiều – Tự dưng thấy nôn nao trong lòng, cảm giác như có ai vừa cầm lấy ruột mình thắt thành vài ba nút lớn ở bên trong. Cuộc đời du học sinh, hàng ngày phải đối diện với bao khó khăn vất vả, mấy khi có dịp dừng lại nghĩ xem mình đã đánh mất bao nhiêu thời gian quý giá không được ở bên cạnh gia đình và người thân ...

Kể từ thế hệ của HHTài, nhiều lớp sinh viên Toán khác như NTPhương, NĐTuấn, LAVinh, PGVAnh cũng có thời gian du học tại Úc, ở những trung tâm lớn như ANU, ĐH Sydney, ĐH Melbourne, ĐH Queens và UNSW. Hiện tại, đa phần đều đang học tập và nghiên cứu ở một nước thứ ba. HHTài hiện là giáo sư toán tại trường đại học Tulane, Mỹ. NTPhương chuyển sang lĩnh vực khoa học máy tính, và đang là nghiên cứu sinh hậu tiến sĩ tại trường đại học Toronto, Canada. NDTuấn sau khi bảo vệ luận án tiến sĩ toán tại trường đại học Paris Sud XI, cũng đã có một vị trí nghiên cứu tại Viện nghiên cứu nâng cao Princeton, cùng với NBChâu và NCGVượng. Thế hệ trẻ hơn như LAVinh, PGVAnh đều rất xuất sắc, "lớp sóng sau đè lớp sóng trước". Hiện tại, LAVinh đang trong giai đoạn viết luận văn tiến sĩ trong lĩnh vực đại số tổ hợp và lý thuyết đồ thị tại trường đại học Harvard, còn PGVAnh hiện đang làm nghiên cứu sinh trong lĩnh vực Khoa học máy tính, thuộc trường đại học California tại Berkeley.

III - Khi du học là lựa chọn và Châu Âu là điểm đến

Khi đất nước bước vào thời kỳ hội nhập, du học ở các nước châu Âu đã trở lên mở cửa và thông thoáng hơn rất nhiều. Ngoài Đông Âu, Úc, Châu Âu trở thành một điểm đến lý tưởng khi các sinh viên được lựa chọn điểm đến trong thời gian học đại học và cả sau đại học cho mình. Có nhiều lý do để du học sinh lựa chọn châu Âu [3]:

- Bằng cấp được công nhận trên toàn cầu: Tham gia các khóa học ở châu Âu, du học sinh không phải lo lắng về bằng cấp của mình vì nhờ có sự hợp tác của EU với các nước khác trên toàn thế giới, bằng cấp này được công nhận toàn cầu. Ủy ban Liên minh châu Âu và 27 thành viên luôn chào đón các sinh viên châu Á, trong đó có các sinh viên Việt Nam.

- Hệ thống tích lũy và chuyển giao tín chỉ năng động và hiệu quả: giúp các sinh viên đạt được kết quả cao nhất từ việc học tập ở nước ngoài, đưa ra những thước đo và so sánh các kết quả, thành tựu học tập đạt được và chuyển họ từ viện đào tạo này sang viện đào tạo khác. Hệ thống này không chỉ tạo điều kiện phát huy tính năng động của sinh viên và xây dựng các chương trình học quốc tế mà còn đảm bảo sự công nhận về bằng cấp đạt được ở mọi nơi.

- Du học sinh có thể "kiếm" được bằng cấp kép, đa quốc gia: được cấp bởi 2 đến 3 nước, tùy theo các khóa học được thực hiện ở nước ngoài. Ví dụ, một sinh viên ở Đức có thể lựa chọn để theo học khoá đào tạo ở Anh và tốt nghiệp ở Hà Lan và nhận 2 đến 3 chứng chỉ ở các nước anh ta đã tham gia học.

- Nhiều cơ hội đoạt học bổng: Hơn 6.000 viện đào tạo được mở ra ở châu Âu cho tất cả các sinh viên. Đạt được học bổng là con đường quan trọng để các sinh viên châu Á có thể đến học tập ở các nước thành viên của EU và rất nhiều nước sẵn sàng tài trợ về tài chính cho các sinh viên Việt Nam trong việc học tập.

