**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta thấy bài toán có chứa hai căn thức nhưng các đại lượng trong các căn thức liên hệ với nhau không có “thân tình” với đại lượng còn lại ở vế phải của phương trình nên ta không thể ẩn phụ hóa hai căn thức để rồi biểu diễn đại lượng còn lại theo ẩn phụ được. Do đó để có thể tìm được mối liên quan giữa các đại lượng với nhau trong bài toán ta cần phải thoát căn thức để làm giảm độ phức tạp của bài toán. Để thoát căn thức thì phép nâng lũy thừa là ưu tiên hàng đầu.

Dùng phép nâng lũy thừa ta biến đổi phương trình về phương trình:





Phương trình vừa biến đổi chỉ chứa một căn thức nên ta hoàn toàn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa một lần nữa để giải phương trình bậc 4. Tuy nhiên hướng đi này, chúng ta sẽ tìm hiểu tiếp theo ở phần sau. Vấn đề bây giờ là ta đi tìm các mối liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình với đại lượng chứa trong căn thức.

Ta có: 

Khi đó nếu ta đặt  thì phương trình vừa có được sau phép nâng lũy thừa trở thành phương trình: 

Xem phương trình này là phương trình bậc hai theo biến t thì phương trình có biệt thức 

Điều này có nghĩa rằng phương trình bậc hai theo t hoàn toàn tách được nhân tử. Vậy đến nay ta đã kết thúc bước đi tìm mối liên quan giữa các đại lượng với nhau.

**Cách giải:** Điều kiện  

Phương trình đã cho được biến đổi thành:

 







Đặt  . Lúc đó phương trình (1) trở thành:



Phương trình (2) có biệt số: 

Suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt: 

Với  

Với    

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm: 

**- Bình luận.** Đây là hướng đi ẩn phụ hóa không hoàn toàn hay còn gọi là sử dụng biệt số Delta chính phương để tách nhân tử của phương trình, một trong những phương án cũng thường gặp trong kì thi hoặc ở một lớp bài toán phương trình vô tỷ. Phương pháp này, cần có những kỉ năng biến đổi thích hợp và khéo léo giữa các đại lượng để có thể tìm được biệt số Delta chính phương thành công.Trong các phần phân tích sau chúng ta sẽ biết cách để đạt được điều đó ta cần qua những bước phân tích cơ sở nào. Và lối đi trong bài toán là tìm ẩn phụ sau một phép biến đổi nâng lũy thừa cũng là một lối đi mà ta thường sử dụng khi cần ẩn phụ hóa.

**Ví dụ 5.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát phương trình ta thấy phương trình chứa ba căn thức, trong đó có hai căn thức chứa căn bậc nhất và một căn thức chứa tam thức bậc hai. Với phương trình phép nâng lũy thừa xem như thất bại. Vậy ta sẽ chuyển hướng tìm mối quan hệ giữa các đại lượng để tìm cách ẩn phụ hóa.

Trước tiên ta quan tâm đến hai đại lượng bậc nhất và đại lượng tam thức bậc hai có liên quan gì đặc biệt không?

Ta có: 

Với nhận xét này, ta có thể ẩn phụ hóa cả hai căn thức hoặc một căn thức, tuy nhiên quan sát thấy hệ số đứng trước các căn thức chứa đại lượng bậc nhất không có sự tương đồng nên ta không nên đặt một ẩn phụ mà là cả hai ẩn phụ và sử dụng tìm hệ số bất định để gắn kết các đại lượng lại với nhau theo ẩn phụ.

**Cách giải:** Điều kiện  

Đặt  .

Khi đó ta có:   .

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:



Nhận xét rằng vế trái và vế phải của (1) đều là phương trình đẳng cấp.

Do đó ta xét các khả năng.

Với  , không thỏa phương trình đã cho.

