

ĐỀ SỐ 18

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không tính thời gian giao đề)

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

Câu 1: Cho $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Giá trị của biểu thức $C = 110 - 2022a^2 - 2022b^2$ là:
A. 10000. **B.** - 10000. **C.** 10001. **D.** - 10001.

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A = \frac{x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x+z)^2}$ là:

- A.** $\frac{x-y-z}{2}$. **B.** $\frac{x-y+z}{2}$. **C.** $\frac{x+y-z}{2}$. **D.** $\frac{x+y+z}{2}$.

Câu 3: Số dư trong phép chia đa thức $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+9$ cho $x^2+8x+12$ là
A. 6. **B.** - 6.
C. - 7. **D.** 8.

Câu 4: Giá trị của a, b, c sao cho $2x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x - 2$ và chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$
A. $a = \frac{34}{3}; b = 2; c = \frac{28}{3}$ **B.** $a = -\frac{34}{3}; b = -2; c = \frac{28}{3}$

- C.** $a = -\frac{34}{3}; b = 2; c = \frac{28}{3}$ **D.** $a = \frac{34}{3}; b = 2; c = -\frac{28}{3}$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất: $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$
A. 4 **B.** - 4 **C.** 3 **D.** 5

Câu 6: Cho $M = \frac{4a}{a^2 + 4}$. Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.
A. 2 **B.** - 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của y thỏa mãn $y^3 - 3y^2 + 3 - y = 0$.
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất của biến cố: “Số chấm xuất hiện trên cả ba con xúc xắc nhỏ hơn 5”.

- A.** $\frac{210}{216}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{209}{216}$.

Câu 9: Xác định các hệ số hữu tỉ a và b sao cho $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x + 1$.

- A.** $a = 1; b = 2$ **B.** $a = 1; b = -2$
C. $a = -1; b = -2$ **D.** $a = 1; b = 1$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh huyền BC lấy một điểm M. Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$ và $AH \perp BC$. Số đo của góc DHE là.

- A.** 90° . **B.** 120° . **C.** 100° . **D.** 80° .

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường cao AD . Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC . Vẽ $ME \perp AB, MF \perp AC$. Tính số đo các góc của tam giác DEF .

A. $\angle E = \angle F = 50^\circ; \angle EDF = 80^\circ$.

B. $\angle E = \angle F = 40^\circ; \angle EDF = 100^\circ$.

C. $\angle E = \angle F = 45^\circ; \angle EDF = 90^\circ$.

D. $\angle E = \angle F = 30^\circ; \angle EDF = 120^\circ$.

Câu 12: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư.

A. $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$.

B. $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x - 17$.

C. $f(x) = 5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$.

D. $f(x) = -5x^3 - \frac{47}{2}x + 17$.

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b) Các số x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z = 1$ và $x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2$.
Tính giá trị của biểu thức: $T = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}$.

Câu II. (3 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x) = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$

b) Tìm hai số x, y thỏa mãn các đẳng thức sau: $x^2 + 8y^2 = 12$ và $x^3 + 2xy^2 + 12y = 0$

Câu III. (2 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$

b) Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$

chia hết cho 323

Câu IV. (6 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Gọi Q là trung điểm của CH , đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N .

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

b) Khi M là trung điểm của AD . Chứng minh BQ vuông góc với NP

c) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$

Câu IV. (1 điểm)

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$

CMR: $\frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

..... HẾT

Họ tên học sinh:; Số báo danh:

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

1.B	2.A	3.B	4.C	5.A	6.A	7.C	8.D	9.D	10.A
11.C	12.A								

Giải

$$B = \frac{x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x+z)^2}$$

Giải

Vậy

$$\text{A. } \frac{x - y - z}{2}$$

$$\text{B. } \frac{x - y - z}{2}$$

$$\text{C. } \frac{x - y - z}{2}$$

$$\text{D. } \frac{x - y - z}{2}$$

Đáp án cần chọn là. **A.**

$$f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 9$$

Câu 3: Đặt

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5) + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(4) + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 7) + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 12) + 9 - 15 \\ &= (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) - 6 \end{aligned}$$

Vậy số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 + 8x + 12$ là - 6

Đáp án cần chọn là. **B.**

Câu 4: Xác định a, b, c sao cho $2x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x - 2$ và chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$.

