PHẦN I

TOÁN 10

ĐỀ THI CHÍNH THỨC[*]

MÔN : TOÁN 10

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (2đ)

Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$.

Câu 2: (2đ)

Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B = 2A$, $C = 4A$, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Tính

$$T = R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Câu 3: (2đ)

Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh AB tại T, đường thẳng CT cắt đường tròn tại K khác T. Giả sử K là trung điểm CT và $CT = 6\sqrt{2}$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Câu 4: (2đ)

Chứng minh với mọi giá trị nguyên của m, tồn tại số nguyên n để

$$n^3 - 11n^2 - 87n + m$$

chia hết cho 191.

Câu 5: (2đ)

Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}}+\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}}+$$
$$+\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}}\le 1.$$

(*) *Giám thị không giải thích gì thêm*

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2đ)

Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$ (1).

Tập xác định R. 0,25đ

Đặt $\sqrt{x^2-2x+3}=t$, với $t\geq\sqrt{2}$. 0,25đ

Khi đó phương trình (1) trở thành $(x+1)t=x^2+1$ (2).

$(2)\Leftrightarrow x^2-2x+3-(x+1)t+2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow t^2-(x+1)t+2(x-1)=0$ 0,25đ

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$. 0,25đ

Với t = 2, ta có $\sqrt{x^2-2x+3}=2\Leftrightarrow x^2-2x+3=4$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$. 0,5đ

Với t = x – 1, ta có $\sqrt{x^2-2x+3}=x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2-2x+3=(x-1)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 3=1 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$. 0,5đ

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$.

Câu 2: (2đ)

Ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow \frac{R}{a}=\frac{1}{2\sin A},\frac{R}{b}=\frac{1}{2\sin B},\frac{R}{c}=\frac{1}{2\sin C}$

$\Rightarrow S=\frac{1}{4}(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C})$ 0,5đ

$=\frac{1}{4}(3+\cot g^2A+\cot g^2B+\cot g^2C)$.

Trong ΔABC : $\cot gA.\cot gB+\cot gBC.tgC+\cot gC.\cot gA=1$ 0,5đ

và ta có $\cot g2\alpha=\frac{\cot g^2\alpha-1}{2\cot g\alpha}$, do đó

$\cot g^2\alpha=1+2\cot g\alpha.\cot g2\alpha$

$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\left[3+3+2(\cot gA.\cot g2A+\cot gB.\cot g2B+\cot gC.\cot g2C)\right]$ 0,5đ

$= \frac{1}{4}\left[6 + 2(\cot gA.\cot gB + \cot gB.\cot gC + \cot gC.\cot gA)\right]$

$= \frac{1}{4}(6+2) = 2$. 0,5đ

Câu 3: (2đ)

K là trung điểm của CT và L là tiếp điểm của đường tròn với cạnh BC. Thế thì : $CK = \frac{1}{2}CT$ (*). Suy ra L trung điểm của BC,

$$CL^2 = CK.CT = \frac{1}{2}CT^2, \qquad 0{,}5đ$$

hay $a^2/4 = 36$, hay $a = 12$ (1).

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BCT , ta có:

$$CT^2 = BT^2 + BC^2 - 2BT.BC.\cos B \qquad 0{,}5đ$$

$$\Leftrightarrow 72 = a^2/4 + a^2 - 144.\cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos B = \frac{3}{4} \text{ (2), do (1).}$$

Mặt khác, áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, ta có:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B \Leftrightarrow \cos B = a/2b \text{ (3).} \qquad 0{,}5đ$$

Từ (1), (2) và (3), ta có :

$$(a, b, c) = (12, 8, 8). \qquad 0{,}5đ$$

Câu 4: (2đ)

Đặt $P(x) = x^3 - 11x^2 - 87x + m$.

Ta có: $P(x) \equiv (x+a)^3 + b \pmod{191}$

$\Leftrightarrow x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + b \equiv x^3 - 11x^2 - 87x + m \pmod{191}$ 0,5đ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a \equiv -11 \pmod{191} & (1) \\ 3a^2 \equiv -87 \pmod{191} & (2) \\ b \equiv m - a^3 \pmod{191} & (3) \end{cases} \qquad 0{,}5đ$$

$(1) \Leftrightarrow 3a \equiv 180 \pmod{191} \Leftrightarrow a \equiv 60 \pmod{191} \Rightarrow 3a^2 \equiv -87 \pmod{191}$

Vậy $\forall m \in Z$, tồn tại số nguyên a, b để $P(x) \equiv (x+a)^3 + b \pmod{191}$.

Nhận xét: 191 làsố nguyên tố dạng $191 = 3k + 2$

$$P(i) \equiv P(j) \pmod{191} \Rightarrow (i+a)^3 \equiv (j+a)^3 \pmod{191}.$$

Đặt $u = i + a$, $v = j + a$, thì

$$u^3 \equiv v^3 \pmod{191} \Rightarrow u^{3k} \equiv v^{3k} \pmod{191}$$

$u^{3k}v^2 \equiv v^{3k+2} \equiv v^{191} \pmod{191} \equiv v \pmod{191}$ (định lí Ferma) (4) 0,5đ

$$\Rightarrow v^2 \equiv u^{3k}v^3 \equiv u^{3k+3} \pmod{191}$$

$$\Rightarrow u^{3k}v^2 \equiv u^{3k}.u^{3k+3} \equiv u^{3k+1}.u^{3k+2} \equiv u^{3k+1}.u^{191} \equiv u^{3k+1}.u \pmod{191}$$

$$\equiv u^{3k+2} \equiv u^{191} \equiv u \pmod{191}. \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $u \equiv v \pmod{191} \Rightarrow i \equiv j \pmod{191}$.

Vậy nếu $\forall i, j \in \{1,2,...,191\}$: $i \neq j \pmod{191}$ thì $P(i) \neq P(j) \pmod{191}$

Suy ra tồn tại $n \in \{1,2,...,191\}$ sao cho $P(n) \equiv 191 \pmod{191}$, hay $P(n) \vdots 191$ 0,5đ

Vậy với mọi giá trị nguyên của m, luôn tồn tại số nguyên n để $P(n) \vdots 191$.

Câu 5: (2đ)

$$\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^6+2a^3c^3+c^6)} = \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^6+2a^3c^3+c^6)}$$

$$= \sqrt[3]{(a^{12}+2a^3b^6c^3)+(2a^9c^3+b^6c^6)+a^6b^6+a^6c^6}$$

$$\geq \sqrt[3]{a^6b^6+3a^6b^4c^2+3a^6b^2c^4+a^6c^6} = \sqrt[3]{(a^2b^2+a^2c^2)^3} = a^2b^2+a^2c^2 \quad 0{,}75đ$$

Suy ra:

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} \leq \frac{a^4}{a^4+a^2b^2+a^2c^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}. \qquad 0{,}25đ$$

Tương tự

$$\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad 0{,}5đ$$

$$\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(c^3+b^3)^2}} \leq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}. \qquad 0{,}5đ$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}}$$

$$+\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}} \leq 1.$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ (*)

MÔN : TOÁN 10

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

1

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, QUẢNG TRỊ

Bài 1.

Giải phương trình :

$$\sqrt{\frac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}}=1-2x^2. \qquad (1)$$

Bài 2.

Xét các số thực không âm thay đổi : $a_1, a_2, ..., a_9$ có tổng bằng 1.

Đặt : $S_K = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}$ $\left(k=\overline{1;6}\right)$

Gọi $M = \text{Max}\left\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\right\}$.

Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của M.

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(x^3-y\right)+2y\left(3f^2(x)+y^2\right)=f\left(y+f(x)\right) \quad \forall x,y \in R. \qquad (1)$$

Bài 5.

Cho tam giác ABC thoả mãn : $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng :

Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là : $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$\frac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)^2$$

(*) *Đề thi đề nghị và hướng dẫn giải của các trường tham dự kì thi*

Điều kiện để phương trình (1) xác định : $1-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{1-x^2}-x\right| = 1-2x^2.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1-2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có : $1-2x^2 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \ge x$ do đó :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}-x = \sqrt{2}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=x\\ \sqrt{2}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 0\\ 1-x^2 = x^2\end{cases}\\ \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \begin{cases}x \le \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 2x^2-\sqrt{2}.x-\frac{1}{2}=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm : $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$.

