SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học 2018 - 2019

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm này có 07 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4,5 đ)	*a) Cho biểu thức* $A=\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-1}-\dfrac{4x\sqrt{x}-4}{x^3-1}$ *với* $x>1$. *Rút gọn biểu thức* A *và tìm* x *để* $A=1$.	**2,5**
	$A=\dfrac{3(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{4(x\sqrt{x}-1)}{(x\sqrt{x})^2-1}$ (*Mỗi biểu thức được* ***0,25***)	0,5
	$=\dfrac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{4}{x\sqrt{x}+1}$ (*Mỗi biểu thức được* ***0,25***)	0,5
	$=\dfrac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)}-\dfrac{4}{x\sqrt{x}+1}$	0,25
	$=\dfrac{3}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{4}{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}$	0,25
	$=\dfrac{3(\sqrt{x}+1)-4}{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}=\dfrac{3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}+1}$	0,5
	$A=1\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}-2)=0$	0,25
	$\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$ (loại)	0,25
	Cách khác: $x\sqrt{x}+1+1\geq 3.\sqrt[3]{x\sqrt{x}.1.1}\Rightarrow x\sqrt{x}+2\geq 3\sqrt{x}\Rightarrow x\sqrt{x}+1\geq 3\sqrt{x}-1>0$ — 0,25	
	$\Rightarrow\dfrac{3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}+1}\leq 1$ hay $A\leq 1$. Dấu " = " xảy ra khi $x=1$ (không thỏa). Vậy không có giá trị của *x* thỏa yêu cầu. — 0,25	
	b) Cho ba số thực x, y, z *thỏa mãn* $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2y-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2z-1}}=3$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A=\dfrac{2x+y}{x(x+2y)}+\dfrac{2y+z}{y(y+2z)}+\dfrac{2z+x}{z(z+2x)}$.	**2,0**
	Từ đẳng thức đã cho suy ra : $x>\dfrac{1}{2},\ y>\dfrac{1}{2},\ z>\dfrac{1}{2}$.	0,25
	- Áp dụng $(a+b)^2\geq 4ab$, ta có: $(x+2y)^2=\left(\dfrac{2x+y}{2}+\dfrac{3y}{2}\right)^2\geq 4.\left(\dfrac{2x+y}{2}\right).\dfrac{3y}{2}$ Suy ra: $(x+2y)^2\geq 3y(2x+y)$ (dấu bằng xảy ra khi $x=y$)	0,25

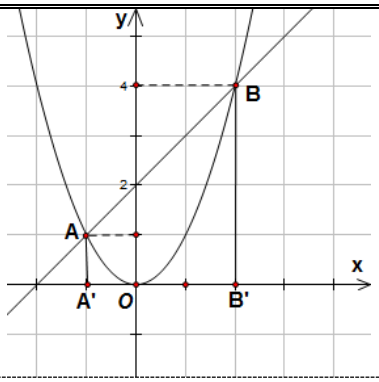
	$\Rightarrow \frac{2x+y}{x+2y} \le \frac{x+2y}{3y} \Rightarrow \frac{2x+y}{x(x+2y)} \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)$	0,25
	Tương tự: $\frac{2y+z}{y(y+2z)} \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$, $\frac{2z+x}{z(z+2x)} \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{x}\right)$	0,25
	Suy ra: $A \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$)	0,25
	$\sqrt{(2x-1).1} \le \frac{(2x-1)+1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-1} \le x \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$	0,25
	Tương tự: $\frac{1}{y} \le \frac{1}{\sqrt{2y-1}}$, $\frac{1}{z} \le \frac{1}{\sqrt{2z-1}}$	0,25
	Do đó $A \le \frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt{2y-1}}+\frac{1}{\sqrt{2z-1}} = 3$ (dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$)	0,25
	Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 3 khi $x=y=z=1$.	

