

ĐỀ 74**HSG TOÁN 9 QUẢNG NAM 2023-2024****Câu 1. (4,0 điểm)**

a) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A = -3$.

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình

$$x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 1 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = x_1 \cdot x_2$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} + 2\sqrt{(2-x)(3+x)} - 7 = 0$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x+y)(x+y) + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4xy = -2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = 4\text{cm}$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho $AM = 4AD$

a) Tính diện tích tam giác DMN.

b) Chứng minh tam giác DIN vuông cân

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB và AC). Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE.

a) Chứng minh EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$

b) Chứng minh $AM = AN$

c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = \frac{x^3-1}{x^2+y+x} + \frac{y^3-1}{y^2+z+x} + \frac{z^3-1}{z^2+x+y}$$

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A = -3$.

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình

$$x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 1 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = x_1 \cdot x_2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

$$A = x-3 \Rightarrow \sqrt{x}-1 = x-3$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4$$

Đổi chiều điều kiện ta được $x=4$

$$\text{b) Ta có: } \Delta' = (m+2)^2 - 1 \cdot (m^2+1) = 4m+3$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 4m+3 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -2(m+2)$; $x_1 \cdot x_2 = m^2+1$ (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = m^2+1 > 0 \forall m \\ x_1+x_2 = -2(m+2) < 0 \left(m > -\frac{3}{4} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } |x_1| + |x_2| = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) và (2) ta có: } m^2+1-2(m+2)=0 \Leftrightarrow m^2-2m-3=0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $m = 3$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} + 2\sqrt{(2-x)(3+x)} - 7 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y)(x+y) + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4xy = -2 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có ĐK: $-3 \leq x \leq 2$

Đặt $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} = t$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow 2\sqrt{(2-x)(3+x)} = t^2 - 5$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+4) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 3 \text{ (vì } t \geq 0 \text{)}$$

Khi đó ta có: $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} = 3 \Rightarrow \sqrt{(2-x)(3+x)} = 2$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $x = -2$; $x = 1$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y)(x+y) + y = 2 \quad (1) \\ 4x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4xy = -2 \quad (2) \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(2x+y)(x+y) + 4x^2 + y^2 - 2x - y + 4xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(x+y) + (2x+y)^2 - (2x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(3x+2y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ y = \frac{1-3x}{2} \end{cases}$$

* Thay $y = -2x$ vào phương trình (1) ta được: $y = 2 \Rightarrow x = -1$

* Thay $y = \frac{1-3x}{2}$ vào phương trình (1) ta được: $x^2 + 6x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

+) Nếu $x = -1 \Rightarrow y = 2$

+) Nếu $x = -5 \Rightarrow y = 8$

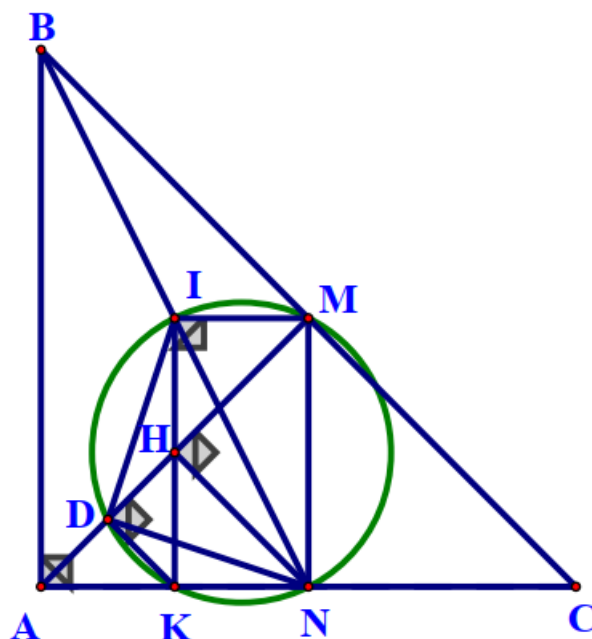
Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(-1; 2), (-5; 8)$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = 4\text{cm}$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho $AM = 4AD$

a) Tính diện tích tam giác DMN.

b) Chứng minh tam giác DIN vuông cân

Lời giải



a) Ta có $BC = 4\sqrt{2}(\text{cm})$; $AM = \frac{1}{2} \cdot BC = 2\sqrt{2}(\text{cm})$; $DM = \frac{3}{4} \cdot AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$

Gọi H là trung điểm của AM $\Rightarrow HN \perp AM$ và $HN = \frac{1}{2} \cdot MC = \sqrt{2}(\text{cm})$

Suy ra $S_{DMN} = \frac{DM \cdot HN}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = 1,5(\text{cm}^2)$

b) Gọi K là trung điểm của AN.

Ta có $IM \parallel KN$, $IK \perp KN$ và $IM = KN$ nên tứ giác MNKI là hình chữ nhật.