Giải

$$\text{Ta có: } 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x - 2)P_{(x)}$$

$$x = 2 \text{ ta được } 4a + 2b + c = -32 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x - 1)(x + 1)Q_{(x)} + 2x$$

$$x = 1 \text{ ta được } a + b + c = 0 \quad (2)$$

$$x = -1 \text{ ta được } a - b + c = -4 \quad (3)$$

$$\text{Kết hợp (1), (2), (3) được } a = -\frac{34}{3}, b = 2, c = \frac{28}{3}$$

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất: $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Giải

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45 \\ &= x^2 + y^2 + 36 - 2xy - 12x + 12y + 5y^2 - 10y + 5 + 4 \\ &= (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất } A = 4 \text{ khi } \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Biểu thức $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 6: Cho $M = \frac{4a}{a^2 + 4}$. Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

A. 2 B. -2 C. 3 D. 4

Giải

$$M = \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{(a^2 + 4) - (a^2 - 4a + 4)}{a^2 + 4} = 1 - \frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4}$$

$$\text{Vì } \frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4} \geq 0 \quad \forall a \quad \text{nên} \quad 1 - \frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4} \leq 1 \quad \forall a$$

$$\frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\text{Vậy } \text{Max } M = 1 \quad \text{khi } a = 2; b = 1$$

Đáp án cần chọn là. A.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của y thỏa mãn $y^3 - 3y^2 + 3 - y = 0$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Giải

$$y^3 - 3y^2 + 3 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \cdot y - 3 \cdot y^2 + (3 - y) = 0 \Leftrightarrow y^2(y - 3) - (y - 3) = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y - 3) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 1)(y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $y = 1$ hoặc $y = 3$ hoặc $y = -1$.

Vậy có ba giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 8: Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất của biến cố: "Số chấm xuất hiện trên cả ba con xúc xắc nhỏ hơn 5".

A. $\frac{210}{216}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{209}{216}$.

Hướng dẫn: Có $6^3 = 216$ trường hợp có thể xảy ra khi gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối, đồng chất.

Xét biến cố "Số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 5".

Có 7 kết quả có lợi cho biến cố "Số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 6". là $(5; 5; 5); (5; 6; 5); (6; 5; 5); (6; 6; 5); (6; 5; 6); (5; 6; 6); (6; 6; 6)$.

Do đó có $216 - 7 = 209$ kết quả có lợi cho biến cố "Số chấm xuất hiện trên cả ba con xúc xắc nhỏ hơn 5".

Xác suất của biến cố là $\frac{209}{216}$.

Đáp án cần chọn là. **D.**

Câu 9: Xác định các hệ số hữu tỉ a và b sao cho $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x + 1$.

Giải

Phép chia hết của $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ cho $g(x) = x^2 - x + 1$ có đa thức thương dạng $h(x) = x^2 + cx + b$.

Ta viết $x^4 + ax^2 + b = (x^2 - x + 1)(x^2 + cx + b)$ với mọi x

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (x^2 - x + 1)(x^2 + cx + b) &= x^4 + c^3x + bx^2 - x^3 - cx^2 - bx + x^2 + cx + b \\ &= x^4 + (c - 1)x^3 + (b - c + 1)x^2 + (-b + c)x + b \end{aligned}$$

Suy ra $x^4 + ax^2 + b = x^4 + (c - 1)x^3 + (b - c + 1)x^2 + (-b + c)x + b$ với mọi x

Đồng nhất thức hai vế, ta được: $c - 1 = 0, b - c + 1 = a, -b + c = 0$

Suy ra $a = b = c = 1$

Vậy, $a = b = 1$

Đáp án cần chọn là. **D.**

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh huyền BC lấy một điểm M . Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$ và $AH \perp BC$. Số đo của góc DHE là.