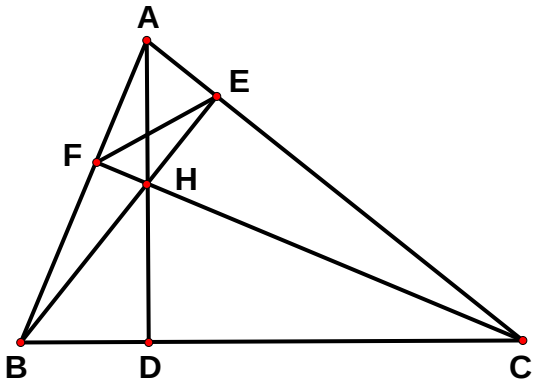
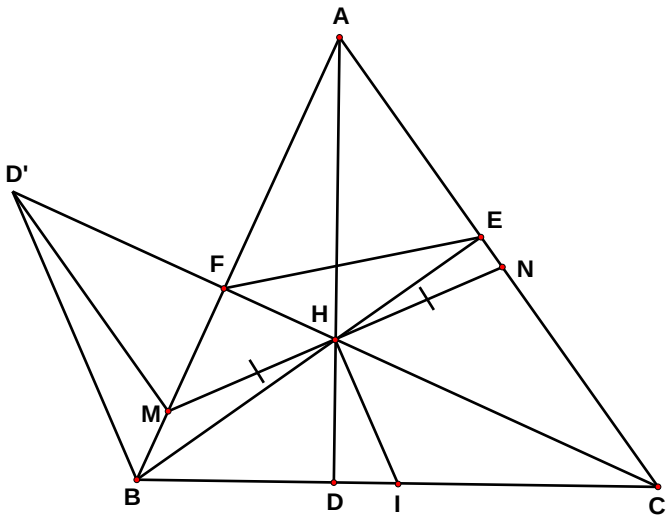
Câu 2 (4,0 đ)	a) *Giải phương trình* $x^2-4x-2\sqrt{2x-1}+1=0$	**2,0**
	<u>Cách 1:</u> Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.	0,25
	$x^2-4x-2\sqrt{2x-1}+1=0 \Leftrightarrow x^2-4x-5-2\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)-\frac{4(x-5)}{\sqrt{2x-1}+3}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5)\left[(x+1)-\frac{4}{\sqrt{2x-1}+3}\right]=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x+1=\frac{4}{\sqrt{2x-1}+3} \ (*) \end{array}\right.$	0,25
	- Xét pt(*) : VT $= x+1 \ge \frac{3}{2}$, VP $= \frac{4}{\sqrt{2x-1}+3} \le \frac{4}{3}$. Do đó pt(*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 5$.	0,5
	<u>Cách 2:</u> Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.	0,25
	+ $x^2-4x-2\sqrt{2x-1}+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=(2x-1)+2\sqrt{2x-1}+1$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1}+1=x-1 \\ \sqrt{2x-1}+1=-(x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1}=x-2 \\ \sqrt{2x-1}=-x \end{array}\right.$	0,25
	+ $\sqrt{2x-1}=-x$ (vô nghiệm vì $x \ge \frac{1}{2}$ nên $-x \le -\frac{1}{2}$)	0,25
	+ $\sqrt{2x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2x-1=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=5$ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=5$.	0,5

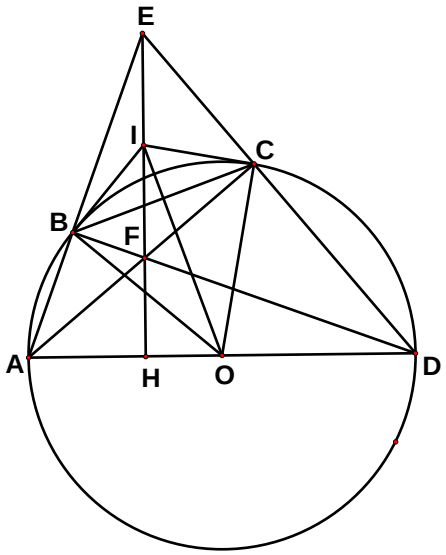
	<u>Cách 3</u>: Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.	0,25
	Đặt $\sqrt{2x-1} = y-2 (y \ge 2) \Rightarrow y^2 - 4y - 2x + 5 = 0$.	0,25
	Hơn nữa thay $\sqrt{2x-1} = y-2$ vào phương trình đã cho ta được $x^2 - 4x - 2(y-2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2y + 5 = 0$.	0,25
	Khi đó ta có hệ : $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y + 5 = 0 \\ y^2 - 4y - 2x + 5 = 0 \end{cases}$	0,25
	Trừ vế theo vế của phương trình đưa về: $y = x$ hoặc $y = 2 - x$	0,25
	+ Với $y = x$, giải tìm được $x = 5$ ($x = y = 1$ không thỏa)	0,5
	+ Với $y = 2 - x$, giải tìm được $x = y = 1$ (không thỏa)	0,25

