

DẠNG 2**Tìm max của hàm đa thức và BPT**

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = x^{20-m} - x^7 + 2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 10.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = x^{30-m} - x^6 + 1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = (m^2 - 3m)x^{11} - mx^6 + x^3 - 3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = (m^3 - m)x^{13} - mx^6 + x^4 + 1$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 5:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - (m-1)x^2 + 2mx + 1$. Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?
A. $(-3; -1)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(3; 4)$. **D.** $(-1; 1)$.
- Câu 6:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^3 + 4mx^2 - (2m+2)x - 2021$ đạt tại $x_0 = 2$. Số phần tử của tập S là
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.
- Câu 7:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = -x^4 - 2m.x^3 + 3m.x^2 - 2mx - 2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = 1$. Số phần tử của tập S là:
A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0
- Câu 8:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2 - 11)x^4 + 2021$ đạt tại $x_0 = 0$. Số phần tử của tập S là:
A. 34 **B.** 42 **C.** 35 **D.** 37
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - ax + b) + 2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S = 4a + b$ tương ứng bằng:
A. 5 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 14
- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$, với a, b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?
A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.
- Câu 11:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + b - 1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-20; 20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. B. 23. C. 22. D. 24.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = (m+n-2)x^7 + x^4 + (m+2n-1)x^3 + x^2 + (2n-1)x + 2$. Với m và n là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = 16m + 2n$ bằng:

A. 22. B. 38. C. 46. D. 79.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2b$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b$ bằng:

A. 7. B. 8. C. 3. D. 9.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + c$ bằng:

A. 1. B. 0. C. 2. D. -3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^6 - ax^5 + 2bx^4 + 1$ với a, b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 4b$ bằng:

A. 7. B. 8. C. 5. D. 0.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$, với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng (b) . Giá trị của biểu thức $T = a + 3b + c$ bằng:

A. 3. B. 5. C. -6. D. -1.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^8 + ax^5 + bx^4 + cx + 2021$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b$ bằng:

A. -1. B. 1. C. -2. D. 3.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + 1$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2a - b$ bằng:

A. 4. B. 8. C. 16. D. -2.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$ Giá trị lớn nhất của α bằng:

A. 1. B. -1. C. -2. D. 0.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x = x_0; m = m_0$. Giá trị của biểu thức $(x_0 + m_0)$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^3 + mx^2 - (m+2)x$, với m là tham số thực. Biết rằng $\beta = \max f(x)$. Khi β đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 0. B. 2. C. 1. D. -1.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b$, với a và b là hai số thực không âm. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5 . Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng:

- A. 1. B. $\frac{6}{7}$. C. $\frac{2}{7\sqrt{6}}$. D. $\frac{6}{7\sqrt{7}}$.

Câu 23: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + 2xy + 1}{2y^2 + 2} \text{ lần lượt là } M \text{ và } m. \text{ Giá trị của biểu thức } T = 4M - 4m \text{ bằng:}$$

- A. $\sqrt{113}$. B. 36. C. 12. D. 64.

Câu 24: Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx + 1$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m = \frac{a}{b}$, trong đó a, b là những số nguyên dương và phân số $m = \frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng:

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 5

Câu 25: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50; 50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - mx$ trên đoạn $[-1; 3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60?

- A. 53. B. 44. C. 58. D. 8

Câu 26: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50; 50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx$ trên đoạn $[1; 3]$ lớn hơn hoặc bằng 40?

- A. 52. B. 51. C. 49. D. 50

Câu 27: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ nằm trong $(6; 20)$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 28: Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng:

- A. -1. B. 1. C. -2. D. 0.

Câu 29: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - mx}{x+1} \text{ trên đoạn } [1; 4] \text{ lớn hơn hoặc bằng } 2.$$

- A. 3. B. 27. C. 28. D. 33.

Câu 30: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3?

- A. 35. B. 26. C. 11. D. 31

Câu 31: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-44; 44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx - 1$ trên $[0; 3]$ nằm trong $[-2; 0]$. Số phần tử của tập S là:

- A. 41. B. 45. C. 72. D. 5

Câu 32: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + 2mx}{x^2 + x + 1} \text{ bằng } -\frac{1}{2}. \text{ Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập } S \text{ bằng:}$$

A. $\frac{13}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 33: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm

số $f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 + 2x + 2}$ lớn hơn $-\frac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 31.