Bài 2.

$$M = \operatorname{Max}\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$$
$$\Rightarrow 12M \ge 4S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + 4S_6 =$$
$$= 4\sum_{i=1}^{9} a_i + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 \ge 4$$
$$(\text{do : } \sum_{i=1}^{9} a \ = 1; a_i \ge 0, i = \overline{1;9}) \Rightarrow M \ge \frac{1}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a_1 = a_5 = a_9 = \frac{1}{3}\\ a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = 0\end{cases}$

Đáp số : $M_{min} = \frac{1}{3}$.

Bài 3.

Thay $y = x^3$ vào (1) ta có

$$f(0) + 2x^3\left(3f^2(x) + x^6\right) = f\left(x^3 + f(x)\right) \qquad (2)$$

Thay $y = -f(x)$ vào (1), suy ra

$$f\left(x^3 + f(x)\right) - 2f(x)\left(3f^2(x) + f^2(x)\right) = f(0). \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 4f^3(x) - 3f^2(x).x^3 - x^9 = 0\ ;\forall x$.

$$\Rightarrow \left(f(x) - x^3\right)\left(4f^2(x) + x^3f(x) + x^6\right) = 0\ ;\forall x \qquad (4)$$

Rõ ràng : $4f^2(x) + x^3.f(x) + x^6 > 0;\forall x \neq 0$. Từ (4) ta được

$$f(x) = x^3;\forall x.$$

Thử lại, thoả mãn điều kiện bài toán.

Đáp số : $f(x) = x^3$.

Bài 4 .

Ta có : $S = p(p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\dfrac{B}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{S^2}{p^2(p-a)(p-b)} = \frac{p-c}{p} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$\text{tg}\dfrac{A}{2}\text{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a+b) - 2c = a+b+c \Leftrightarrow a+b = 3c$ (1).

Mặt khác : $S = pr = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow p.abc\dfrac{r}{4R} = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ (2).

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2c \\ p - c = c \end{cases}$. Từ (2) suy ra $ab\dfrac{r}{4R} = p^2 - (a+b)p + ab$

$\Rightarrow (1 - \dfrac{r}{4R})ab = 2c^2$ (3)

Giả sử : $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{r}{4R} = \dfrac{1}{10}$. Từ (3) ta có $ab = \dfrac{20}{9}c^2$, cùng với (1) suy ra : a và b là các nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 3ct + \frac{20}{9}c^2 = 0\ ; t_1 = \frac{5}{3}c; t_2 = \frac{4}{3}c.$$

Coi rằng $a \geq b$, ta có:

$$\begin{cases} a = \dfrac{5}{3}c \\ b = \dfrac{4}{3}c \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = \left(\dfrac{4}{3}c\right)^2 + c^2 = \left(\dfrac{5}{3}c\right)^2 = a^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Ngược lại, giả sử: ΔABC vuông tại A. Ta có:

$$\begin{cases} a = 2R \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ S = \dfrac{1}{2}bc = pr \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} a = 2R \\ (3c-b)^2 = b^2 + c^2 \\ b = 4r (\text{do} : p = 2c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2R \\ b = 4r \\ c = 3r \end{cases}.$$

Từ (1) ta có

$$\begin{cases} a = 2R \\ a = 5r \end{cases} \Rightarrow 5r = 2R \Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{10}.$$

(Điều khẳng định của bài toán được chứng minh).

2

TRƯỜNG QUỐC HỌC HUẾ, TP. HUẾ

Bài 1.

Cho bất phương trình:

$$a + \sqrt{1 - x^{2006}} + \dfrac{x^{2004} + 16}{a + \sqrt{1 - x^{2006}}} \le 2\sqrt{x^{2004} + 16}.$$

Tìm số thực a lớn nhất để bất phương trình có đúng hai nghiệm.

Bài 2.

Cho m,n là hai số nguyên dương. Giải phương trình:

$$\sin^{2n} x + \dfrac{1}{\sin^{2m+1} x} = \cos^{2n} x + \dfrac{1}{\cos^{2m+1} x}.$$

Bài 3.

Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác không cân ABC. M là trung điểm IC, N là trung điểm của AB. J là trung điểm M N. Gọi x, y, z là ba đường thẳng lần lượt đi qua A,B,C và mỗi đường thẳng chia chu vi tam giác ABC thành hai phần bằng nhau. Chứng minh rằng 4 đường thẳng x, y, z và IJ cùng đi qua một điểm.