- Các trường đại học ở châu Âu thường cung cấp những dịch vụ trọn gói như tìm chỗ ở, hỗ trợ để lên kế hoạch cho việc học tập... đảm bảo sinh viên có thể nhanh chóng ổn định trong việc học tập và cuộc sống hàng ngày.

- Rào cản về ngôn ngữ không còn là điều khó khăn nhất: Đối với việc hoàn tất thủ tục xin visa của sinh viên Việt Nam, các đại diện ngoại giao của châu Âu sẽ nhận các hồ sơ này để đơn giản hóa việc xin visa và tùy thuộc vào đích đến của mỗi du học sinh, du học sinh có thể nhận visa Schengen để có thể đi lại trong khoảng 15 nước Schengen ở châu Âu chỉ với một loại giấy tờ.

Ngoài ra, vì tình hữu nghị giữa Việt Nam và nhiều nước trong khối liên minh châu Âu, nên có nhiều lớp sinh viên được học tập và làm việc tại các nước như Pháp, Anh, Đức, Áo và Đan Mạch. Trong lĩnh vực toán học, cũng có không ít các sinh viên đã từng được nuôi dưỡng và trưởng thành từ các trung tâp đào tạo tiên tiến bậc nhất trên thế giới, như PHHải, ĐH Munich; NTZũng, ĐH Toulouse; NBChâu, NĐTuấn, ĐH Paris-Sud XI; ĐTCường, ĐH Paris 6; PTHDương, NCGVượng ĐH Paris 7; ĐNMinh, ĐH EPFL; PDHiệu, TMAnh, ĐH Sư phạm ENS ; ĐĐNQuang, LTHoàng, Đại học bách khoa Paris, Polytech; BVHà , ĐH London; BMHùng, ĐH Oxford, Anh Quốc. Sau khi bảo vệ luận án tốt nghiệp và làm postdoc (hậu tiến sĩ), một số sinh viên toán đã ở lại công tác ở Châu Âu, số còn lại tiếp tục hành trình du học tới một vùng đất mới, màu mỡ và phì nhiêu đó là nước Mỹ.

IV - Nước Mỹ - Yes, you can!

Phần lớn thế hệ sinh viên Toán học đại học tại châu Âu đều tiếp tục con đường học tập, nghiên cứu bằng việc đăng ký vào các trường đại học của Mỹ. Đây không phải là điều ngạc nhiên, bởi vì nước Mỹ là trung tậm kinh tế, giáo dục hàng đầu thế giới, nơi tài năng được nuôi dưỡng, phát triển và sử dụng một cách hợp lý. Những ngôi sao sáng trong cộng đồng toán học non trẻ của Việt Nam như VHVăn, LTQThắng, NBChâu, NĐTuấn, NCGVượng, PHTiệp, LQNẫm, NXLong, đều khẳng định được vị trí của minh, sau khi đã trải qua một quá trình "xin việc" cạnh tranh vô cùng khắc khe. Thử tưởng tượng, một vị trí phó giáo sư (assistant professor) ở một trường trong top 30 như Rice University, mà có tới hàng 1000 hồ sơ đăng ký. Điều này chứng tỏ, cạnh tranh trong môi trường hàn lâm học viên ở các trường đại học của Mỹ vô cùng khắc liệt. Việc những sinh viên Toán của Việt Nam có được chân giáo sư/phó giáo sư, như VHVăn, Đại học tổng hợp Rutgers; LTQThắng, Đại học công nghệ Gatech, PHTiệp, Đại học Florida, hay gần đây là LQ Nẫm, nghiên cứu sinh hậu tiến sĩ tại đại học Colombia, hay NXLong, phó giáo sư toán/thống kê thuộc trường đại học Michigan ở Ann Arbor cũng là những tấm gương sáng, cổ vũ tinh thần học tập, phấn đấu của các sinh viên chuyên ngành Toán học Việt Nam.