Lại có $\frac{AD}{AM} = \frac{AK}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow KD \parallel CM$.

Mà $CM \perp AM \Rightarrow CM \perp KD$

Suy ra M, N, K, D, I cùng thuộc đường tròn đường kính KM cũng là đường tròn đường kính IN.

$\Rightarrow \widehat{NDI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mặt khác $\widehat{NID} = \widehat{NMD} = 45^\circ$

Do đó tam giác DIN vuông cân tại D

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt

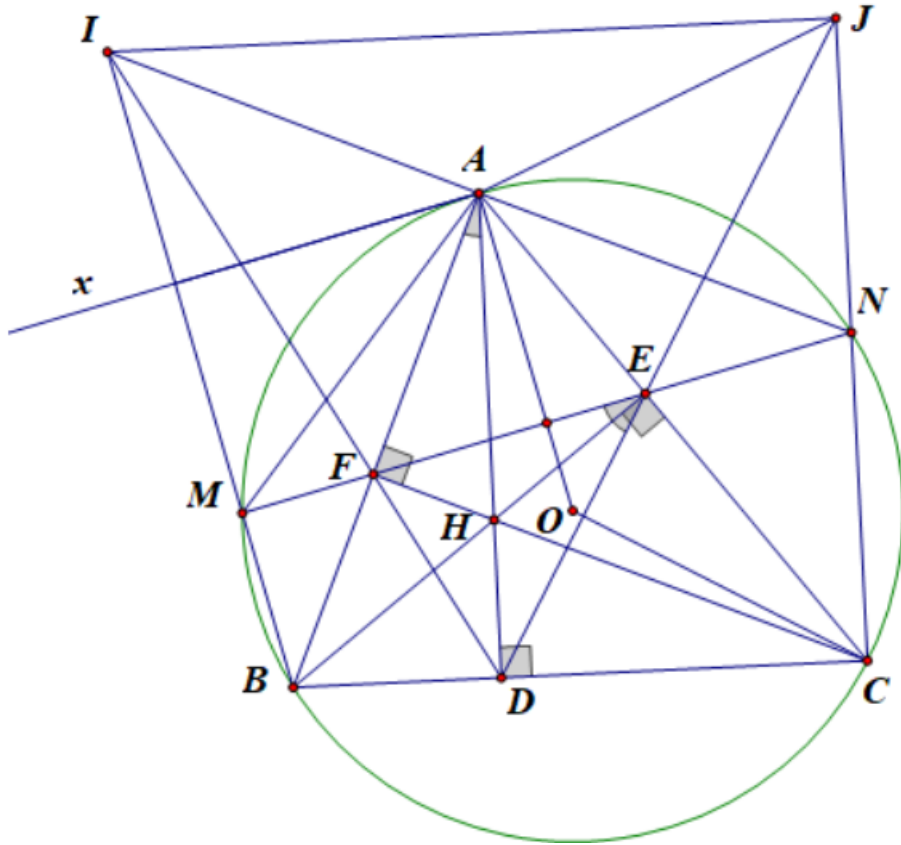
đường tròn (O) tại M và N (M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB và AC).
Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE .

a) Chứng minh EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$

b) Chứng minh $AM = AN$

c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

Lời giải



a) Chứng minh EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$

Xét tứ giác ABDE có: $\widehat{AEB} + \widehat{ADB} = 90^\circ$ (BE và AD là đường cao của $\triangle ABC$)

Hai đỉnh E và D kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới cùng góc 90° nên tứ giác ABDE nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BD}$)

Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$

Xét tứ giác AEHF có: $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (BE và CF là đường cao của $\triangle ABC$) nên tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{FEH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{FH}$)

Vậy EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$

b) Chứng minh $AM = AN$

Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

Xét tứ giác AFEC có: $\widehat{BEC} + \widehat{BFC} = 90^\circ$ (BE và CF là đường cao của $\triangle ABC$)

Hai đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới cùng góc 90° nên tứ giác BEFC nội tiếp đường tròn

Mà $\widehat{AFE} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn
 $\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$

Do đó: $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$

Do hai góc này so le trong nên Ax//MN

Ta lại có $Ax \perp MN \Rightarrow AO \perp MN$

$\Rightarrow A$ là điểm chính giữa của $\widehat{MN}$

$\Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{AM}$

$\Rightarrow AM = AN$ (cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau)

c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

Xét tứ giác AFDC có: $\widehat{AFC} + \widehat{ADC} = 90^\circ$ (AD và CF là đường cao của $\triangle ABC$)

Hai đỉnh F và D kề nhau cùng nhìn cạnh AD dưới cùng góc 90° nên tứ giác AFDC nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AFD} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\Rightarrow \widehat{BD}$)

Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{IFB}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BFI} + \widehat{BFE}$