Bài 4.

Cho n là số nguyên dương. Xét bảng vuông 2n hàng và 2n cột. Mỗi ô viết vào một số trong tập $\{1,2,3,\ldots,4n^2\}$, hai ô khác nhau viết hai số khác nhau. Tìm số N lớn nhất có tính chất : với mọi cách viết số như trên tồn tại một hàng hoặc một cột mà trên hàng hoặc cột đó có hai số p, q thỏa mãn :

$$|p-q| \geq N.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Viết lại $\dfrac{\left(a+\sqrt{1-x^{2006}}-\sqrt{x^{2004}+16}\right)^2}{a+\sqrt{1-x^{2006}}} \leq 0$ với $x^2 \leq 1$.

Nếu a <0 bất phương trình $a+\sqrt{1-x^{2006}}<0$ vô số nghiệm.

Nếu $a \geq 0$ ta có phương trình $a=\sqrt{16+x^{2004}}-\sqrt{1-x^{2006}}$.

Hàm số vế phải là hàm số chẵn. Hàm số tăng trên [0;1] do đó phương trình có nghiệm khi a thuộc [3, $\sqrt{17}$], suy ra giá trị lớn nhất của a là $\sqrt{17}$, lúc đó hai nghiệm là x = –1, x = 1.

Bài 2.

Đặt u = sinx ,v =cosx : $u.v \neq 0$ và $u^2+v^2=1$.

Ta có phương trình: $u^{2n}+\dfrac{1}{u^{2m+1}}=v^{2n}+\dfrac{1}{v^{2m+1}}$.

Nếu uv < 0 một vế nhỏ hơn 1 vế kia lớn hơn 1: không thỏa mãn.

Hàm số $y=x^{2n}+\dfrac{1}{x^{2m+1}}$ giảm trên [–1 ; 0). Vậy nếu u ,v < 0 ; $u \neq v$ thì không thỏa mãn.

Xét u,v >0. $u \neq v$. Ta có $(u^{2n}-v^{2n})(u.v)^{2m+1}=u^{2m+1}-v^{2m+1}$ hay :

$$(u^{2n-1}+v^{2n-1}+uv(u^{2n-3}+v^{2n-3})+\ldots+(uv)^{n-1}(u+v))\,(uv)^{2m+1}$$
$$=u^{2m}+v^{2m}+u^{2m-1}v+..$$

Vế trái nhỏ hơn

$[1+1/2+(1/2)^2+..+(1/2)^{n-2}+(1/2)^{n-2}](1/2)^{2m+1}<2(1/2)^{2m+1}=(1/2)^{2m}$

Vế phải lớn hơn $u^{2m}+v^{2m} \geq (1/2)^{m-1}$. Do đó vế phải nhỏ hơn vế trái.

Vậy sinx = cosx hay $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Bài 3.

<u>Bổ đề</u>: Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh của tam giác A'B'C' và chia đôi chu vi của tam giác A'B'C' đồng quy tại điểm là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Thật vậy: Gọi M là điểm thuộc B'C' sao cho A'M chia đôi chu vi tam giác A'B'C' thì MC' = p' – b' và MB'= p'– c' với p' = (a' + b' + c')/2.

Suy ra: $$\overrightarrow{A'M} = \frac{(p'-c')\overrightarrow{A'C'} + (p'-b')\overrightarrow{A'B'}}{a'} = \frac{(p-c)\overrightarrow{A'C'} + (p-b)\overrightarrow{A'B'}}{a} =$$

$$= -\frac{(p-c)\overrightarrow{AC} + (p-b)\overrightarrow{AB}}{2a}.$$

Mặt khác, ta có:

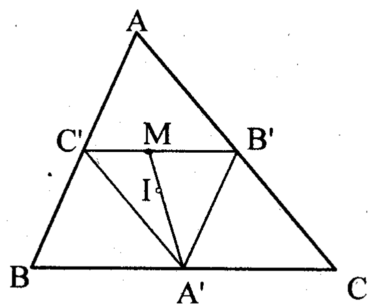
$$2p\overrightarrow{A'I} = a\overrightarrow{A'A} + b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = -\frac{a(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (b-c)\overrightarrow{BC}}{2}$$

$$= -(p-b)\overrightarrow{AB} - (p-c)\overrightarrow{AC}$$

Vậy A', I, M thẳng hàng.