Nếu như những năm trước, sinh viên toán thường chọn Nga, Úc và Châu Âu làm bàn đạp để tiếp cận với các trường đại học hàng đầu của Mỹ, thì giờ đây, cũng có những bạn trẻ đã tự chuẩn bị cho mình hành trang để trực tiếp chinh phục các đỉnh cao này. PKHùng, PTThái, ĐXBách là một trong số những gương mặt tiêu biểu đó. Họ chấp nhận chậm lại 2 năm, để chuẩn bị tiếng Anh, và làm các bài thi vào đại học của Mỹ. Kết quả, ĐXBách đã được nhận vào trường Stony Brook, PKHùng đã được nhận vào trường đại học Stanford, PTThái cũng xuất sắc nhận được học bổng của đại học công nghệ Massachusetts (MIT). Số lượng các nghiên cứu sinh Toán Việt nam học tập tại Mỹ cũng ngày một tăng lên, thành viên của diễn đàn toán học cũng có một số lượng đếm được các sinh viên đó. LTHoàng, ĐQYên, đại học UCLA; NTHà, đại học UIUC; NHDũng,đại học Stanford; NĐKhoa, đại học California tại Berkeley; LHV Bảo, LAVinh, đại học Harvard.

Mặc dù đang trong giai đoạn khủng hoảng kinh tế, tài chính, nhưng nước Mỹ vẫn là môi trường lý tưởng cho những cá nhân xuất sắc nhất, muốn vươn tới đỉnh cao của tri thức nhân loại; bởi vì ở đây họ có cơ hội cạnh tranh và cọ sát với nhiều đối thủ xứng tầm. Nó cũng là một phần lý do khiến NBChâu, NĐTuấn, NCGVượng, ĐNMinh đã chọn Mỹ là nơi tiếp tục phát triển tài năng của mình. ĐNMinh tốt nghiệp chuyện ngành ECE tại đại học EPFL, Thụy Sĩ và hiện tại là phó giáo sư trường đại học UIUC. NBChâu, NĐTuấn, NCGVượng sau thời gian nghiên cứu tại Viện nghiên cứu nâng cao IAS, Princeton sẽ tiếp cận vị trí giáo sự tại một trong những trường tầm cỡ như Berkeley hay Harvard.

Có thể thấy, nền giáo dục của mỗi nước đều có điểm mạnh và điểm yếu. Chuyên ngành Toán học ở các trường đại học Mỹ, bậc học tiến sĩ (sau đại học) cũng không ngoại lệ. Ưu điểm của đào tạo sau đại học ở Mỹ đó là [4]:

- Môi trường học thuật mang tính cạnh tranh cao và cởi mở: Chuyện giáo sư trẻ mở seminar, các giáo sư già đầu bạc sẵn lòng vác sách vở xuống ngồi nghe giảng cùng với các sinh viên, như những học viên bình thường trở nên không xa lạ. Ở họ, tinh thần học hỏi rất cao, sẵn lòng tôn vinh những người trẻ vì lợi ích phát triển khoa, mặc dù bản thân họ cũng đâu có kém.

- Đào tạo kiến thức nền tảng cho PhD tốt: hai năm đầu, tất cả các sinh viên đầu vẫn phải take courses. Thậm chí transfer học tiếp PhD của 1 trường, sau khi đã học vài năm PhD ở 1 trường khác rồi vẫn phải học lại từ đầu, thi lại Q.E hoàn toàn. Cho dù đã thi và pass ở trường cũ vẫn phải học lại bởi vì không học thì không thi được, mỗi GS cho thi Q.E phong cách khác nhau, mảng kiến thức khác nhau.

- Cơ hội nhập cư và tìm được việc làm phù hợp với ngành học cao hơn nhiều nước châu Âu. Song nhược điểm cũng có nhiều, đó là:

- Thời gian học PhD quá dài và chương trình học quá nặng: chương trình học Phd là 6 năm nhưng trung bình nghiên cứu sinh phát mất 6,7 năm mới có thể tốt nghiệp.

- Rủi ro trong quá trình hoàn thành Phd lớn: Rất hiếm người tốt nghiệp được PhD 2, 3 năm như châu Âu, và thời gian làm PhD dài hơn sẽ kèm theo các rủi ro cản trở việc hoàn thành và tốt nghiệp.

