

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ SỐ 10

**Câu 1:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$  có hai điểm cực trị thuộc khoảng  $(-3; 3)$ .

A. 12.

**B. 11.**

C. 13.

D. 10.

Lời giải

**Chọn B.**

Ta có  $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng  $(-3; 3)$  khi và chỉ khi phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2 \in (-3; 3)$ .

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2 \in (-3; 3)$ .

$\Leftrightarrow m = 3x^2 - 6x$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2 \in (-3; 3)$ .

Xét hàm số  $f(x) = 3x^2 - 6x$ .

Ta có  $f'(x) = 6x - 6$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Bảng biến thiên

|         |    |    |   |
|---------|----|----|---|
| $x$     | -3 | 1  | 3 |
| $f'(x)$ | -  | 0  | + |
| $f(x)$  | 45 | -3 | 9 |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $-3 < m < 9$ .

Vậy  $m \in \{-2; -1; 0; \dots; 8\}$ .

**Câu 2:** Gọi  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) là số phức thỏa mãn điều kiện  $|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10}$  và có mô đun nhỏ nhất. Tính  $S = 7a + b$ ?

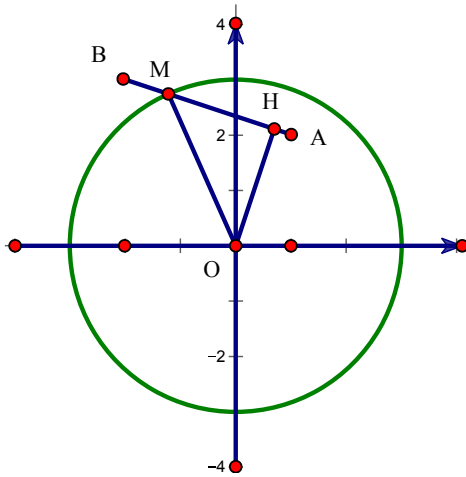
**A. 7.**

B. 0.

C. 5.

D. -12.

Lời giải



**Chọn A**

Gọi  $M(a; b)$  là điểm biểu diễn số phức  $z = a + bi$

$A(1; 2)$  là điểm biểu diễn số phức  $(1 + 2i)$

$B(-2; 3)$  là điểm biểu diễn số phức  $(-2 + 3i)$ ,  $AB = \sqrt{10}$

$$|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10} \text{ trở thành } MA + MB = AB$$

$\Leftrightarrow M, A, B$  thẳng hàng và M ở giữa A và B

Gọi H là điểm chiếu của O lên AB, phương trình  $(AB): x + 3y - 7 = 0$ ,  $(OH): 3x - y = 0$

Tọa độ điểm  $H\left(\frac{7}{10}; \frac{21}{10}\right)$ , Có  $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{3}{10}; \frac{1}{10}\right)$ ,  $\overrightarrow{BH} = \left(\frac{27}{10}; -\frac{9}{10}\right)$  và  $\overrightarrow{BH} = -9\overrightarrow{AH}$

Nên H thuộc đoạn AB

$|z|$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow OM$  nhỏ nhất, mà M thuộc đoạn AB

$$\Leftrightarrow M \equiv H\left(\frac{7}{10}; \frac{21}{10}\right)$$

Lúc đó  $S = 7a + b = \frac{49}{10} + \frac{21}{10} = 7$ . **Chọn A**

**Câu 3:** Cho khối lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $A'B = a\sqrt{6}$ , đường thẳng  $A'B$  vuông góc với đường thẳng  $B'C$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo  $a$ .

**A.**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .

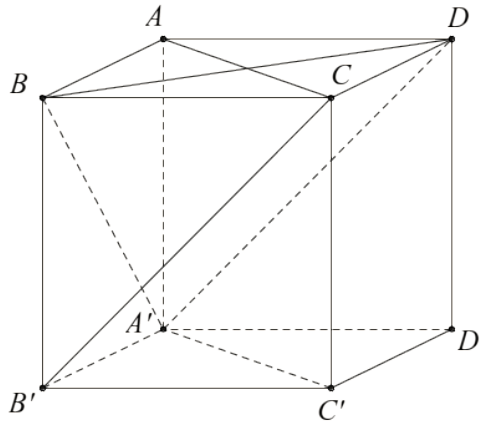
**B.**  $a^3\sqrt{6}$ .