Trở lại bài toán: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do J trọng tâm hệ 4 điểm I, A, B, C nên I, G, J thẳng hàng.

Phép vị tự tâm G tỉ số –1/2 biến A thành A', B thành B', C thành C'. Biến ba đường thẳng x, y, z thành ba đường thẳng (theo bổ đề) đồng quy tai I. Kết hợp với I, G, J thẳng hàng suy ra x, y, z, I J cùng đi qua một điểm.



Bài 4.

Xét cách xắp xếp như sau :

$2n^2 - n + 1$	...	...	$2n^2$	...		$4n^2$
.						
.						
.						
$2n + 1$						
$n + 1$			$2n$	$2n^2 + n + 1$	...	$2n^2 + 2n$
1	2	...	n	$2n^2 + 1$	...	$2n^2 + n$

Nếu tồn tại i, j trên hàng sao cho $|i - j| \geq N$ thì $2n^2 + n - 1 \geq N$.

Nếu ở trên cột thì $2n^2 - n \geq |i - j| \geq N$. Vậy $N \leq 2n^2 + n - 1$.

Xét $N = 2n^2 + n - 1$.

Gọi $A = \{1, 2, \ldots, n^2 - n + 1\}$. $B = \{3n^2, 3n^2 + 1, \ldots, 4n^2\}$. Với mọi i thuộc A, j thuộc B, ta có $|i - j| \geq 3n^2 - (n^2 - n + 1) = 2n^2 + n - 1$. (**)

Với hàng có chứa phần tử của A, ta gọi là hàng loại 1, cột có chứa phần tử của A được gọi là cột loại 1. Với hàng có chứa phần tử của B, ta gọi là hàng loại 2, với cột có chứa phần tử của B, ta gọi là cột loại 2.

Gọi p, q là số lượng hàng, cột loại1 thì $p.\,q \geq n^2 - n + 1$, do đó

$$p + q \geq 2\sqrt{pq} \geq \sqrt{4n^2 - 4n + 4} > 2n - 1.$$

Gọi r, s là số lượng hàng, cột loại 2 thì $r.\,s \geq n^2 + 1$, do đó :

$$r + s \geq 2\sqrt{rs} \geq \sqrt{4n^2 + 4} > 2n.$$

Vậy $p + q + r + s \geq 4n + 1$, suy ra tồn tại hàng hoặc cột vừa loại 1 loại 2. Từ (**) suy ra giá trị lớn nhất của N là : $2n^2 + n - 1$.

3

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TP. ĐÀ NẴNG

Bài 1.

Tìm tất cả giá trị a, b, c, d, e $\in$ [0, 1] sao cho :

$$A = \frac{a}{1+bcde} + \frac{b}{1+cdea} + \frac{c}{1+deab} + \frac{d}{1+eabc} + \frac{e}{1+abcd} = 4.$$

Bài 2.

Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho $|f(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1,1]$ (1)

Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho

$|3ax^2 + 2bx + c| \leq k, \quad \forall x \in [-1,1], \ \forall f$ thỏa mãn (1).

Bài 3.

Trong mặt phẳng, cho tam giác đều ABC tâm O. Đường thẳng (d) quay quanh O cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh $T = \frac{1}{OM^4} + \frac{1}{ON^4} + \frac{1}{OP^4}$ không đổi.

Bài 4.

Chứng minh với mọi giá trị nguyên của m, tồn tại số nguyên n để

$$n^3 - 11n^2 - 87n + m$$

chia hết cho 191.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Không mất tính tổng quát gỉa sử $a \le b \le c \le d \le e$ (*). Khi đó:

$$A \le \frac{a}{1+abcde} + \frac{b}{1+abcde} + \frac{c}{1+abcde} + \frac{d}{1+abcde} + \frac{e}{1+abcde}$$
$$= \frac{a+b+c+d+e}{1+abcde}.$$

Do a, b, c, d, e $\in$ [0, 1], nên :

$(1 - abc)(1 - de) + (1 - ab)(1 - c) + (1 - d)(1 - e) + (1 - b)(1 - a) \ge 0$ (1)

$\Rightarrow\ a + b + c + d + e \le 4 + abcde \le 4(1 + abcde)$ (2)

Do đó $A \le 4$. Nếu A = 4 thì đẳng thức xảy ra ở (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} abcde = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ do } (*) \\ de = 1 \\ c = 1 \\ d = 1 \vee e = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c = d = e = 1 \end{cases}.$$

Thử lại: Khi a = 0, b = c = d = e = 1 thì A = 4. Vậy các bộ gía trị cần tìm (a, b, c, d,e) là các hóan vị của (0, 1, 1, 1, 1).