V - Những con đường du học khác ngoài IMO

Nếu tinh ý, bạn có thể nhận ra, tất cả các nhân vật kể trên đều đã từng tham gia đội tuyển Toán quốc tế (IMO), và họ khi còn là những học sinh trung học đã mang lại vinh quang cho nước nhà. Nhưng họ không ngừng lại ở thứ vinh quang "ngắn ngủi" đó, mà vẫn miệt mài, tìm tòi, phấn đấu để đi đến những đỉnh cao mới. Một vị trí phó giáo sư/giáo sư sẽ ý nghĩa hơn rất nhiều so với một tấm huy chương thời trung học; một danh hiệu Polya mà VHVăn hay huận chương Clay mà NBChâu đạt được là ước mơ của biết bao các giáo sư toán học khác.

Tuy nhiên, sau khi nhận ra được điều đó thì bạn cũng đừng nên quá hoang mang. Tham gia các cuộc thi quốc gia, olympic quốc tế chỉ là một sân chơi nhỏ dành cho một số ít các bạn học sinh toán ưu tú. Việc có được các danh hiệu thời trung học sẽ dễ dàng hơn trong việc đăng ký vào các trường đại học nước ngoài, nhưng điều đó không đồng nghĩa với việc tiếp cận các trung tâm khoa học, các trường đại học lớn của các bạn học sinh không tham dự các cuộc thi này trở nên eo hẹp đi. Các nghiên cứu sinh như ĐĐHạnh,TVHưng, THung, TNMai là những ví dụ điển hình cho thế hệ sinh viên toán, (non-IMO) nhưng kết quả của họ cũng làm cho nhiều sinh viên IMO ngưỡng mộ. ĐĐHạnh đến với khoa toán đại học California tại Berkeley qua học bổng của VEF; TVHưng cũng đến nghiên cứu tại khoa toán hàng đầu thế giới này qua những nỗ lực và kết quả mà TVHưng đạt được khi còn học ở trường KHTN HCM. Với hai bài báo được đăng trên Topol. Methods Nonlinear Anal. và Proc. Amer. Math. Soc, TVHưng thuộc số ít các sinh viên đại học toán có bài đăng trên tạp chí toán học lớn, chỉ số Impact Factor cao; và càng thuộc vào số ít ỏi, may mắn hơn trong số ít các sinh viên toán có bài báo khoa học và được học tại trường đại học California tại Berkeley. Con đường nghiên cứu sinh toán của THung, đại học Cornell có phần bớt trông gai hơn, khi THung đã từng học đại học tại Mỹ. Song câu chuyện mà cô sinh viên trường đại học sư phạm Đà Nẵng, mạnh bạo tìm tòi và nỗ lực đã được 3 trường, Texas A&M University (TA), University of Florida (Admission), Ohio University (Admission) nhận học quả rất đáng khâm phục. TNMai kể" năm 2007, Mai tốt nghiệp đại học xong thì mới nghĩ đến đi học US. Phong trào apply grad ở trường Mai chưa mạnh. Mai chưa biết nhiều về việc apply vào học tại US, trong khi chuẩn bị cho VEF 2008 thì không kịp nữa nên Mai chọn apply tự do. GRE, TOEFL iBT Mai cũng chỉ tự học và thi trong 1 năm. Lúc đó cũng đã là tháng 10, 2008, Mai biết được có một Leading mathematician từ Pháp đến dạy lớp Master ở Viện Toán 3 tuần nên Mai không thi lại TOEFL nữa và chọn ra Viện học để tìm cơ hội LORs/lobby. Vì ở xa nên lúc ra học các thầy ở Viện giúp đỡ rất nhiệt tình. Cũng bất ngờ, Mai học được 1 tuần thì được giáo sư Pháp đồng ý cho LORs, sau đó GS còn dành 2 ngày thứ bảy và CN kiểm tra lại luận văn tốt nghiệp của Mai. Luận văn không làm được gì mới, Mai chỉ độc lập chứng minh được mấy bổ đề của một bài báo đăng trên tạp chí của Úc. Lúc gửi luận văn cho GS, Mai đính kèm thêm CV (lý lịch) và 1 bản tóm tắt hướng phát triển luận văn mà giáo sư hướng dẫn cũ đã giao cho Mai làm. Đến chiều thứ 2, Mai ngồi nghe GS giảng bài mà rất hồi hộp về tài liệu nhờ giáo sư kiểm tra. Cuối buổi học thì niềm vui vỡ òa khi GS đến và nói rằng "I'm happy about those documents - tôi khá thích thú với luận văn của em". Ngày hôm sau GS có thêm một buổi nói chuyện với Mai. GS hỏi vài câu về luận văn, Mai trả lời được nên ông vui vẻ hướng dẫn thêm một hướng phát triển nữa rất hay. Ông gợi ý giới thiệu Mai vào trường đại học Chicago và Taxes- Austin, là hai chỗ ông thân thiết. Mai biết khả năng của mình ở đâu nên từ chối Chicago, còn Texas, cuối cùng mai cũng không nộp hồ sơ vì thư giới thiệu của GS về trường này Mai chưa nhận được. Sai lầm của Mai là đã không xin LORs paper ngay lúc GS đang còn ở Viện Toán, đang khá rảnh rỗi, hào hứng muốn viết LORs giúp mình. Sau này có một số trục trặc xung quanh việc request LORs, GS chưa hiểu nhiều về apply US, Mai thiếu kinh nghiệm apply... Giáo sư cũng đã cao tuổi (77) nên Mai không muốn làm phiền GS nhiều về việc LORs này nữa. Mai tự contact, tìm được strong lobby của Prof TAMU, UF, OH và cũng đã có được TAship. Chắc một phần là con gái nên được ưu tiên hơn. Một mặt thì CV, SOP, research plan của Mai đã chứa một cái LOR gián tiếp của GS Pháp đó rồi. Nên có thể nói Mai đã được sự giúp đỡ nhiều nhất của GS đó trong application của mình. Và Mai rất biết ơn ông về điều này." [5]