Với , đặt  . Khi đó (1) trở thành:





  vì 

Với    

Với    

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm 

**- Bình luận.** Bài toán này là bài toán có lối ẩn phụ hóa rất thường gặp trong phương trình vô tỷ. Bài toán có chứa  và  Có thể phát triển bài toán này theo nhiều góc độ khác nhau và ứng với mỗi góc độ ta sẽ có lối đi ẩn phụ hóa phù hợp và điều đó lệ thuộc nhiều vào cách nhìn và biến đổi của người giải. Chúng ta sẽ có rất nhiều bài toán để có luyện tập cho bài toán này.

**Ví dụ 6.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này có nhiều lối đi khác nhau, ở nay ta quan sát bài toán dưới cái nhìn ẩn phụ hóa. Vế phải phương trình là một phân thức có tử là một đa thức bậc 3 và mẫu là một tam thức bậc 2, còn vế trái chứa một căn thức mà bên trong là một đại lượng bậc 2 nên ta thử biến đổi khéo léo các đại lượng tử và mẫu của phân số với đại lượng trong căn thức xem thế nào?

Ta có: .

Mặt khác: 

Khi đó với  thì phương trình đã cho trở thành:

 

Xem phương trình (1) là phương trình bậc ba theo biến t, ta sẽ cố gắng bắt nhân tử bằng cách đoán nghiệm dựa trên hệ số hoặc bằng kỉ thuật thêm bớt. Ta để ý rằng với các hệ số ở phương trình (1) thì việc đoán nghiệm dạng với k là số thực khác không là điều không dễ nên ta sẽ nghĩ đến việc có khi nghiệm mà ta cần đoán có thể ở dạng  Mà điều này là không dễ dàng nên để đi tìm nghiệm này thì ta sẽ cố gắng tách phương trình (1) sao cho có nhân tử .

Thật vậy ta biến đổi (1) ta có:



 

Tới nay ta đã thành công trong việc biểu diễn ẩn phụ theo các đại lượng liên quan trong phương trình dù không triệt để hết.

**Cách giải:** Đặt: .

Lúc đó phương trình đã cho được viết lại:





 

 

  . Đối chếu điều kiện ta có: 

Với   

Với    

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm .

**- Bình luận.** Qua bài toán này đã giúp chúng ta thấy được tầm quan trọng của việc biến đổi khéo léo giữa ẩn phụ và các đại lượng liên quan đôi lúc phép biến đổi đó rất triệt để nhưng cũng có đôi lúc phép biến đổi đó không triệt để được, Vì vậy tầm quan trọng của ẩn phụ hóa mà chúng tôi đề cập ở trên đó chính là cần phải tìm được mối liên quan giữa ẩn phụ và đại lượng có trong phương trình.

**Ví dụ 7.** Giải phương trình 

**- phân tích hướng giải.** Phương trình này có hình thức khá giống với phương trình vừa xét, nhưng ta không thể ứng dụng được lối giải của bài toán vừa xét vào bài toán này vì đại lượng trong căn chỉ là bậc nhất, việc tạo ra các biểu thức liên quan sẽ rắc rối. Có 1 điều rất tự nhiên trong phương trình vô tỷ đó là nếu trong phương trình chỉ chứa một căn thức có đại lượng bậc nhất thì khi muốn ẩn phụ hóa ta chỉ cần đặt t bằng căn thức. Khi đó ta cần thêm yếu tố về nghiệm của phương trình để có thể tự tin về ẩn phụ hóa. Đối với phương trình này, sử dụng máy tính ta biết được phương trình có nghiệm duy nhất là  Điều này giúp chúng ta khẳng định được mạnh mẽ hơn việc ẩn phụ hóa phương trình này.

**Cách giải:** Điều kiện  

Đặt , . Lúc đó ta có: 

Do đó phương trình đã cho được biến đổi thành:



 

Nhận xét rằng với thì ta có:

 

Do đó (1) cho ta:    

Đối chiếu điều kiện ta có được nghiệm là 

**- Bình luận.** Qua bài toán này ta nhận thấy rằng nếu phương trình có chứa một căn thức mà căn thức đó chứa đại lượng bậc nhất, cùng với nghiệm của phương trình tìm được bằng máy tính là “đẹp” thì ta hoàn toàn có thể ẩn phụ hóa bài toán thành công. Đây cũng chính là lối đi thường gặp trong các bài toán thi.