B. 32.

C. 11.

D. 2

Câu 34: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3}$ nhỏ hơn $\frac{1}{4}$. Số phần tử của tập S bằng :

A. 2.

B. 3.

C. 59.

D. 58

Câu 35: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng :

A. 32.

B. 36.

C. 40.

D. 48

Câu 36: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x^2 - mx + 2}{x^2 + x + 1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

A. 2.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Câu 37: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị lớn nhất của hàm

số $f(x) = \frac{2x^2 - mx + 3}{x^2 - 2x + 2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

A. 17.

B. 16.

C. 43.

D. 35.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. C	8. C	9. D	10. D
11. B	12. D	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. A	19. B	20. D
21. A	22. D	23. A	24. A	25. B	26. C	27. D	28. D	29. C	30. A
31. B	32. A	33. A	34. D	35. C	36. D	37. D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trường hợp 1: $m = 13 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = 2$. Vậy $m = 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 13$ (*)

Khi đó một hàm đa thức có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của

$$\text{nó phải dương} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - m > 7 \\ 20 - m = 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 13 \\ m = 20 - 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 13 \\ \frac{7}{2} < k \leq \frac{19}{2} \\ m = 20 - 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq k \leq 9 \\ m = 20 - 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{2; 4; 6; 8; 10; 12\} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*))}.$$

Vậy có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 2: Chọn C

Trường hợp 1: $m = 24 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) = 1$. Vậy $m = 24$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 24$ (*)

Khi đó một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của

$$\text{nó phải âm} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 30 - m \leq 6 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 \leq m \leq 30 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{24; 25; 26; 27; 28; 29; 30\}$$

Trong trường hợp này kết hợp với (*) ta có $m \in \{25; 26; 27; 28; 29; 30\}$.

Vậy $m \in \{24; 25; 26; 27; 28; 29; 30\}$. Suy ra có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 3: Chọn D

Một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải

$$\text{âm, suy ra } m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3 \Rightarrow$ không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $m = 3 \Rightarrow f(x) = -3x^6 + x^3 - 3 \Rightarrow$ tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn C

Hàm đa thức $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bậc cao nhất phải là bậc chẵn

$$\text{suy ra } m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m = 0$ thỏa mãn.

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = -x^6 + x^4 + 1$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m = 1$ không thỏa mãn.

Với $m = -1 \Rightarrow f(x) = x^6 + x^4 + 1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m = -1$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị thực của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Chọn D

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2(m-1)x + 2m$, $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2(m-1)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0 = 0$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(0) = 2m = 0 \\ f''(0) = -2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Thử lại: với $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ và $f(0) = 1$

Xét $f(x) - f(0) = x^4 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $m = 0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6: Chọn B

$f'(x) = 4x^3 - 6mx^2 + 28mx - 2m - 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12mx + 8m$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 2$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0 = 2$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(2) = 30 - 10m = 0 \\ f''(2) = 48 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Thử lại: với $m = 3 \Rightarrow f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x - 2021$ và $f(2) = -2021$

Xét $f(x) - f(2) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = (x-2)^2(x^2 - 2x)$ không thỏa mãn điều kiện không âm, $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 7: Chọn C

Ta có: $f'(x) = -4x^3 - 6mx^2 + 6mx - 2m$; $f''(x) = -12x^2 - 12mx + 6m$

Hàm đa thức đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực đại tại $x_0 = 1$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1) = -4 - 2m = 0 \\ f''(1) = -12 - 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Thử lại:

Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2021$ và $f(1) = -2020$

Xét: $f(x) - f(1) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = -(x-1)^4 \leq 0$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $m = -2$ thỏa mãn bài toán.

Câu 8: Chọn C

Cách 1: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình:

Ta có: $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 + 2021 \geq f(0) = 2021$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^4 \cdot [x^2 + (m-2)x + m^2 - 11] \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m^2 - 11 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2 - 11) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \geq \frac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-21; 21]} \begin{cases} -21 \leq m \leq -5 \\ 4 \leq m \leq 21 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 6x^5 + 5(m-2)x^4 + 4(m^2-11)x^3$; $f''(x) = 30x^4 + 20(m-2)x^3 + 12(m^2-11)x^2$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$

Thử lại. Xét: $f(x) - f(0) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 = x^4 \cdot (x^2 + (m-2)x + m^2-11) \geq 0$

