

Bài 1: (5 điểm)

1) Cho $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+3}}{4-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+3}}{x-7\sqrt{x+12}}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 16; x \neq 9$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của M

2) Tính giá trị của biểu thức P, biết

$$P = 4x^{2023} + 5x^{2024} + 2022 \text{ với } x = \sqrt{10 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + 5} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

Bài 2: (3 điểm)

1) Cho a, b là các số nguyên, chứng minh rằng:

$$Q = a^4b - a^2b + ab^2 - ab^4 \text{ chia hết cho 6}$$

2) Tìm x, y nguyên thoả mãn:

$$y^2 = x(x+2)(x+4)(x+6) + 15$$

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình và bất phương trình sau:

$$1) \frac{x+2}{2021} + \frac{2x+6}{4040} > \frac{x+1}{2022} + \frac{2x-1}{4047}$$

$$2) \sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}} = 2$$

Bài 4: (6 điểm)

1) Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{ABC} = \alpha$. Gọi I là trung điểm của BC. Trên cạnh AB, AC lấy M, N sao cho $\widehat{MIN} = \alpha$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác BMI đồng dạng với tam giác CIN. Từ đó suy ra BM.CN không đổi

b) NI là tia phân giác của $\widehat{MNC}$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M nằm giữa B và C. Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB

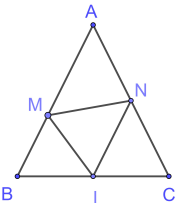
a) Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì để với mọi vị trí của M nằm giữa B và C thì các hình chữ nhật ADME có chu vi bằng nhau.

Bài 5: (2 điểm) Cho các số dương x, y, z thoả mãn: $x+y+z=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A, với

$$A = \frac{(x+1)^2}{y+z+2} + \frac{(y+1)^2}{x+z+2} + \frac{(z+1)^2}{x+y+2}$$

	$\frac{x+2}{2021} + 1 + \frac{2x+6}{4040} + 1 > \frac{x+1}{2022} + 1 + \frac{2x-1}{4047} + 1$ $\frac{x+2023}{2021} + \frac{2x+4046}{4040} > \frac{x+2023}{2022} + \frac{2x+4046}{4047}$ $\Leftrightarrow (x+2023)\left(\frac{1}{2021} + \frac{2}{4040} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{4047}\right) > 0$ $\text{Vì } \frac{1}{2021} + \frac{2}{4040} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{4047} > 0 \Rightarrow x+2023 > 0 \Rightarrow x > -2023$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $x > -2023$	1,0 1,0
2)	ĐK: $x \geq 4$ $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} - \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}} = 2$ $\sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}+1)^2} = 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-1 + \sqrt{x-4}+1 = 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-1 = 1 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x-4}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 5$ Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là: $4 \leq x \leq 5$	1,0 1,0
Bài 4		
1		0,25
a)	Tam giác BMI có $\widehat{BMI} + \widehat{MIB} = 180^\circ - \alpha$. mà $\widehat{MIB} + \widehat{NIC} = 180^\circ - \alpha$ Suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{NIC}$ Xét tam giác BMI và tam giác CIN có $\widehat{BMI} = \widehat{NIC}$, $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta BMI \sim \Delta CIN$ $\Rightarrow \frac{BM}{CI} = \frac{BI}{CN} \Rightarrow BM \cdot CN = BI \cdot CI = \frac{BC^2}{4}$ không đổi	0,5 1,0 0,5
b)	Xét tam giác MNI và tam giác INC có $\widehat{MIN} = \widehat{C} = \alpha \quad \Delta BMI \sim \Delta CIN \Rightarrow \frac{BI}{CN} = \frac{MI}{IN} \Rightarrow \frac{CI}{CN} = \frac{MI}{IN}$; mà	1,0

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa