|  |
| --- |
| PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẬN HAI BÀ TRƯNGĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 9NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN***Thời gian làm bài 150 phút*****Đề số 7** |

1. (5 *điểm*)

1) Cho  là các số thực khác  thỏa mãn 

Tính giá trị biểu thức: 

2) Giải phương trình 

1. (5 *điểm*)

1) Cho đa thức  với hệ số thực thỏa mãn  và  Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức  cho đa thức 

2) Tìm các cặp số nguyên  thỏa mãn ****

3) Cho  là các số nguyên dương phân biệt và  là số nguyên tố lẻ sao cho đều chia hết cho  Chứng minh rằng  .

1. (2 *điểm*)

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  với 

2) Với các số thực  thỏa mãn:  và  . Chứng minh rằng 

1. (6 *điểm*) Cho tam giác  vuông tại  có  và đường cao . Gọi  là chân các đường vuông góc hạ từ  lên . Gọi  là giao điểm của  và , cắt  tại điểm  Đường thẳng qua  song song với cắt  tại .

1) Chứng minh  là trung điểm .

2)cắt  tại . Chứng minh:  và 

3) Gọi  là giao điểm của  và . Kẻ  vuông góc với  Chứng minh rằng 

1. (1 *điểm*) Cho lục giác đều  có diện tích  và  điểm nằm trong lục giác đều ****. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có  đỉnh là  điểm trong  điểm đã cho có diện tích không lớn hơn 

🙢**HẾT**🙠

|  |
| --- |
| **HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 QUẬN ĐỐNG ĐA****Năm học: 2020-2021** |

**Lời giải**

1. (5 *điểm*)

1) Cho  là các số thực khác  thỏa mãn 

Tính giá trị biểu thức: 

2) Giải phương trình 

**Lời giải**

1) Ta có: 

Suy ra 

Do đó, .

TH1:  suy ra:  Suy ra 

TH2: suy ra 

2) Giải phương trình ****

Điều kiện xác định: 

Biến đổi phương trình về dạng 

Vì  và với mọi nên 

Dấu “=” xảy ra khi 

Vậy nghiệm của phương trình là 

1. (5 *điểm*)

1) Cho đa thức  với hệ số thực thỏa mãn  và  Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức  cho đa thức 

2) Tìm các cặp số nguyên  thỏa mãn ****

3) Cho  là các số nguyên dương phân biệt và  là số nguyên tố lẻ sao cho đều chia hết cho  Chứng minh rằng  .

**Lời giải**

1) Đặt 

Ta có  và 

Suy ra  Vậy đa thức dư là 

2) Biến đổi phương trình về dạng .

TH1: 

TH2: 

TH3: 

TH4: 

Từ đó giải ra được 

3) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng:  .

Thấy rằng  đều chia hết cho suy ra  đều không chia hết cho .

 Từ giả thiết  đều chia hết cho  ta suy ra  mà  suy ra  ,

 Tương tự ta cũng có:  suy ra  và  .

Ta có  và  .

Nếu  thì  dẫn đến  mà  là số nguyên tố lẻ nên trái với giả thiết vậy  .

Sử dụng các dữ kiện: 

1. (2 *điểm*)

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  với 

2) Với các số thực  thỏa mãn:  và  . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

1) Vì , ta xét , do đó  vì .

Dấu “=” xảy ra khi  suy ra 

Vậy  đạt giá trị nhỏ nhất là  khi 

Vì , ta xét 

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: 

Do đó, , dấu “=” xảy ra khi  suy ra 

Vậy  đạt giá trị lớn nhất là  khi 

2) Từ giả thiết ta có:  .

Sử dụng bất đẳng thức  ta suy ra 

 Vì  .

**Chú ý:** Nếu học sinh chứng minh được  cho nửa số điểm.

Từ giả thiết  suy ra .

Do đó, 

1. (6 *điểm*)

Cho tam giác  vuông tại  có  và đường cao . Gọi  là chân các đường vuông góc hạ từ  lên . Gọi  là giao điểm của  và , cắt  tại điểm  Đường thẳng qua  song song với cắt  tại .

1) Chứng minh  là trung điểm .

2)cắt  tại . Chứng minh:  và 

3) Gọi  là giao điểm của  và . Kẻ  vuông góc với  Chứng minh rằng 

**Lời giải**



1) Do  theo định lý Thales ta có:  mà  là trung điểm  nên 

dẫn đến  hay  là trung điểm .

**Cách khác:** Có thể nói  là trung điểm  dựa trên định lý đường trung bình của tam giác 

2) Ta có  . Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  ta có: .

Từ đó suy ra .

Chứng minh tương tự ta có: .

Suy ra 

**Cách khác:** Theo định lý Thales ta có: , tương tự ta cũng có:  dẫn đến .

3) Sử dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông  với ta có từ đó suy ra **** dẫn đến  . Gọi  là trung điểm của  thì  nên tam giác cân tại , suy ra . Từ đó suy ra  nên  nên  là trực tâm của tam giác dẫn đến  hay (\*).

Tam giác  vuông tại , có  hay (\*\*). Từ (\*),(\*\*) suy ra  là trung trực của  dẫn đến  nên tam giác  vuông tại 

1. (1 *điểm*)

Cho lục giác đều  có diện tích  và  điểm nằm trong lục giác đều ****. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có  đỉnh là  điểm trong  điểm đã cho có diện tích không lớn hơn 

**Lời giải**

Bổ đề: Lấy  điểm trong một hình bình hành, khi đó tam giác tạo bởi  điểm đó có diện tích bé hơn hoặc bằng nửa diện tích hình bình hành.

Áp dụng: Gọi  là tâm của lục giác đều, khi đó lục giác chia thành  hình bình hành là . Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một hình bình hành chứa ít nhất  điểm và theo bổ đề  điểm này tạo tam giác có diện tích nhỏ hơn nửa diện tích hình bình hành, hay diện tích không lớn hơn 

🙢**HẾT**🙠