**ĐỀ SỐ 032**

**(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Phú Yên 2023-2024)
Thò̀i gian làm bài : 150 phút**

Câu 1.(3,00 điểm) Cho biểu thức: .
a) Tìm điều kiện của  để  có nghĩa.
b) Tính  khi .

Câu 2.(4,00 điểm) Giải hệ phương trình



Câu 3.(3,00 điểm) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: .
Câu 4.(3,00 điểm) Cho đường tròn  đường kính  là trung điểm của  là một điểm thuộc  sao cho . Đường thẳng  cắt  tại  (D khác , đường thẳng qua  và vuông góc với  cắt  tại  (  khác  ), đường thẳng  cắt đường thẳng  tại .
a) Chứng minh .
b) Đường thẳng qua  song song với  cắt  tại  và cắt  tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng 3 điểm  thẳng hàng.
c) Trong trường hợp , tính độ dài đoạn thẳng  theo .

Câu 5.(5,00 điểm)
a) Cho  là 3 số dương. Chứng minh rằng: .

b) Cho  là các số thực dương thỏa mãn: .

Chứng minh rằng .

Câu 6.(2,00 điểm) Cho tam giác  vuông tại , đường cao . Gọi  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Chứng minh rằng .

**ĐÁP ÁN**

Câu 1.(3,00 điểm)

a) Tìm điều kiện của  để  có nghĩa là:

Vì  nên điều kiện của  để  có nghĩa là:

b) Tính  biết 

Biến đổi ta có: 



Câu 2.(4,00 điểm)

Giải hệ phương trình: 

Phương trình (2) tương đương:



Đặt  thì phương trình (3) là:



Ta thấy:  nên từ (4) suy ra .

Từ  ta có: . Thế vào (1) ta được:

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: .

Câu 3.(3,00 điểm)

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: .

Biến đổi (1): 



Giả sử  thì .

Từ (2) ta có các hệ phương trình sau:

a)  b) 

c) 

e) 

g) 

Chỉ có hệ d) có nghiệm nguyên  và hệ e) có nghiệm nguyên .

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm .

Câu 4.(3,00 điểm)



a) Chứng minh 

Dễ thấy  cân tại  (1).

Theo tính chất góc ngoài tam giác thì  (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với  suy ra 

Suy ra .

Vì điểm  nằm chính giữa cung  nên  là đường phân giác của



b) Chứng minh 3 điểm  thẳng hàng

Vì  và  suy ra  nên



Gọi  là giao điểm của  và .  có  vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên cân tại  suy ra  (5). Từ (4) và (5) suy ra ; hay  thẳng hàng.

c) Tính số đo  theo  khi 

Khi , kết hợp với (3) suy ra . Vì  (gt) nên  là đường trung bình , suy ra  là trung điểm của .

Khi đó  là trọng tâm .

Câu 5.(5,00 điểm)

a) Cho  là 3 số dương. CMR: .

Xét hiệu: .

Ta thấy: 



Vì  là 3 số dương nên  nên  (Dấu "=" xảy ra khi  ).

Theo định nghĩa bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

b) Cho  là các số thực dương thỏa mãn: 

Chứng minh rằng .

Đặt  thì . (1) viết lại là: .



Vì vậy .

Câu 6.(2,00 điểm)



Gọi  lần lượt là giao điểm của  với  và  với .

Ta có .

Mà 

do đó  hay  (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có  (2).

Từ (1) và (2), kết hợp với  và  cùng đi qua điểm  suy ra  là trực tâm của tam giác , do đó  là đường cao của tam giác .

Ta thấy 

(3)

Mặt khác 

Suy ra tam giác  vuông cân

(g.c.g)  (4)

Từ (3) và (4) ta có:



Chia hai vế đẳng thức trên cho biểu thức  với chú ý rằng  ta được .