**Ví dụ 8.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta thấy bài toán có chứa ba căn thức bậc ba, trong đó có hai căn thức chứa tam thức bậc 2 nên nếu dùng phép lũy thừa cho bài toán này có thể chúng ta sẽ vướng phải những tính toán rắc rối. Do đó, ta chuyển hướng ẩn phụ hóa cho bài toán này.

Trước tiên ta tìm mối liên hệ giữa các đại lượng tham gia phương trình xem chúng ta có được điều gì?

Nhận xét ta có: 

Do đó nếu đặt  

Từ đây kết hợp với phương trình ta có hệ: 

Quan sát hệ này, ta cảm giác được ngay chìa khóa giải quyết bài toán chính là hằng đẳng thức.

**Cách giải:** Đặt  

Kết hợp với phương trình ta có hệ:  .

Lại có: 

Suy ra:   

 

Thử lại ta có tâp nghiệm của phương trình là 

**- Bình luận.** Hệ phương trình chúng ta thu được giải quyết bằng hằng đẳng thức và thế, một trong những hướng giải quyết cũng thường gặp trong quá trình ẩn phụ hóa phương trình.

**Ví dụ 9.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán thoạt nhìn ta thấy hết sức rối mắt vì đã chứa hai căn bậc lệch lại còn các đại lượng dưới căn thức lại chứa căn. Tuy nhiên quan sát một chút và đủ tinh ý trong đại số, ta sẽ thấy rằng hai đại lượng chứa trong hai căn thức có gắn kết với nhau.

Thật vậy ta có: 

Từ đó ta nghĩ đến nếu ta đặt  

Vậy là xem như mối liên hệ gữa đại lượng có trong phương trình và ẩn phụ hóa đã hoàn tất.

**Cách giải:** Đặt  .

Lúc đó phương trình đã cho trở thành phương trình:

  

Lại đặt   Ta có (1) trở thành:

  

Đối chiếu điều kiện ta có:   

Từ đó ta có:

   

**- Bình luận.** Việc phương trình có chứa cặp số mà tích của chúng bằng k số thực thì việc giải quyết nó bằng ẩn phụ là hoàn toàn có thể giải quyết được, một lối đi cũng thường gặp.

Với 9 ví dụ vừa phân tích trên chắc độc giả đã có phần nào về việc trả lời được câu hỏi khi nào giải phương trình vô tỷ bằng ẩn phụ. Theo những gì đã phân tích trên đã cho ta thấy được để giải một phương trình vô tỷ theo hướng ẩn phụ hóa, ta cần nhất chính là sự phát hiện các đại lượng liên quan đến ẩn phụ bằng mối quan hệ nào? Tìm được mối quan hệ này ta sẽ đi được đến lời giải bài toán. Vậy ta có thể khẳng định được rằng các phương trình giải bằng ẩn phụ hóa thì các đại lượng trong phương trình phải có cộng hưởng được với ẩn phụ hoặc triệt để hoặc không triệt để.