$x^2 + (m-2)x + m^2-11 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2 - 11) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \geq \frac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-21; 21]} \begin{cases} -21 \leq m \leq -5 \\ 4 \leq m \leq 21 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 9: Chọn D

Cách 1: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = (2x-3)(x^2-ax+b) + (x^2-3x+2)(2x-a)$

$f''(x) = 2(x^2-ax+b) + (2x-3)(2x-a) + (2x-3)(2x-a) + 2(x^2-3x+2)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại x_0 : $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{cases}$

Nhận thấy rằng $\min f(x) = 2021 = f(1) = f(2)$. Tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1; x = 2$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f'(1) = a-b-1 = 0 \\ f'(2) = 4-2a+b = 0 \\ f''(1) = 2b-2 \geq 0 \\ f''(2) = 16-6a+2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $a = 3; b = 2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-3x+2) + 2021 = (x-1)^2(x-2)^2 + 2021 \geq 2021$
(TM)

Suy ra $a = 3; b = 2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a + b = 14$.

Cách 2: Theo cách tư duy bất phương trình:

Ta có $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-ax+b) + 2021 \geq 2021 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2-ax+b) \geq 0$ với $\forall x$

$$\text{Suy ra: } (x^2-ax+b)|_{x=1; x=2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-a+b = 0 \\ 4-2a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $a = 3, b = 2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a + b = 14$.

Câu 10: Chọn D

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Có đạo hàm $f'(x) = 6x^5 + 2ax + b$; $f''(x) = 30x^4 + 2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$, suy ra hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x_0 = 1$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1) = 6 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 30 + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 6 \\ a \geq -15 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $\begin{cases} b = -2a - 6 \\ a \geq -15 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^6 + ax^2 - 2(a+3)x - 6$ và $f(1) = -a - 11$

$$f(x) - f(1) = x^6 + ax^2 - 2(a+3)x + a + 5 = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số: $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5$ có:

$$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = (x+1)(4x^2 + 2x + 4)$$

Khảo sát nhanh hàm số: $y = g(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$a+3$	$+\infty$

Để $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $a+3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -3$

$$\text{Có } f(3) = 11a + 4b + 729 = 11a + 4(-2a - 6) + 729 = 3a + 705 \geq 3 \cdot (-3) + 705 = 696$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(3)$ là 696.

Câu 11: Chọn B

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 12x^2 + 6x + 2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$, thì:

$$\begin{cases} f'(1) = 2a + b + 7 = 0 \\ f''(1) = 2a + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 7 \\ a \geq -9 \end{cases}$$

Thử lại: Xét $\begin{cases} b = -2a - 7 \\ a \geq -9 \end{cases}$ suy ra $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + (-2a - 7)x - 2a - 8$ và $f(1) = -3a - 13$

$$\text{Xét } f(x) - f(1) = x^4 + x^3 + ax^2 + (-2a - 7)x + a + 5 = (x-1)^2(x^2 + 3x + a + 5) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + a + 5 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4(a+5) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{11}{4} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}; a \in [-20; 20]} -2 \leq a \leq 20$$

Vậy có tất cả 23 giá trị a nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Chọn D

Điều kiện để hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất là: $m + n - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 - n$.

$$f(x) = x^4 + (n+1)x^3 + x^2 + (2n-1)x + 2.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3(n+1)x^2 + 2x + 2n-1; f''(x) = 12x^2 + 6(n+1)x + 2$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 2$, thì:

$$\begin{cases} f'(2) = 2n + 47 = 0 \\ f''(2) = 62 + 12n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = -\frac{47}{14}.$$

Thử lại: Thay $n = -\frac{47}{14}$ vào ta được

$$f(x) - f(2) = x^4 - \frac{33}{14}x^3 + x^2 - \frac{54}{7}x + \frac{100}{7} = (x-2)^2 \left(x^2 + \frac{23}{14}x + \frac{25}{7}\right) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } n = -\frac{47}{14}; m = 2 - n = \frac{75}{14} \Rightarrow T = 2n + 3m = 79.$$

Câu 13: Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 4bx + 2c; f''(x) = 12x^2 + 6ax + 4b.$$