**C.**  $\frac{3a^3}{4}$ .

**D.**  $\frac{9a^3}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Dựng hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  khi đó tứ giác  $ABCD$  là hình thoi.

Đặt  $AB = x \Rightarrow AD = x$ .

Tam giác  $ABD$  có góc  $\widehat{BAD} = 120^\circ$  nên:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}} = x\sqrt{3}.$$

Ta có:  $A'B = a\sqrt{6} \Rightarrow A'D = a\sqrt{6}$ .

Ta có:  $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'B \perp A'D \Rightarrow \Delta A'BD$  vuông tại  $A'$

$$\Rightarrow BD^2 = A'B^2 + A'D^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a.$$

Chiều cao hình trụ  $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}.$$

**Câu 4:** Cho đường cong  $(C): y = x^3$ . Xét điểm  $A$  có hoành độ dương thuộc đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A$  tạo với  $(C)$  một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ của điểm  $A$  thuộc khoảng nào dưới đây?

A.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

B.  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

C.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

D.  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Xét  $A(a; a^3) \in (C), (a > 0) \Rightarrow$  tiếp tuyến tại  $A: y = 3a^2(x - a) + a^3 = 3a^2x - 2a^3$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \int_{-2a}^a |x^3 - 3a^2x + 2a^3| dx = \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx = \frac{27}{4}a^4 = 27 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} (a > 0)$$

- Câu 5:** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình  $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để phương trình đó có nghiệm  $z_0$  thỏa mãn  $|z_0| = 7$ ?
- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$$

+) Nếu  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$ , phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó  $|z_0| = 7 \Leftrightarrow z_0 = \pm 7$ .

Thế  $z_0 = 7$  vào phương trình ta được:  $m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}$  (nhận).

Thế  $z_0 = -7$  vào phương trình ta được:  $m^2 + 14m + 63 = 0$ , phương trình này vô nghiệm.

+) Nếu  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ , phương trình có 2 nghiệm phức  $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$  thỏa  $z_2 = \overline{z_1}$ .

Khi đó  $z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 7^2$  hay  $m = 7$  (loại) hoặc  $m = -7$  (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của  $m$  là  $m = 7 \pm \sqrt{14}$  và  $m = -7$ .

- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 2 = 0$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $M$  cách đều gốc tọa độ  $O$  và mặt phẳng  $(P)$ ?
- A. 4.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 1.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì  $M \in d \Rightarrow M(-2t; 1+t; t)$ .

$M$  cách đều gốc tọa độ  $O$  và mặt phẳng  $(P)$  nên

$$OM = d(M; (P))$$

$$\Rightarrow \sqrt{6t^2 + 2t + 1} = \frac{|-3t - 3|}{3}$$

$$\Rightarrow 5t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0.$$

Vậy có 1 điểm  $M$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 7:** Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm  $(x; y)$  thoả mãn điều kiện  $\log_2 \frac{x^2 + y^2 + 6}{4x + 6y + 9} + 1 \geq \log_2 \frac{x^2 + y^2 + 5}{2x + 3y + 4}$ ?

A. 43

B. 49

**C. 42**

D. 45

**Lời giải**

**Chọn C**

Với  $x, y \geq 0$ . Ta có  $\log_2 \frac{x^2 + y^2 + 6}{4x + 6y + 9} + 1 \geq \log_2 \frac{x^2 + y^2 + 5}{2x + 3y + 4}$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 + y^2 + 6}{4x + 6y + 9} \geq \log_2 \frac{x^2 + y^2 + 5}{2x + 3y + 4} - 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 + y^2 + 6}{4x + 6y + 9} \geq \log_2 \frac{x^2 + y^2 + 5}{4x + 6y + 8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 6}{4x + 6y + 9} \geq \frac{x^2 + y^2 + 5}{4x + 6y + 8}$$

Đặt  $a = x^2 + y^2 + 5; b = 4x + 6y + 8 (a, b > 0)$

Suy ra  $\frac{a+1}{b+1} \geq \frac{a}{b} \Leftrightarrow (a+1).b \geq a(b+1) \Leftrightarrow b \geq a$

Do đó  $4x + 6y + 8 \geq x^2 + y^2 + 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 16$