Bài 2.

Đặt A = f(–1), B = f(–1/2), C = f(1/2), D = f(1) thì

$$a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D, \qquad b = \frac{2}{3}A - \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}D$$

$$c = \frac{A}{6} - \frac{4}{3}B + \frac{4}{3}C - \frac{D}{6}, \qquad d = -\frac{A}{6} + \frac{2}{3}B + \frac{2}{3}C - \frac{D}{6}$$

$$h(x) = 3ax^2 + 2bx + c = -\frac{A}{6}(12x^2 - 8x - 1) + \frac{4B}{3}(3x^2 - x - 1)$$
$$- \frac{4C}{3}(3x^2 + x - 1) + \frac{D}{6}(12x^2 + 8x - 1 .$$

Từ giả thiết suy ra $|A|,|B|,|C|,|D| \le 1$, do đó, nếu $\forall x \in [-1,1]$ thì :

$$|h(x)| \le \frac{1}{6}|12x^2 - 8x - 1| + \frac{4}{3}|3x^2 - x - 1| + \frac{4}{3}|3x^2 + x - 1| + \frac{1}{6}|12x^2 + 8x - 1|$$

Do $|A| + |B| = \max(|A - B|, |A + B|)$ nên với $\forall x \in [-1,1]$ ta có

$$|12x^2 + 8x - 1| + |12x^2 - 8x - 1| = \max(|16x|, |24x^2 - 2|) \le 22$$

$$|3x^2 + x - 1| + |3x^2 - x - 1| = \max(|2x|, |6x^2 - 2|) \le 4$$

$$\Rightarrow |h(x)| \le \frac{22}{6} + \frac{16}{3} = 9, \ \forall x \in [-1,1]$$

Với $f(x) = 4x^3 - 3x$ thì: $\forall x \in [-1,1]$ đặt $x = \cos t$ ta có $|f(x)| = |\cos 3t| \le 1$

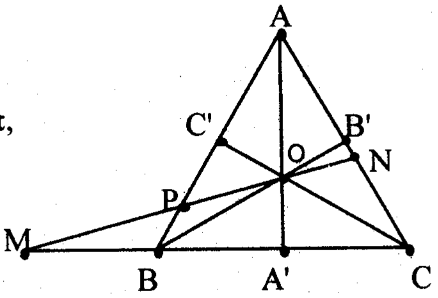
và $\max\limits_{[-1,1]} |3ax^2 + 2bx + c| = \max\limits_{[-1,1]} |12x^2 - 3| = 9$.

Suy ra hằng số k nhỏ nhất thỏa yêu cầu đề bài là 9.

Bài 3.

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB thì

$$OA' = OB' = OC' = R/2.$$



Gọi $\vec{i}$ là véctơ đơn vị của (d). Đặt

$(\vec{i}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$, $x = 2\pi/3$ thì

$(\vec{i}, \overrightarrow{OB'}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) = \alpha + x + k2\pi$,

$(\vec{i}, \overrightarrow{OC'}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}) = \alpha - x + k2\pi$

$$T = \frac{1}{(R/2)^4}\left[\left(\frac{OA'}{OM}\right)^4 + \left(\frac{OB'}{ON}\right)^4 + \left(\frac{OC'}{OP}\right)^4\right]$$

$$= \frac{16}{R^4}\left[\cos^4\alpha + \cos^4(\alpha + x) + \cos^4(\alpha - x)\right]$$

$$= \frac{4}{R^4}\left[(1+\cos 2\alpha)^2 + (1+\cos(2\alpha+2x))^2 + (1+\cos(2\alpha-2x))^2\right]$$