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(1) = f(2) \\ f'(1) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(1) \geq 0 \\ f''(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 6b + 2c = -15 \\ 3a + 4b + 2c = -4 \\ 12a + 8b + 2c = -32 \\ 12 + 6a + 4b \geq 0 \\ 48 + 12a + 4b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = \frac{13}{2} \\ c = -6 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a = -6; b = \frac{13}{2}; c = -6$ vào ta được $f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 13$ và $f(1) = 9$.

$$\text{Xét } f(x) - f(1) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x-1)^2(x-2)^2 \geq 0 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b = 7.$$

Câu 14: Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c; f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b.$$

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = -4 \\ 2b \geq 0 \\ 12 + 6a + 2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a = -2; b = 1; c = 0$ vào ta được $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ và $f(0) = 1$.

$$\text{Xét } f(x) - f(0) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x-1)^2 \geq 0 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b + c = 0.$$

Câu 15: Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x^5 - 5ax^4 + 8bx^3; f''(x) = 30x^4 - 20ax^3 + 24bx^2.$$

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = -1 \\ 0 = 0 \\ -5a + 8b = -6 \\ 0 \geq 0 \\ 30 - 20a + 24b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 2; b = \frac{1}{2}$ vào ta được $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 1$ và $f(0) = 1$.

Xét $f(x) - f(1) = x^6 - 2x^5 + x^4 = x^4(x-1)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $T = 3a + 4b = 8$.

Câu 16: Chọn C

Dễ thấy: $\frac{f(-1) + f(1)}{2} = b$

Ta có $\begin{cases} \min f(x) = b \leq f(-1) \\ \min f(x) = b \leq f(1) \end{cases} \Rightarrow b \leq \frac{f(-1) + f(1)}{2}$

Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên $\min f(x) = f(-1) = f(1)$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = -1, x_2 = 1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(-1) = f(1) \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(-1) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = a + b + c \\ -4 + 3a - 2b + c = 0 \\ 4 + 3a + 2b + c = 0 \\ 12 - 6a + 2b \geq 0 \\ 12 + 6a + 2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 0, b = -2, c = 0$ vào ta được $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$, $f(1) = b = -2$

Xét $f(x) - b = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a = 0, b = -2, c = 0 \Rightarrow T = a + 3b + c = -6$.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\min f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 2021, \forall x \in \mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(a+b)$ thì ta xét $f(1) = 1 + a + b + 2021 \geq f(0) = 2021 \Leftrightarrow a + b \geq -1$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(1) = f(0)$ tức là khi đó $\min f(x) = f(0) = f(1)$

Ta có $f'(x) = 8x^7 + 5ax^4 + 4bx^3$; $f''(x) = 56x^6 + 20ax^3 + 12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0, x_2 = 1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 0 = 0 \\ 5a + 4b = -8 \\ 0 \geq 0 \\ 56 + 20a + 12b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 4, b = -3$ vào ta được $f(x) = x^8 - 4x^5 + 3x^4 + 2021$, $f(0) = 2021$

Xét $f(x) - f(0) = x^8 - 4x^5 + 3x^4 = x^4(x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a = 4, b = -3 \Rightarrow T_{\min} = (a + b)_{\min} = -1$.

Câu 18: Ta có $\min f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(2a - b)$ thì ta xét $f(-2) = 64 - 32a + 16b + 1 \geq f(0) = 1 \Leftrightarrow 2a - b \leq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(-2) = f(0)$ tức là khi đó $\min f(x) = f(0) = f(-2)$

Ta có $f'(x) = 6x^5 + 5ax^4 + 4bx^3; f''(x) = 30x^4 + 20ax^3 + 12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0, x_2 = -2$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(-2) \\ f'(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 4 \\ 0 = 0 \\ 5a - 2b = 12 \\ 0 \geq 0 \\ 480 - 160a + 48b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 4, b = 4$ vào ta được $f(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 1, f(0) = 1$

Xét $f(x) - f(0) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 = x^4(x + 2)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a = 4, b = 4 \Rightarrow T_{\max} = (2a - b)_{\max} = 4$.

Câu 19: Chọn B

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1 = m(x^2 - x) + (x^4 - 4x^3 + x^2 + 1)$

Dễ thấy: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Biết rằng $\alpha = \min f(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases} \alpha \leq f(0) = 1 \\ \alpha \leq f(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(1) = -1$

Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$

Tức là ta tìm điều kiện để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2(m+1)x - m; f''(x) = 12x^2 - 24x + 2m + 2$

$$\begin{cases} f'(1) = m - 6 = 0 \\ f''(1) = 2m - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6$$

Thay $m = 6$ ta được:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1; f(1) = -1$$

$$f(x) - f(1) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = (x-1)^2(x^2 - 2x + 2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy khi $m = 6$ thì $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$ là giá trị lớn nhất của α .

Câu 20: Chọn D

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1 = m(-x^2 + 2x + 3) + (x^4 + x^3)$

Dễ thấy: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Biết rằng: $\alpha = \min f(x) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra: $\begin{cases} \alpha \leq f(-1) = 0 \\ \alpha \leq f(3) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(-1) = 0$

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(-1) = 0$ hay hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx + 2m$; $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2m$

$$\begin{cases} f'(-1) = 4m - 1 = 0 \\ f''(-1) = 6 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Thử lại: thay $m = \frac{1}{4}$ vào ta được $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$; $f(-1) = 0$

$$\text{Xét: } f(x) - f(-1) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - 0 = (x+1)^2 \left(x^2 - x + \frac{3}{4} \right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy khi $m = \frac{1}{4} = m_0 \Rightarrow \alpha = \min f(x) = f(x_0) = f(-1) = 0$ là giá trị lớn nhất của α

$$\text{Suy ra } (x_0 + m_0) = -\frac{3}{4}$$

Câu 21: Chọn A

Ta có: $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + m(x^2 - x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) \geq 0$. Ta chỉ ra tồn tại m để $\max f(x) = 0$ tại $x = 0$. Khi

đó hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$ thì $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 4x$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Vậy với $m = -2$ thì $\max f(x) = 0$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6a^5$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-5a^6 - 5b$	$+\infty$

Theo bài ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-5 \Leftrightarrow -5a^6 - 5b = -5 \Leftrightarrow b = 1 - a^6$.

$$\text{Giả sử } h(a) = a.b = a(1 - a^6) = a - a^7 \Rightarrow h'(a) = 1 - 7a^6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}.$$

Ta có bảng biến thiên

a	0	$\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$	$+\infty$
$h'(a)$	+	0	-
$h(a)$	$-\infty$	$\frac{6}{7\sqrt[5]{7}}$	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức ab bằng $\frac{6}{7\sqrt[5]{7}}$.

Câu 23: Chọn A

Nếu $y = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ khi đó $P = \frac{5}{2}$.

$$\text{Nếu } y \neq 0 \text{ ta có: } P = \frac{4x^2 + 8xy + 4}{8y^2 + 8} = \frac{5x^2 + 8xy + 4y^2}{2x^2 + 16y^2} = \frac{5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{y}\right) + 4}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \text{ ta được: } P = \frac{5t^2 + 8t + 4}{2t^2 + 16} \Leftrightarrow (5 - 2P)t^2 + 8t + 4 - 16P = 0 \quad (2).$$

$$\text{Nếu } P = \frac{5}{2} \text{ thì } t = \frac{9}{2}.$$

Nếu $P \neq \frac{5}{2}$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai.

$$\Delta = 4^2 - (5 - 2P)(4 - 16P) = 16 - (20 - 88P + 32P^2) = -32P^2 + 88P - 4$$

$$-32P^2 + 88P - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11 - \sqrt{113}}{8} \leq P \leq \frac{11 + \sqrt{113}}{8}$$

$$\Rightarrow \text{Max}P = \frac{11 + \sqrt{113}}{8} = M, \text{Min}P = \frac{11 - \sqrt{113}}{8} = m \Rightarrow T = 4M - 4m = \sqrt{113}.$$

Câu 24: Chọn A

$$\text{Ta có: } \text{Max}_{[1;2]} \{x^2 - mx + 1\} = 4 \Leftrightarrow x^3 - mx + 1 \leq 4, \forall x \in [1;2]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^3 - 3}{x}, \forall x \in [1;2]; m \geq \text{Max}_{[1;2]} \left\{ \frac{x^3 - 3}{x} \right\} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } m = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2 \Rightarrow T = a + b = 5 + 2 = 7.$$

Câu 25: Chọn B

$$\text{Ta có: } \text{Max}_{[1;2]} \{x^4 - mx\} \leq 60 \Leftrightarrow x^4 - mx + 1 \leq 60, \forall x \in [-1;3] \Leftrightarrow mx \geq x^4 - 60, \forall x \in [-1;3]$$

Với $x = 0$, thỏa mãn.