Xét $\triangle BFI$ và $\triangle BFN$ có:

BF là cạnh chung

$\widehat{MBA} = \widehat{NBA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau là $\widehat{AN} = \widehat{AM}$)

$\widehat{BFI} = \widehat{BFE}$ (Cmt)

Do đó: $\triangle BFI = \triangle BFN$ (g.c.g)

$\Rightarrow BI = BN; FI = FN$

$\Rightarrow$ BF là đường trung trực của IN hay BA là đường trung trực của IN

$\Rightarrow AN = AI$

Chứng minh tương tự, ta được $AJ = AM$

Khi đó: $AN = AM = AI = AJ$

Vậy tứ giác MNJI nội tiếp đường tròn

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = \frac{x^3-1}{x^2+y+x} + \frac{y^3-1}{y^2+z+x} + \frac{z^3-1}{z^2+x+y}$$

Lời giải

a) Gọi n là số tự nhiên cần tìm, $S(n)$ là tổng các chữ số của nó

Theo đề bài, ta có $n + S(n) = 2023 \Rightarrow S(n) = 2023 - n$

Ta có $0 < n < 2023 \Rightarrow S(n) \leq 28$

(Khi $n = 1999 \Rightarrow S(n) = 1 + 9 + 9 + 9 = 28$)

$\Rightarrow 2023 - n \leq 28 \Leftrightarrow n \geq 1995$

Hay $1995 \leq n = \overline{abcd} < 2023$ nên $a = 1$ hoặc $a = 2$

• Xét $a = 1$, ta có $n = \overline{1bcd}$

Mà $n + S(n) = 2023$

$$\Leftrightarrow \overline{1bcd} + 1 + b + c + d = 2023$$

$$\Leftrightarrow 1000 + \overline{bcd} + 1 + b + c + d = 2023$$

$$\Leftrightarrow \overline{bcd} + 1 + b + c + d = 2023$$

$$\Leftrightarrow 100b + 10c + d + 1 + b + c + d = 2023$$

$$\Leftrightarrow 101b + 10c + 2d + 1 = 2023$$

Do $0 \leq b; c; d \leq 9$ nên $b = 9, 11c + 2d = 1133 \Rightarrow c = 9; d = 7$

Ta được $n = 1997$

• Xét $a = 2$, ta có $n = \overline{2bcd}$

Mà $n + S(n) = 2023$

$$\Leftrightarrow \overline{2bcd} + 2 + b + c + d = 2023$$

$$\Leftrightarrow 2000 + \overline{bcd} + 2 + b + c + d = 2023$$

$$\Leftrightarrow \overline{bcd} + b + c + d = 21$$

$$\Leftrightarrow 100b + 10c + d + b + c + d = 21$$

$$\Leftrightarrow 101b + 11c + 2d = 21$$

Do $0 \leq b; c; d \leq 9$ nên $b = 0, 11c + 2d = 21 \Rightarrow c = 1; d = 5$

Ta được $n = 2015$

Vậy có hai số thỏa mãn đề bài là 1997; 2015

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+y+z} - \frac{1}{x(x+y+z)} &= \frac{x(x+y+z) - x^2 - y - z}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} = \frac{x^2+xy+xz-x^2-y-z}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} \\ &= \frac{xy+xz-y-z}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} = \frac{xy-y+xz-z}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} \\ &= \frac{y(x-1)+z(x-1)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} = \frac{(x-1)(y+z)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} \\ &\Rightarrow \frac{x^3-1}{x^2+y+z} - \frac{x^3-1}{x(x+y+z)} = \frac{(x^3-1)(x-1)(y+z)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+x)(x-1)(y+z)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} = \frac{(x-1)^2(x^2+x+x)(y+z)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)} \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^3-1}{x^2+y+z} \geq \frac{x^3-1}{x(x+y+z)} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^3-1}{y^2+z+x} \geq \frac{y^3-1}{y(x+y+z)}; \frac{z^3-1}{z^2+x+y} \geq \frac{z^3-1}{z(x+y+z)}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} H &\geq \frac{x^3-1}{x(x+y+z)} + \frac{y^3-1}{y(x+y+z)} + \frac{z^3-1}{z(x+y+z)} \\ &\Rightarrow H \geq \frac{1}{x+y+z} \left(\frac{x^3-1}{x} + \frac{y^3-1}{y} + \frac{z^3-1}{z} \right) \\ &\Rightarrow H \geq \frac{1}{x+y+z} \left(x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } xyz \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq yz; \frac{1}{y} \leq xz; \frac{1}{z} \leq xy$$

$$\Rightarrow H \geq \frac{1}{x+y+z} (x^2+y^2+z^2 - xy - yz - xz)$$

$$\Rightarrow H \geq \frac{1}{x+y+z} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy H đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x=y=z=1$

-----HẾT-----