**3. Khi nào nên sử dụng lượng liên hợp?**

Có một lớp bài toán phương trình vô tỷ mà với hai phương pháp đầu ta xét tính không thể giải quyết được vì nó quá phức tạp khi nâng lũy thừa hoặc không tìm được mối tương quan hỗ trợ nào khi muốn ẩn phụ hóa. Nhưng nghiệm của phương trình lại chỉ ra được, khi đó phương pháp nhân lượng liên hiệp sẽ phát huy mạnh vai trò của nó. Bản chất thực sự của phương pháp này là lạm dụng các kỉ năng liên hiệp để bắt nhân tử chung tách tích trong đó có một thừa số trong tích chỉ ra nghiệm của phương trình, còn thừa số còn lại thường ta phải đánh giá nó vô nghiệm hoặc kết hợp với phương trình đầu hoặc dùng kỉ thuật đã biết để tìm nghiệm của nó. Để có thể hiểu rõ hơn và thấy được ưu và nhược điểm của phương pháp này cũng như thực hành lại một lần nữa các kỉ năng liên hợp ta chỉ ra trong phần phương pháp ta xét các ví dụ sau.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán có hình thức đơn giản dễ đánh lừa giác quan của chúng ta giải quyết nó bằng lũy thừa, tuy nhiên qua hai lần lũy thừa để thoát căn thức ta đi đến phương trình bậc 6, một phương trình không phải để thử lửa trong lúc làm bài thi được. Sự xuất hiện của hai căn thức và các đại lượng trong căn thức không có mối liên quan nào cả nên việc ẩn phụ hóa là hoàn toàn không khả thi. Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất  Do đó ta sẽ sử dụng phương pháp liên hợp để tạo cho phương trình có dạng 

Ta để ý rằng khi  thì ta có:  

Từ đó ta đi đến cách giải sau:

**Cách giải:** Điều kiện  

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:





Nhận xét:  với 

Do đó (1) cho  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là 

**- Bình luận.** Ở bài toán này ta thấy phép nhân liên hợp bắt nhân tử cho lời giải vô cùng đơn giản, cách tạo biểu thức liên hợp đó chính là tìm giá trị của căn thức tại vị trí của nghiệm để từ đó thêm bớt tạo được nhân tử, phần còn lại đánh giá khá đơn giản.

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này có hình thức khá giống với phương trình vừa xét, việc sử dụng hai phương án kia chúng ta tạm thời gác lại mà chủ yếu nhấn mạnh vào yếu tố vì sao có thể giải được phương trình này bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất 

Mặt khác ta để ý thấy rằng: 

Lại có:  Do đó ta đi đến lời giải sau:

**Cách giải:** Điều kiện  

Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi thành:

 



Nhận xét:  với 

Do đó (1) cho  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Bài toán này được liên hợp “một cách rất nội tạng” tức là bản chất phương trình đã chứa sẵn biểu thức liên hợp từ việc nhận định cả hai đại lượng trong căn thức đề chứa số 9 và hệ số của biến giúp tạo ra được nhân tử cần tìm.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Phương trình này hình thức cho ta biết hai phương pháp mà ta vừa phân tích ở trên hoàn toàn bất lực với phương trình này. Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm  Do đó ta sẽ cần tìm cách liên hợp để xuất hiện cho được nhân tử chứa hai nghiệm này. Với phương trình này, ta cần tìm nhân tử có dạng là một tam thức bậc hai vì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Do đó với hai giá trị của nghiệm ta sẽ thu được hai số a, b thỏa hệ đẳng thức: .

Thay lần lượt hai giá trị nghiệm của phương trình ta thu được 

Tương tự cho đẳng thức: 

Ta sẽ thu được 

Lúc đó ta sẽ hoàn thiện phương trình bằng cách thêm bớt sao cho phương trình vẫn không đổi và bắt đầu liên hợp.

**Cách giải:** Điều kiện  

Với  phương trình không thỏa.

Với  ta biến đổi phương trình đã cho thành:







Nhận xét:  

Do đó từ (1) ta có:  

Đối chiếu với điều kiện , ta có nghiệm là 

Kết hợp lại ta có nghiệm là: 

**- Bình luận.** Bài toán này các bạn lưu ý chúng tôi đưa ra nghiệm  trước là có lí do. Vì khi thì biểu thức  nên ta không thể nhân lượng liên hợp được. Do đó việc khép chặt lại miền nghiệm như trong lời giải giúp cho phép liên hợp được thành công. Đây là một trong những yếu tố mà các bạn rất dễ phạm sai lầm.