Với $x \neq 0$ ta xét

$$\begin{cases} m \in [-1; 0) \\ mx \geq x^4 - 60 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{x^4 - 60}{x}, \forall x \in [-1; 0) \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1; 0)} \left\{ \frac{x^4 - 60}{x} \right\} \Leftrightarrow m \leq 59$$

$$\begin{cases} m \in (0; 2] \\ mx \geq x^4 - 60 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{x^4 - 60}{x}, \forall x \in (0; 2] \Leftrightarrow m \geq \min_{(0; 2]} \left\{ \frac{x^4 - 60}{x} \right\} \Leftrightarrow m \geq 7$$

$$\Leftrightarrow 7 \leq m \leq 59$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}, m \in [-50; 50] \Rightarrow m \in \{7; 8; \dots; 50\}$

Có 44 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 26: Chọn C

Ta có: $\max_{[1; 3]} \{x^3 - 3mx\} < 40, \forall x \in [1; 3]$

$$\Leftrightarrow m > \frac{x^3 - 40}{3x}, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow m > \max_{[1; 3]} \left\{ \frac{x^3 - 40}{3x} \right\} = -\frac{13}{9}$$

Suy ra, để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 40 thì $m \leq -\frac{13}{9}$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}, m \in [-50; 50] \Rightarrow m \in \{-50; -49; \dots; -2\}$ có 49 số thỏa mãn.

Câu 27: Chọn D

Đặt M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$. Ta có: $6 < M < 20$

Để $M < 20$ thì $x^3 + mx^2 < 20 \quad \forall x \in [1; 2]$.

$$\text{Từ đó suy ra: } m < \frac{20 - x^3}{x^2} \quad \forall x \in [1; 2] \Rightarrow m < \min_{[1; 2]} \frac{20 - x^3}{x^2} = 3.$$

$$\text{Tương tự để } M \leq 6 \text{ thì } x^3 + mx^2 \leq 6 \quad \forall x \in [1; 2] \Rightarrow m \leq \min_{[1; 2]} \frac{6 - x^3}{x^2} = \frac{-1}{2}.$$

Do đó để $M > 6$ thì $m > \frac{-1}{2}$. Vậy $\frac{-1}{2} < m < 3$, do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 28: Chọn D

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1 thì:

$$x^3 - mx^2 \geq 1 \quad \forall x \in [1; 2] \text{ và dấu “=” phải xảy ra. Khi đó ta có: } m = \min_{[1; 2]} \frac{x^3 - 1}{x^2} = 0.$$

Câu 29: Chọn C

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - mx}{x + 1}$ trên đoạn $[1; 4]$ lớn hơn hoặc bằng 2 thì:

$$\frac{x\sqrt{x} - mx}{x + 1} \geq 2 \quad \forall x \in [1; 4] \Rightarrow mx \leq x\sqrt{x} - 2x - 2 \quad \forall x \in [1; 4]$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x} \quad \forall x \in [1; 4] \Rightarrow m \leq \min_{[1; 4]} \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x}.$$

$$\text{Lại có: đặt } g(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x} \text{ thì } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [1; 4].$$

Do đó: $m \leq \min_{[1; 4]} \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x} = g(1) = -3$. Vậy có tất cả 28 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 30: Chọn A

Vì $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 1}$ là hàm liên tục trên $[1; 2]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[1; 2]$.

Ta có: $\min_{[1;2]} f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \exists x \in [1; 2]: \frac{x^2 + mx + 1}{x + 1} \leq 3 \Leftrightarrow \exists x \in [1; 2]: m \leq \frac{-x^2 + 3x + 2}{x} \quad (1)$

Đặt: $g(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x}$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow m \leq \max_{[1;2]} g(x) \Leftrightarrow m \leq 4$.

Như vậy có 35 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Chọn B

Vì hàm số $f(x) = x^3 + mx - 1$ là hàm liên tục trên $[0; 3]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$.

Ta có: $\min_{[0;3]} f(x) \in [-2; 0] \Leftrightarrow -2 \leq \min_{[0;3]} f(x) \leq 0 \quad (1)$.