Suy ra  $-4 \leq x-2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6$ ; mà  $x \geq 0$  và  $x \in \mathbb{Z}$  nên ta có các trường hợp sau

**Trường hợp 1:**  $x=0 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 12 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{2} \leq y \leq 3+2\sqrt{3}$

Do  $y \geq 0$  và  $y \in \mathbb{Z}$  nên  $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Suy ra có 7 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

**Trường hợp 2:**  $x=1 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 15 \Leftrightarrow 3-\sqrt{15} \leq y \leq 3+\sqrt{15}$

Do  $y \geq 0$  và  $y \in \mathbb{Z}$  nên  $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Suy ra có 7 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

**Trường hợp 3:**  $x=2 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 16 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 7$

Do  $y \geq 0$  và  $y \in \mathbb{Z}$  nên  $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Suy ra có 8 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

**Trường hợp 4:**  $x=3 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 15 \Leftrightarrow 3-\sqrt{15} \leq y \leq 3+\sqrt{15}$

Do  $y \geq 0$  và  $y \in \mathbb{Z}$  nên  $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Suy ra có 7 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

**Trường hợp 5:**  $x=4 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 15 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{3} \leq y \leq 3+2\sqrt{3}$

Do  $y \geq 0$  và  $y \in \mathbb{Z}$  nên  $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Suy ra có 7 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

**Trường hợp 6:**  $x=5 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 7 \Leftrightarrow 3-\sqrt{7} \leq y \leq 3+\sqrt{7}$

Do  $y \geq 0$  và  $y \in \mathbb{Z}$  nên  $y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ .

Suy ra có 5 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

**Trường hợp 7:**  $x = 6 \Rightarrow (y - 3)^2 \leq 0 \Rightarrow y = 3$ .

Suy ra có 1 cặp  $(x; y)$  thoả mãn.

Vậy có tất cả 42 cặp số nguyên không âm  $(x; y)$  thoả mãn điều kiện bài toán.

**Câu 8:** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đường cao  $SO$ ,  $A$  và  $B$  là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng

cách từ  $O$  đến  $(SAB)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$  và  $\angle SAO = 30^\circ, \angle SAB = 60^\circ$ . Độ dài đường sinh của hình nón theo  $a$  bằng

**A.**  $a\sqrt{2}$ .

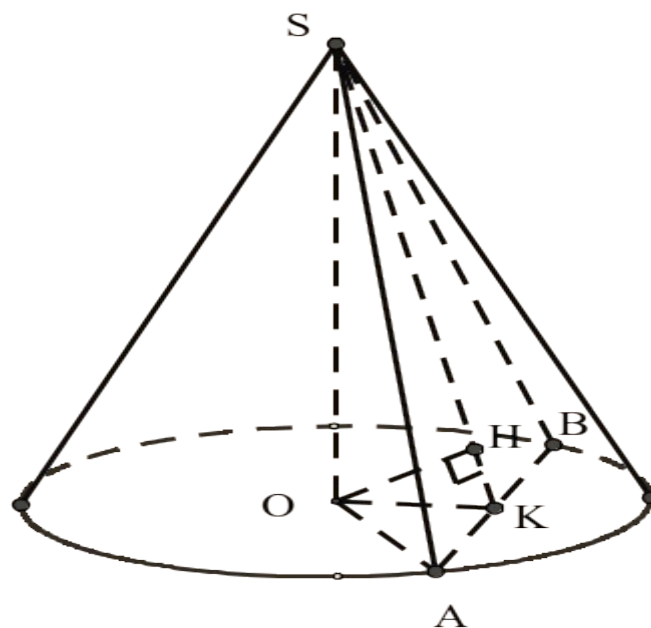
**B.**  $a\sqrt{3}$ .