A. 90° .

B. 120° .

C. 100° .

D. 80° .

Giải

Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật nên $AM = DE$.

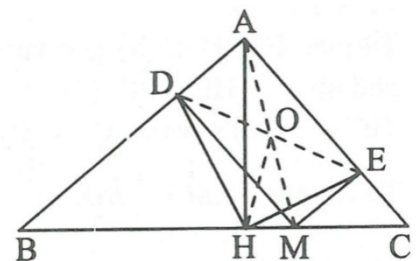
Gọi O là giao điểm của AM và DE , ta có:

$$OA = OM = OD = OE.$$

Xét $\triangle AHM$ vuông tại H , ta có: $HO = \frac{1}{2}AM$

$$\Rightarrow HO = \frac{1}{2}DE.$$

Xét $\triangle HDE$ có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh DE mà $HO = \frac{1}{2}DE$ nên $\triangle HDE$ vuông tại $H \Rightarrow \angle DHE = 90^\circ$.



Hình 5.16

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường cao AD . Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC . Vẽ $ME \perp AB, MF \perp AC$. Tính số đo các góc của tam giác DEF .

- A. $\angle E = \angle F = 50^\circ; \angle EDF = 80^\circ$.
 B. $\angle E = \angle F = 40^\circ; \angle EDF = 100^\circ$.
 C. $\angle E = \angle F = 45^\circ; \angle EDF = 90^\circ$.
 D. $\angle E = \angle F = 30^\circ; \angle EDF = 120^\circ$.

Giải

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AE = MF$$

Tam giác FMC vuông tại $F, \angle C = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow CF = MF$. Do đó $AE = CF$.

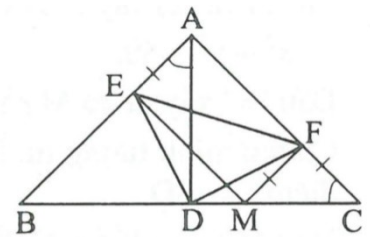
Tam giác ABC vuông cân, AD là đường cao nên đồng thời là đường

trung tuyến, đường phân giác nên $AD = DC = \frac{1}{2}BC; \angle EAD = \angle FCD = 45^\circ$.

$$\triangle EDA = \triangle FDC (c.g.c) \Rightarrow DE = DF \text{ và } \angle EDA = \angle FDC$$

$$\text{Ta có: } \angle ADF + \angle FDC = 90^\circ \Rightarrow \angle ADF + \angle EDA = 90^\circ \text{ hay } \angle EDF = 90^\circ.$$

Do đó $\triangle DEF$ vuông cân $\Rightarrow \angle E = \angle F = 45^\circ; \angle EDF = 90^\circ$.



Hình 5.10

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 12: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư.

- A. $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$.
 B. $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x - 17$.
 C. $f(x) = 5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$.
 D. $f(x) = -5x^3 - \frac{47}{2}x + 17$.

Giải

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và dư $ax + b$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + ax + b$$

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

Theo đề ta có:

$$f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

Do đó

$$f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$$

Vậy

Đáp án cần chọn là. A.

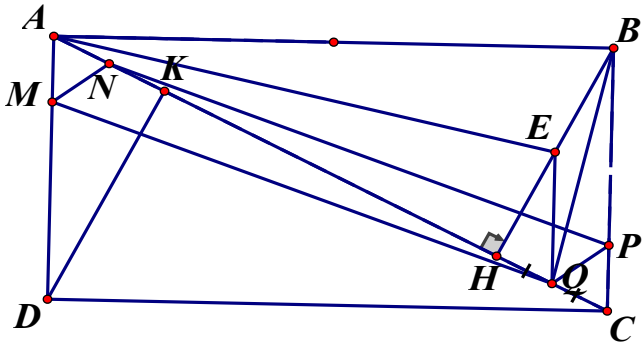
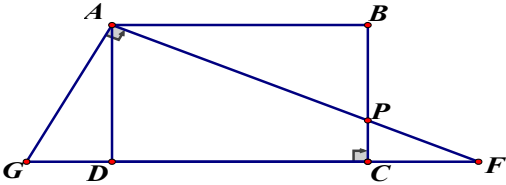
PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I. (2 điểm)		