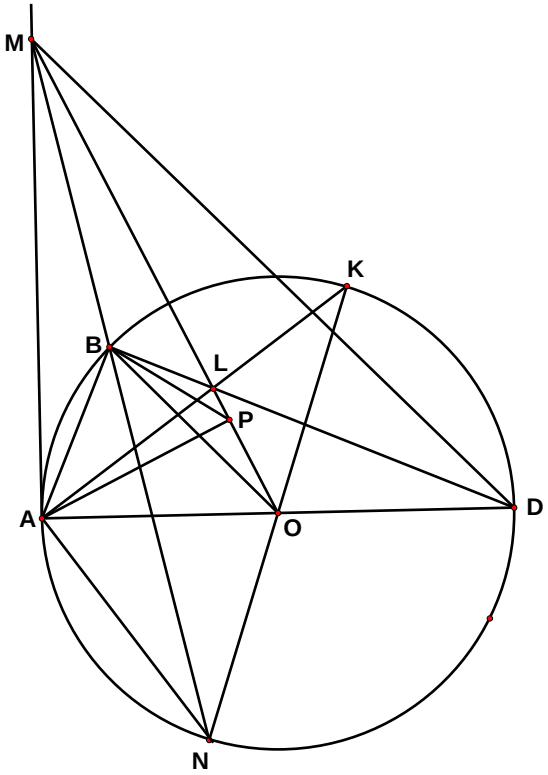
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y = 5 \\ x^2 + 6y^2 - x - 12xy = -16 \end{cases}$	**2,0**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y = 5 \\ x^2 + 6y^2 - x - 12xy = -16 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y = 5 \\ x^2 + 6y^2 - x - 12xy + 3(x^2 + y^2 - x + 2y) = -16 + 15 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y = 5 \\ (4x^2 - 12xy + 9y^2) - 4x + 6y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y = 5 \\ (2x - 3y)^2 - 2(2x - 3y) + 1 = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\frac{25}{13} \\ y = -\frac{21}{13} \end{cases}$ (giải đúng một trong hai nghiệm của hệ được 0,5)	0,75

Câu 3 (4,5 đ)	*a) Tìm tất cả các cặp số nguyên* $(x; y)$ *thỏa mãn:* $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 6y + 1 = 0$.	**3,0**
	$x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 6y + 1 = 0$ (*)	0,25
	+ Phương trình (*) là phương trình bậc hai theo ẩn *x* có $\Delta' = (y-2)^2 - (2y^2 - 6y + 1) = -y^2 + 2y + 3$	0,25
	$\Delta' = (y+1)(3-y)$	0,25
	+ PT (*) có nghiệm khi $\Delta' \ge 0$, tức là: $(y+1)(3-y) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 \ge 0 \\ 3-y \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y+1 \le 0 \\ 3-y \le 0 \end{cases}$.	0,5
	Suy ra được $-1 \le y \le 3$. Suy ra $y \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ (*Mỗi ý được* ***0,25***)	0,5
	+ Với $y = -1$: tìm được cặp $(x; y) = (3; -1)$.	0,25
	+ Với $y = 0$: không thỏa	0,25
	+ Với $y = 1$: tìm được 2 cặp $(x; y) = (-1; 1)$, $(x; y) = (3; 1)$	0,25
	+ Với $y = 2$: không thỏa	0,25
	+ Với $y = 3$: tìm được cặp $(x; y) = (-1; 3)$.	0,25

	b) Cho parabol (P): $y=x^2$ *và đường thẳng* (d): $y=x+m$ *(*m *là tham số). Tìm* m *để* (d) *cắt* (P) *tại hai điểm phân biệt* A,B *(*A,B *không trùng gốc tọa độ* O*). Gọi* A', B' *lần lượt là hình chiếu vuông góc của* A,B *lên trục hoành. Tìm* m *để diện tích tứ giác* $ABB'A'$ *bằng* $\frac{15}{2}$.	**1,5**
		
	- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2-x-m=0$ (*).	0,25
	+ Điều kiện để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B (A,B không trùng gốc tọa độ O) là: $m>-\frac{1}{4}$ và $m\neq 0$.	0,25
	(Không có hình vẽ minh họa, vẽ sai chiều biến thiên – 0,25) + Giả sử (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A, x_A+m)$, $B(x_B, x_B+m)$ (với $x_A<x_B$). Diện tích hình thang $ABB'A'$ là: $S=\left(\frac{AA'+BB'}{2}\right)A'B'=\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)(x_B-x_A)=\left(\frac{x_A+x_B+2m}{2}\right)(x_B-x_A)$ $=\left(\frac{1+2m}{2}\right)(x_B-x_A)$.	0,25
	Theo đề bài suy ra: $\left(\frac{1+2m}{2}\right)(x_B-x_A)=\frac{15}{2}\Leftrightarrow x_B-x_A=\frac{15}{1+2m}$ Ta có hệ: $\begin{cases}x_B-x_A=\frac{15}{1+2m}\\ x_B+x_A=1\end{cases}$ suy ra $x_B=\frac{8+m}{1+2m}$.	0,25
	$x_B=\frac{8+m}{1+2m}$ là nghiệm của phương trình $x^2-x-m=0$ nên: $\left(\frac{8+m}{1+2m}\right)^2-\left(\frac{8+m}{1+2m}\right)-m=0\Leftrightarrow 4m^3+5m^2+2m-56=0$	0,25
	$\Leftrightarrow(m-2)(4m^2+13m+28)=0\Leftrightarrow m=2$ (thỏa $m>-\frac{1}{4}$ và $m\neq 0$). Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.	0,25