VI. Hành trình của riêng bạn?

Câu chuyện du học chắc chắn sẽ còn nhiều chương mới, tình tiết mới khi những học sinh, sinh viên như bạn không ngừng tìm tòi và tiếp cận các nguồn tri thức mới. Có thể du học đối với một số bạn vẫn là một việc xa vời, nhưng tiếp cận đến với luồng tri thức tiến bộ, giữa thời đại công nghệ thông tin, trong đó có các môn khoa học tự nhiên như Toán học là một điều gì đó đâu có mấy xa xôi. Hãy bắt đầu bằng những bước đi nhỏ, ước mơ lớn của bạn cũng từ đó được chấp cánh, bay xa. Và nhớ rằng:

" Hãy luôn vươn tới bầu trời, vì nếu không chạm tới những ngôi sao thì bạn cũng sẽ ở giữa những vì tinh tú..."

Tài liệu tham khảo

[1] Du học Liên Xô thời "bố mẹ", Công ty Tư vấn Du Học Baltic - Biesco và Mangduhoc.com,

`http://www.biesco.com.vn/apm/modules.php?name=News&file=article&sid=1361`, truy cập ngày 17 tháng 7 năm 2009.

[2] Tản mạn du học: Hà Huy Tài, đăng trên mạng Trái tim Việt nam online,

`http://ttvnol.com/forum/Duhoc/163396.ttvn` , truy cập ngày 17 tháng 7 năm 2009.

[3] 6 lý do để du học Châu Âu: Trung tâm tư vấn du học toàn cầu ASCI,

`http://www.duhoctoancau.com/index.php?asci=t&c=post&cid=3&id=328.vip`, truy cập ngày 17 tháng 7 năm 2009.

[4] Thảo luận cá nhân giữa các thành viên của trang web Vietphd.org

`http://vietphd.org/index.php` , truy cập ngày 17 tháng 7 năm 2009.

[5] Fall 2009: Kết quả admission và những kinh nghiệm : Bài viết của rất nhiều nghiên cứu sinh trong đó có TNMai, sau khi đã apply grad school thành công.

`http://vietphd.org/showthread.php?p=35996#post35996` , truy cập ngày 17 tháng 7 năm 2009.

Học Toán được gì?

Dịch bởi Lưu Trọng Luân*- Phan Thiết

▽

Giới thiệu. Không ít lần các thầy cô giáo, kể cả những thầy cô kinh nghiệm nhất, tâm huyết nhất với nghề, vẫn phải bối rối trước câu hỏi của học sinh, sinh viên "Học toán được gì?", "Em sẽ làm được những gì khi có tấm bằng cử nhân toán, thạc sĩ toán?". Bài viết dưới đây không trả lời cho những câu hỏi đó, nhưng có thể giúp chúng ta tự tin hơn với câu trả lời của mình. Chúng tôi cảm ơn GS Nguyễn Tiến Zũng đã phát hiện ra nguyên bản tiếng Anh của bài này và anh Lưu Trọng Luân, một giáo viên tiếng Anh ở Phan Thiết đã giúp chúng tôi dịch bài viết sang Tiếng Việt.