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ b) Các số x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z = 1$ và $x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2$. Tính giá trị của biểu thức: $T = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}$.		
	a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$ $= x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1)$ $= (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$ $= (x - 1)(x - 2)(x - 3)$	
	b) $x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2$ $x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{x}{x} + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + \frac{y}{y} + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{z}{z} = 1$ $x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$ $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x + y + z} = 0 \Rightarrow \frac{y + x}{xy} + \frac{x + y}{z(x + y + z)} = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{z(x + y + z)}\right) = 0 \Rightarrow (x + y)(xz + zy + z^2 + xy) = 0$ $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$ +) $x + y = 0$ thay vào $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow T = 1$. Tương tự $y + z = 0, z + x = 0$ ta có $T = 1$. Vậy $T = 1$.	
Câu II. (3 điểm) a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x) = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$ b) Tìm hai số x, y thỏa mãn các đẳng thức sau: $x^2 + 8y^2 = 12$ và $x^3 + 2xy^2 + 12y = 0$		
	a) Ta có $f(x) = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$ đặt $y = x^2 + x$ $\text{P } y^2 + 4y - 12 = 0 \text{ P } y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$ $\text{P } (y + 6)(y - 2) = 0 \text{ P } \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$	

	$x^2 + x = -6$ vô nghiệm vì $x^2 + x + 6 > 0$ với mọi x $x^2 + x = 2 \hat{\cup} x^2 + x - 2 = 0 \hat{\cup} \begin{cases} \frac{x}{y} = -2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$ - Kết luận: nghiệm đã thức đã cho là: $x \in \{-2; 1\}$	
	b) Nếu $y = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 12 \\ x^3 = 0 \end{cases}$ (vô lý). Nếu $y \neq 0$; thay $12 = x^2 + 8y^2$ vào phương trình sau : $x^3 + 2xy^2 + y(x^2 + 8y^2) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0$ $\Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 8 = 0$ $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2 - t + 4) = 0$ Đặt : $\Leftrightarrow t = -2 \left(\text{vì } t^2 - t + 4 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \right)$ $\Rightarrow x = -2y$ Thay $x = -2y$ vào biểu thức thứ nhất, ta có : $4y^2 + 8y^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ $y = 1 \Rightarrow x = -2$ $y = -1 \Rightarrow x = 2$ Vậy các cặp số thỏa mãn là $(x; y) = (2; -1), (-2; 1)$.	
Câu III. (2. điểm) a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$ b) Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323		
	a) $3^x - y^3 = 1 \Leftrightarrow 3^x = y^3 + 1$ (1) - Dễ thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của (1). $\frac{1}{3^n}$ - Nếu $x < 0$ thì $3^x = \frac{1}{3^n}$ (n nguyên dương, $n = -x$) suy ra $0 < 3^x < 1$. Mà $y^3 + 1$ là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên. - Nếu $x > 0$ thì $3^x \in \mathbb{N}_3$ $(1) \Leftrightarrow 3^x = (y+1)^3 - 3y(y+1) \Rightarrow (y+1)^3 \in \mathbb{N}_3$ nên $y+1 \in \mathbb{N}_3$ Đặt $y+1 = 3k$ (k nguyên), suy ra $y = 3k - 1$. Thay vào (1) ta được: $3^x = (3k - 1)^3 + 1 = 9k(3k^2 - 3k + 1)$ nên $3k^2 - 3k + 1$ là ước của 3^x mà $3k^2 - 3k + 1 \notin \mathbb{N}_3$ và	