$$= \frac{4}{R^4}[3 + 2(\cos 2\alpha + \cos(2\alpha+2x) + \cos(2\alpha-2x))]$$

$$+ \frac{4}{R^4}\left[\cos^2 2\alpha + \cos^2(2\alpha+2x) + \cos^2(2\alpha-2x)\right] \qquad (1)$$

$$2\sin x[\cos 2\alpha + \cos(2\alpha+2x) + \cos(2\alpha-2x)]$$

$$= [\sin(2\alpha+x) - \sin(2\alpha-x) + \sin(2\alpha+3x) - \sin(2\alpha+x) + \sin(2\alpha-x) - \sin(2\alpha-3x)]$$

$$= \sin(2\alpha+3x) - \sin(2\alpha-3x) = \sin(2\alpha+2\pi) - \sin(2\alpha-2\pi) = 0 \qquad (2)$$

$$\cos^2 2\alpha + \cos^2(2\alpha+2x) + \cos^2(2\alpha-2x)$$

$$= \frac{1}{2}[3 + \cos 4\alpha + \cos(4\alpha+4x) + \cos(4\alpha-4x)]$$

$$2\sin 2x[\cos 4\alpha + \cos(4\alpha+4x) + \cos(4\alpha-4x)]$$

$$= [\sin(4\alpha+4\pi) - \sin(4\alpha-4\pi)] = 0. \qquad (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow T = \frac{4}{R^4}(3 + \frac{3}{2}) = \frac{18}{R^4}$ không đổi.

Bài 4.

(Được chọn làm đề thi – xem đáp án đề thi chính thức).

4

TRƯỜNG THPT PHAN CHÂU TRINH, TP. ĐÀ NẴNG

Bài 1.

Gọi chân các đường cao trong tam giác ABC là A', B', C'. Tính các góc của tam giác A'B'C' theo các góc A, B, C. Chứng minh rằng góc lớn nhất của tam giác A'B'C' ít nhất bằng góc lớn nhất của tam giác ABC. Khi nào thì chúng bằng nhau ?

Bài 2.

Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx \le \frac{2}{7} + \frac{9xyz}{7}.$$

Trong đó, x, y, z là các số thực không âm thoả điều kiện

$$x + y + z = 1.$$

Bài 3.

Cho a , b , c là các số nguyên dương thoả điều kiện

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

và d là ước chung lớn nhất của chúng. Chứng minh rằng abcd và d(b – a) những số chính phương .

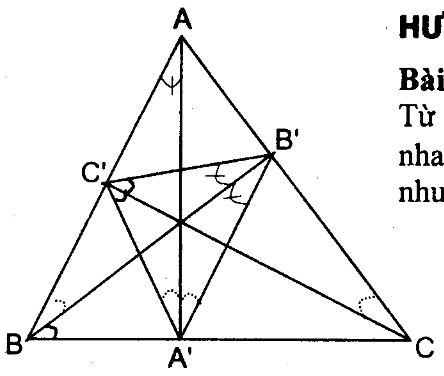
Bài 4.

Chứng minh rằng hệ phương trình :

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz - x - y - z = 2 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất trong tập các số thực dương. Chứng minh rằng hệ có nghiệm với x, y, z thực phân biệt.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài 1.

Từ các tứ giác nội tiếp, ta có các góc bằng nhau như hình bên. Lại gọi tên các góc α, β, γ như hình vẽ. Thế thì

$$A' = 2\alpha \,;\, B' = 2\beta \,;\, C' = 2\gamma$$

và $A = \beta + \gamma \,;\, B = \gamma + \alpha \,;\, C = \alpha + \beta$.

Suy ra dễ dàng : $A' = B + C - A$;

$B' = C + A - B \,;\, C' = A + B - C$.

Bây giờ, để ý rằng

$$A' \geq B' \Leftrightarrow B + C - A \geq C + A - B \Leftrightarrow B \geq A.$$

Do đó, nếu $A \geq B \geq C$ thì $C' \geq B' \geq A'$. Cho nên

$$A \leq C' \Leftrightarrow A \leq A + B - C \Leftrightarrow B \geq C : \text{đúng}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài 2.

Nếu $x \geq \frac{7}{9}$, thế thì $1 \leq \frac{9x}{7}$ suy ra $xy \leq \frac{9xyz}{7}$.