Bằng cấp Toán học mang lại lợi ích gì?

Dĩ nhiên là các kỹ năng tính toán rồi, bạn cần gì phải thắc mắc chứ.

Thực ra, theo trang web của Khoa Toán ĐH Warwick, thì bạn không chỉ có được những kỹ năng tính toán mà còn đạt được một số kỹ năng thiết yếu khác nữa.

Những kỹ năng về toán học

Là một sinh viên toán học, bạn sẽ học tất cả những môn chính của toán học hiện đại: đại số, giải tích, hình học, thống kê và toán ứng dụng. Trong toàn khóa học này, bạn sẽ được học:

- Ngôn ngữ toán học và các qui tắc lập luận.
- Cách phát biểu một mệnh đề toán học chính xác.
- Cách chứng minh một giả thuyết toán học đúng hoặc sai.
- Cách rút trích ý một bài toán trong sách.
- Cách sử dụng toán học để miêu tả thế giới tự nhiên.

Những kỹ năng phân tích

Một khi đã có bằng cấp về toán học, bạn sẽ không bao giờ chấp nhận việc lập luận hời hợt. Toán học mang lại cho bạn khả năng:

1. Suy nghĩ mạch lạc

*Lưu Trọng Luân dịch từ nguyên bản tiếng Anh *"What Can You Gain From A Mathematics Degree?"*, đăng trên trang trang web: `http://www.maths.warwick.ac.uk/pydc/white/skills.html` và được GS. Nguyễn Tiến Zũng giới thiệu trên trang web `http://zung.zetamu.com`

2. Lưu ý đến từng chi tiết

3. Làm chủ những ý tưởng chính xác và phức tạp

4. Lập luận phức tạp

5. Xây dựng những lý lẽ lô-gíc và chỉ ra nhưng lý lẽ phi lô-gíc

Các kỹ năng giải quyết vấn đề

Bạn sẽ được giao cho vô số những bài toán để giải quyết trong suốt khóa học. Trải nghiệm này sẽ giúp bạn:

1. Hệ thống một vấn đề bằng những lý lẽ chính xác, nhận dạng được những vấn đề then chốt

2. Trình bày một giải pháp rõ ràng, đưa ra những giả định rõ ràng

3. Hiểu thấu một vấn đề khó bằng cách nhìn vào những trường hợp đặc biệt hoặc những vấn đề phụ

4. Linh hoạt và tiếp cận cùng một vấn đề bằng nhiều quan điểm khác nhau

5. Đối phó với vấn đề một cách tự tin, ngay cả khi chưa có giải pháp rõ ràng

6. Tìm kiếm sự giúp đỡ khi cần

Các kỹ năng tìm tòi

Trong quá trình học, thỉnh thoảng bạn sẽ lâm vào tình huống cố gắng hiểu được những bài toán có vẻ quá khó và cố giải quyết những vấn đề mà thoạt đầu tưởng chừng như không thể. Bạn có thể được giao viết những bài luận và những dự án khiến bạn phải tự mình tìm hiểu một phạm trù toán học mà bạn chưa biết gì. Việc này sẽ biến bạn thành một nhà điều tra nghiệp dự, lần theo tiếng gọi của thông tin và nguồn cảm hứng. Bạn sẽ có những trải nghiệm:

1. Tra cứu các ghi chép về bài giảng, giáo trình, cũng như sách tham khảo

2. Xới tung thư viện

3. Tìm kiếm các nguồn thông tin tham khảo

4. Rút tỉa thông tin từ mọi nhà toán học mà bạn gặp (những sinh viên khác, sinh viên đã tốt nghiệp, người hướng dẫn và những giảng viên)