**C.**  $2a\sqrt{3}$ .

**D.**  $a\sqrt{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $K$  là trung điểm của  $AB$  ta có  $OK \perp AB$  vì tam giác  $OAB$  cân tại  $O$

Mà  $SO \perp AB$  nên  $AB \perp (SOK) \Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$  mà  $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$  nên từ  $O$

dựng  $OH \perp SK$  thì  $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O, (SAB))$

Xét tam giác  $SAO$  ta có:  $\sin \angle SAO = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SA}{2}$

Xét tam giác  $SAB$  ta có:  $\sin \angle SAB = \frac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$

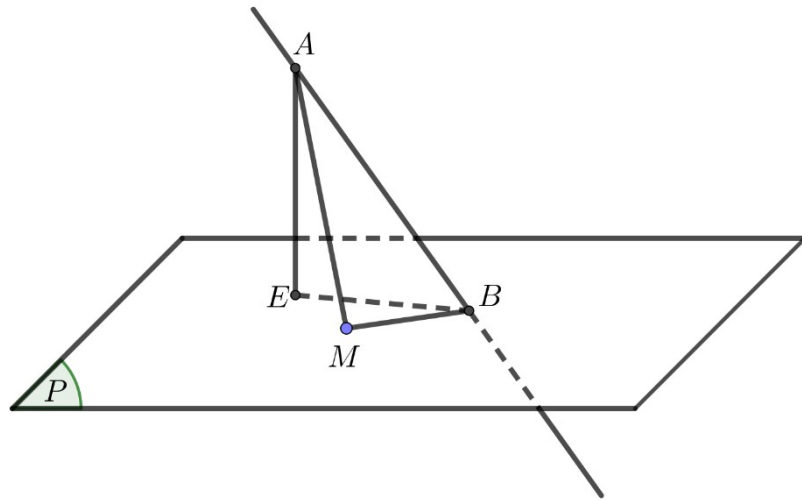
Xét tam giác  $SOH$  ta có:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{SK^2 - SO^2} + \frac{1}{SO^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \frac{4}{SA^2} + \frac{2}{SA^2} \Rightarrow \frac{6}{SA^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$  và mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ . Đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và có vectơ chỉ phương  $u = (3; 4; -4)$  cắt  $(P)$  tại  $B$ . Điểm  $M$  thay đổi trong  $(P)$  sao cho  $M$  luôn nhìn đoạn  $AB$  dưới góc  $90^\circ$ . Khi độ dài  $MB$  lớn nhất, đường thẳng  $MB$  đi qua điểm nào trong các điểm sau?
- A.  $H(-2; -1; 3)$       B.  $I(-1; -2; 3)$       C.  $K(3; 0; 15)$       D.  $J(-3; 2; 7)$

Lời giải

Chọn B



+ Đường thẳng  $d$  đi qua  $A(1; 2; -3)$  và có vectơ chỉ phương  $u = (3; 4; -4)$  có phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

+ Ta có:  $MB^2 = AB^2 - MA^2$ . Do đó  $(MB)_{\max}$  khi và chỉ khi  $(MA)_{\min}$ .

+ Gọi  $E$  là hình chiếu của  $A$  lên  $(P)$ . Ta có:  $AM \geq AE$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $M \equiv E$ .

Khi đó  $(AM)_{\min} = AE$  và  $MB$  qua  $B$  nhận  $\overrightarrow{BE}$  làm vectơ chỉ phương.

+ Ta có:  $B \in d$  nên  $B(1+3t; 2+4t; -3-4t)$  mà  $B \in (P)$  suy ra:

$$2(1+3t) + 2(2+4t) - (-3-4t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1)$$

+ Đường thẳng  $AE$  qua  $A(1; 2; -3)$ , nhận  $n_P = (2; 2; -1)$  làm vectơ chỉ phương có phương

trình là 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Suy ra  $E(1+2t; 2+2t; -3-t)$ .

Mặt khác,  $E \in (P)$  nên  $2(1+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow E(-3; -2; -1)$ .

+ Do đó đường thẳng  $MB$  qua  $B(-2; -2; 1)$ , có vectơ chỉ phương  $\vec{BE} = (-1; 0; -2)$  nên có

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

phương trình là

Thử các đáp án thấy điểm  $I(-1; -2; 3)$  thỏa.

**Câu 10:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + m|$  nghịch biến trên khoảng  $(3; 4)$ ?

A. 31.

B. 32.

C. 15.

D. 16.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + m$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x^2 - 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của  $f(x)$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $4$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|--------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$    | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $m$ |     | $m-32$ | $+\infty$ |

$m-7$        $m-135$        $f(4) = m-32$

Để hàm số  $|f(x)|$  nghịch biến trên  $(3; 4)$  thì  $f(4) = m - 32 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 32$

Do  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; \dots; 32\}$