	$3k^2 - 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow 3k(3k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ hoặc } k = 1.$ Với $k = 0$ thì $y = -1$ suy ra $3^x = 0$ phương trình vô nghiệm. Với $k = 1$ thì $y = 2$ suy ra $3^x = 9$ nên $x = 2$. Vậy các cặp số nguyên $(x, y) \in \{(0; 0), (2; 2)\}$. b) Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323. Ta có: $323 = 17 \cdot 19$ và $(17, 19) = 1$. Ta cần c/m: $A : 17$ và $A : 19$. Ta có: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$ Mà $(20^n - 3^n) : (20 - 3)$ hay $(20^n - 3^n) : 17$ (1) Và $(16^n - 1) : (16 + 1)$ (vì n là số chẵn) hay $(16^n - 1) : 17$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $A : 17$. Tương tự, $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$ Mà $(20^n - 1) : (20 - 1)$ hay $(20^n - 1) : 19$ (3) Và $(16^n - 3^n) : (16 + 3)$ (vì n là số chẵn) hay $(16^n - 3^n) : 19$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $A : 19$. Vì $A : 17$ và $A : 19$ mà $(17, 19) = 1$ suy ra $A : 323$ (đpcm)	
Câu IV. (6 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H. Gọi Q là trung điểm của CH, đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N. a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành b) Khi M là trung điểm của AD. Chứng minh BQ vuông góc với NP c) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$		

		
	a) Chứng minh được $\Delta AMQ = \Delta CPN \Rightarrow MQ = PN$ (1) mà $NP \parallel MQ$ (2). Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.	
	b) Gọi E là trung điểm BH, chứng minh được QE là đường trung bình ΔKBC nên $QE \parallel BC \Rightarrow QE \perp AB$ (vì $BC \perp AB$) và $QE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$ Chứng minh $AM = QE$ và $AM \parallel QE \Rightarrow AMQE$ là hình hành Chứng minh $AE \parallel NP \parallel MQ$ (3). Chứng minh Xét ΔAQB có BH và QE là hai đường cao của tam giác nên E là trực tâm của tam giác nên $AE \perp BQ \Rightarrow BQ \perp NP$	
	c)  Vẽ tia Ax vuông góc với AF. Gọi giao của Ax với CD là G. Chứng minh $\angle GAD = \angle BAP$ (cùng phụ với $\angle PAD$) $\Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{AB}{AD} = 2 \Rightarrow AG = \frac{1}{2}AP$ Ta có: ΔAGF vuông tại A có $AD \perp GF$ nên $AG \cdot AF = AD \cdot GF (= 2S_{AGF})$ $\Rightarrow AG^2 \cdot AF^2 = AD^2 \cdot GF^2 \quad (1)$ Ta chia hai vế của (1) cho $AD^2 \cdot AG^2 \cdot AF^2$ mà $AG^2 + AF^2 = GF^2$ (đl Pytago) $\Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AG^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AP\right)^2} + \frac{1}{AF^2}$ $\Rightarrow \frac{4}{AB^2} = \frac{4}{AP^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$	

Câu IV. (1 điểm)Cho $a, b, c > 0$

$$\text{CMR: } \frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Lời giảiSử dụng bất đẳng thức AM-GM với $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} = \frac{18a}{2(a^2 + b^2) + a^2 + c^2} \leq \frac{18a}{2 \cdot 2\sqrt{(ab)^2} + 2\sqrt{(ac)^2}} = \frac{18a}{4ab + 2ac}$$

$$\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{18a}{4ab + 2ac} = \frac{18a}{2a(2b + c)} = \frac{9}{2b + c}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{(2+1)^2}{2b+c} \leq \frac{2^2}{2b} + \frac{1^2}{c} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{9}{(2b+c)} = \frac{(2+1)^2}{2b+c} \leq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$$

Tương tự:

$$\frac{18b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} \leq \frac{9}{(2c+a)} = \frac{(2+1)^2}{2c+a} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{18c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{9}{2a+b} = \frac{(2+1)^2}{2a+b} \leq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{18b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{18c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} \right) : 18 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

----- **Hết** -----**Chú ý:**

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.