Ta thấy: $f(0) = -1 < 0 \forall m$ nên $\min_{[0;3]} f(x) \leq 0 \forall m$. Suy ra:

$(1) \Leftrightarrow -2 \leq \min_{[0;3]} f(x) \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow x^3 + mx - 1 \geq -2 \forall x \in [0; 3]$

$\Leftrightarrow m \geq -x^2 - \frac{1}{x} \forall x \in (0; 3] \Leftrightarrow m \geq \max_{(0;3]} \left(-x^2 - \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt{2}$

Vậy số giá trị nguyên của m thuộc $(-44; 44)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là 45.

Câu 32: Chọn A

Ta có: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2mx}{x^2 + x + 1}$ bằng $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$ và phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3x^2 + (4m + 1)x + 1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và phương trình $3x^2 + (4m + 1)x + 1 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4m + 1)^2 - 12 \leq 0 \\ \Delta = (4m + 1)^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = (4m + 1)^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 16m^2 + 8m - 11 = 0$$

Theo định lý Vi-et, ta có phương trình $16m^2 + 8m - 11 = 0$ có hai nghiệm phân biệt m_1, m_2 thỏa

$$\text{mãn: } \begin{cases} m_1 + m_2 = -\frac{1}{2} \\ m_1 \cdot m_2 = -\frac{11}{16} \end{cases} \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 = (m_1 + m_2)^2 - 2m_1 \cdot m_2 = \frac{13}{8}.$$

Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng $\frac{13}{8}$

Câu 33: Chọn A

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \geq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}$. Dễ thấy $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ nên hàm số luôn có giá trị lớn

nhất và giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 + 2x + 2} \geq \min f(x) > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3m > -x^2 - 2x - 2$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 3m + 2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } \Delta' = 1 - 12m - 8 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{12} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-30; 30]} 0 \leq m \leq 30.$$

Vậy có 31 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 34: Chọn D

$$\text{Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \geq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Ta có $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2m}{2} > \frac{4}{3}$ nên vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-2m}{2} \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi đó hàm số có cả giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất. Ta sẽ đi tìm điều kiện để $\min f(x) \geq \frac{1}{4}$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3} \geq \min f(x) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 8mx + 16 \geq x^2 + 2x + 3 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $3x^2 - 2(4m+1)x + 13 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } \Delta' = (4m+1)^2 - 39 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{39}}{4} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{39}}{4}$$

$$\text{Suy ra để } \min f(x) < \frac{1}{4} \text{ thì } \begin{cases} m > \frac{-1+\sqrt{39}}{4} \\ m < \frac{-1-\sqrt{39}}{4} \end{cases} \xrightarrow{m \neq -1, m \in [-30; 30], m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} -30 \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 30 \end{cases}$$

Có tất cả 58 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 35: Chọn C

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-m}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m = -2$.

Trường hợp 2: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow m \neq -2$.

Khi đó ta tìm điều kiện để $\max f(x) = 2$.

$$\text{Mặt khác: } f(x) = \frac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2} \leq \max f(x) = 2 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Phải có điều kiện dấu bằng xảy ra.

Ta suy ra $x^2 + (m+4)x + 1 \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta = (m+4)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq -2$. Kết hợp điều kiện suy ra $m = -6$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra $m = \{-6; -2\} \Rightarrow S = \{-6; -2\}$.

Tổng bình phương các giá trị của S bằng 40.

Câu 36: Chọn D

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1} = \frac{-m}{1} \leq \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} \neq \frac{-m}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^2 - mx + 2}{x^2 + x + 1} \leq \max f(x) < 4 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + 2 \leq 4(x^2 + x + 1) \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + (m+4)x + 2 \geq 0 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -4 - 2\sqrt{6} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{6}$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$$

Vậy có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 37: Chọn D

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1} = \frac{-m}{-2} \leq \frac{3}{2} \\ \frac{2}{1} \neq \frac{-m}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -4.$$

Để tìm điều kiện của m để $\max f(x) > 6$ ta đi tìm điều kiện để $\max f(x) \leq 6$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{2x^2 - mx + 3}{x^2 - 2x + 2} \leq \max f(x) \leq 6 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - mx + 3 \leq 6(x^2 - 2x + 2) \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x^2 + (m-12)x + 9 \geq 0 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m-12)^2 - 144 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 24$$

$$\text{Vậy để } \max f(x) > 6 \text{ thì } \begin{cases} m < 0 \\ m > 24 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \neq -4, m \in [-30; 30]} \begin{cases} m \neq -4 \\ -30 \leq m \leq -1 \\ 25 \leq m \leq 30 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 35 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.