5. Tư duy

Các kỹ năng trao đổi thông tin

Một bằng cấp toán học sẽ phát triển khả năng nắm bắt và trao đổi ở mức độ cao những thông tin chuyên môn. Trong quá trình nghe giảng, bạn sẽ được yêu cầu sắp xếp và lưu trữ một khối lượng lớn thông tin toán học ở dạng nói cũng như viết. Những bài tập về nhà, và bất cứ bài luận hay dự án nào mà bạn thực hiện, cũng sẽ đòi hỏi sự trình bày mạch lạc theo ngôn ngữ toán học. Trong quá trình được kèm cặp, bạn sẽ tham gia trao đổi những ý kiến về toán học với người giám sát của mình và những sinh viên cùng khóa. Bạn còn tham gia thảo luận các vấn đề toán học qua việc đối thoại với các giảng viên và sinh viên cùng khóa. Ở những năm cuối, bạn có thể có cơ hội giảng dạy những sinh viên chưa tốt nghiệp khác. Qua những trải nghiệp này, bạn sẽ học được cách:

1. Lắng nghe hiệu quả
2. Viết tốt các vấn đề toán học
3. Viết luận và báo cáo
4. Thuyết trình một vấn đề toán học trước cả nhóm

Các kỹ năng vi tính

IT là từ viết tắt của Information Technology (công nghệ thông tin), bao hàm nghĩa “bất cứ thứ gì có liên quan đến máy vi tính”. Trong suốt quá trình học, bạn sẽ được quyền sử dụng các tiện ích công nghệ thông tin của trường. Bạn sẽ được:

1. Sử dụng e-mail và truy cập internet
2. Học một ngôn ngữ lập trình
3. Giải quyết các vấn đề bằng phần mềm toán học
4. Học kỹ năng soạn thảo văn bản, kể cả ở dạng chữ viết thông thường và dạng ký hiệu toán học

Những thói quen làm việc tốt

Để trở thành một sinh viên toán học thành công, bạn sẽ phải:

1. Tỉ mỉ và chịu khó trong công việc
2. Tổ chức tốt thời gian biểu và đúng hạn
3. Làm việc dưới áp lực, đặc biệt là khoảng thời gian gần kỳ thi
4. Làm việc độc lập mà không cần giáo viên hỗ trợ thường xuyên
5. Hợp tác với những sinh viên khác để giải quyết các vấn đề chung

Những nét tính cách hữu ích

Một giáo sư toán học từng nói với mỗi lứa sinh viên sắp vào năm nhất rằng bằng cấp toán học sẽ thay đổi họ suốt cả cuộc đời. Vật lộn thành công với những ý tưởng khó hiểu và các vấn đề khó giải quyết sẽ tạo nên:

1. Tính quả quyết
2. Tính kiên trì

3. Tính sáng tạo
4. Sự tự tin
5. Tính thận trọng trong tư duy

Thầy và Trò

Phan Thành Nam[*]

Kính tặng các thầy giáo Toán phổ thông

▽

Đứng trước Thầy, trò như nhỏ lại
Để ngộ rằng mình mới là măng
Hãy vươn thẳng, trời còn cao lắm
Chút mầm non chớ ngỡ tài năng[1] .

Thầy dạy rằng học Toán là gian khó
Bởi khát khao chẳng thể có bờ
Như con thuyền đi trên dòng nước ngược
Vượt thác ghềnh mới tới bể thơ.

Trước Toán học Thầy biết mình hữu hạn
Hàm thời gian đã chặn bởi hai đầu
Song Thầy vẫn dạy trò tiến bước
Vì chân trời thường cách bởi vực sâu.

Hơn một nẻo đường trò rộn bước
Với bao ngã rẽ ở tương lai
Một mệnh đề có hai điều sai đúng
Nhưng đời Thầy đường chọn chẳng còn hai

Chiều thu tím lòng trò cũng tím
Nhìn bóng Thầy nghiên cả không gian
Đường Toán học tựa đường đời muôn hướng
Vọng lời Thầy: đừng ngại những gian nan.

Nhân dịp 20-11 năm 2001
Phan Thành Nam, lớp Toán K00-03, THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên

[*]Nghiên cứu sinh tại khoa Toán, ĐH Copenhagen, Đan Mạch
[1]Có câu thơ rằng: "*...Chút mầm non cứ ngỡ tài năng*" (không nhớ tên tác giả)