Câu 4 (2,5 đ)	*Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB<AC)$ có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H.*	**2,5**
	a) Chứng minh $HE.CB = HC.EF$	**1,0**
	 *(Không có hình vẽ không chấm bài)*	
	Xét hai tam giác HEF và HCB có: $EHF = CHB$	0,25
	Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn.	0,25
	$\Rightarrow HEF = HCB$	0,25
	Suy ra hai tam giác HEF và HCB đồng dạng. Suy ra $\dfrac{HE}{HC} = \dfrac{EF}{CB} \Rightarrow HE.CB = HC.EF$	0,25
	b) Một đường thẳng qua H cắt hai đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N sao cho H là trung điểm của MN. Chứng minh đường trung trực của đoạn thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.	**1,5**
		
	+ Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. + Lấy điểm D' đối xứng với C qua H. Suy ra $D'M \,//\, CN$	0,25
	Mà $BH \perp AC$ nên $BH \perp D'M$.	0,25
	Suy ra M là trực tâm của tam giác $D'BH$.	0,25
	Suy ra $HM \perp D'B$	0,25
	Mà $D'B \,//\, IH$ suy ra $HM \perp IH$	0,25
	Vậy đường trung trực của đoạn thẳng MN đi qua trung điểm I của BC.	0,25

Câu 5 (4,5 đ)	*Cho tứ giác* $ABCD$ *nội tiếp trong đường tròn* (O) *đường kính* $AD=2a, BC=a,$ $ADB<30^0$. *Gọi* E *là giao điểm của hai đường thẳng* AB *và* CD, F *là giao điểm của hai đường thẳng* AC *và* BD, I *là trung điểm của* EF.	
	a) Chứng minh IC *là tiếp tuyến của đường tròn* (O).	**1,5**
	 *- Hình vẽ phục vụ câu câu a:* ***0,25*** *điểm* *- Nếu học sinh vẽ* $ADB\geq 30^0$ *trừ câu a (****0,25****điểm) và không chấm câu c.*	
	$OCD=ODC$ (vì tam giác OCD cân tại O)	0,25
	Tứ giác $BECF$ nội tiếp trong đường tròn đường kính EF nên ΔICE cân tại I.	0,25
	$\Rightarrow ICE=IEC$	0,25
	Nói được F là trực tâm tam giác EAD, suy ra $ODC+IEC=90^0$. Do đó $OCD+ICE=90^0$.	0,25
	Suy ra $OCI=90^0$, nên IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).	0,25
	b) Tính diện tích tứ giác $OBIC$ *theo* a.	**1,5**
	$IB=IC, OB=OC$. Suy ra OI là đường trung trực của đoạn thẳng BC.	0,5
	Do đó $OI\perp BC$. Suy ra diện tích tứ giác $OBIC$ là: $S_{OBIC}=\frac{1}{2}OI.BC$	0,25
	+ $BC=a$. + Trong tam giác vuông CIO tại C có: $OI=\frac{OC}{\cos 30^0}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$	0,5
	Suy ra $S_{OBIC}=\frac{1}{2}\frac{2a}{\sqrt{3}}.a=\frac{a^2}{\sqrt{3}}$.	0,25

	c) Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, lấy điểm M thuộc nửa mặt phẳng bờ AD chứa điểm B sao cho $ADM > 30^0$. Đường thẳng MB cắt đường tròn (O) tại điểm N (N khác B). Dựng đường kính NK của đường tròn (O). Chứng minh ba đường thẳng AK, BD và MO đồng quy.	**1,5**
	 *(Không có hình vẽ, không chấm bài)*	
	+ Gọi L là giao điểm của BD và MO, P là hình chiếu vuông góc của A lên MO. Ta đi chứng minh A, L, K thẳng hàng.	
	+ Chứng minh được hai tam giác AMB và NMA đồng dạng. Suy ra $MA^2 = MB.MN$	0,25
	Mà $MA^2 = MP.MO$. Suy ra $MB.MN = MP.MO$ hay $\frac{MB}{MO} = \frac{MP}{MN}$	0,25
	Mà BMP chung, suy ra hai tam giác MBP và MON đồng dạng.	0,25
	Suy ra $BNO = BPL$. Mà $BNO = BAK$ nên $BAK = BPL$ (1)	0,25
	Tứ giác $ABLP$ nội tiếp nên $BPL = BAL$ (2)	0,25
	+ Từ (1) và (2) suy ra $BAK = BAL$. Suy ra hai tia AK và AL trùng nhau. Suy ra A, L, K thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng AK, BD, MO đồng quy tại L.	0,25

Ghi chú: Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.