Hơn nữa $(y + z) \leq \frac{2}{9}$, nên $xy + xz < \frac{2}{9} < \frac{2}{7}$.

Như thế trong trường hợp này ta thu được

$$xy + yz + zx < \frac{2}{7} + \frac{9xyz}{7}.$$

Bây giờ giả định $x < \frac{7}{9}$, và thế là $1 - \frac{9x}{7} > 0$. Ta có

$$yz \leq \frac{(y+z)^2}{4},$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = z$. Ta cũng có

$$yz \leq \frac{(1-x)^2}{4}.$$

Từ đó ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(1 - \frac{9x}{7}\right)\frac{(1-x)^2}{4} + x(1 - x) \leq \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow (7 - 9x)(1 - x)^2 + 28x(1 - x) \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3x - 1)^2 \geq 0,$$

bất đẳng thức này hiển nhiên đúng (vì x không âm), với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh, với dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 3.

Gọi $A = \frac{a}{d}$, $B = \frac{b}{d}$, $C = \frac{c}{d}$, thế thì A, B, C có ước chung lớn nhất là 1. Ta có $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$, nên $AB = C(B - A)$.

Ta chứng minh rằng $(B - A)$ phải là một số chính phương. Nếu trái lại, thì phải có một số nguyên tố p sao cho luỹ thừa cao nhất của p chia hết $(B - A)$ là p^{2r+1} với r nào đó.

Bây giờ nếu p^{r+1} chia hết A, thì nó cũng chia hết

$$B = (B - A) + A.$$

Suy ra p^{2r+2} chia hết AB. Mà p không thể chia hết C (vì A, B, C không có thừa số chung), suy ra p^{2r+2} chia hết $(B - A)$. Vô lí ! Do đó quá lắm là p^r chia hết A, và ta có kết quả tương tự với B. Từ đó quá lắm p^{2r} chia hết AB, rồi thì chia hết $(B - A)$. Vô lí ! Điều đó đã chứng minh rằng $(B - A)$ là một số chính phương. Mà

$$ABC(B - A) = ABAB,$$

nên $ABC(B - A)$ phải là số chính phương, rồi thì

$$\frac{ABC(B - A)}{B - A} = ABC$$

cũng là số chính phương. Như thế

$$(b - a)d = d^2(B - A) \text{ và } abcd = d^4ABC$$

đều là số chính phương.

Bài 4.

Hiển nhiên (2, 2, 2) là một nghiệm (trong tập các số thực dương). Nếu ta coi z như đã biết, thế thì ta có

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{11z - 2}{z^2 + 1} \\ xy = \dfrac{z^2 + 2z + 12}{z^2 + 1} \end{cases}.$$

Vì thế điều kiện ắt có và đủ để x, y, z là các số dương là :

$$(11z - 2)^2 > 4(z^2 + 2z + 12)(z^2 + 1) \qquad (*)$$

(nó bảo đảm rằng x và y đều thực) và $z > \frac{2}{11}$ (để x, y và z đều dương).

(*) trở thành

$$4z^4 + 8z^3 - 69z^2 + 52z + 44 \le 0 \Leftrightarrow (z-2)^2(2z+11)(2z+1) \le 0.$$

Điều này được thoả mãn khi $-\dfrac{11}{2} \le z \le -\dfrac{1}{2}$ và $z = 2$. Nên chỉ có nghiệm dương duy nhất là $z = 2$ (rồi từ đó $x = 2$, $y = 2$, hơn nữa cũng vì hệ phương trình là đối xứng đối với x, y và z).

Với các nghiệm thực khác ta nên xem xét tại các giá trị thuộc khoảng từ $-\dfrac{11}{2}$ đến $-\dfrac{1}{2}$.

Với $z = -1$ ta được nghiệm không phân biệt $(-1, -1, -\dfrac{11}{2})$, loại.

Với $z = -2$ thì được $x = -\dfrac{12+2\sqrt{21}}{5}$, $y = -\dfrac{12-2\sqrt{21}}{5}$, chúng đều phân biệt.

5

TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM, TP. ĐÀ NẴNG

Bài 1.

Cho 3 số dương a, b, c thoả: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$

Chứng minh : $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3} \ge \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}$.

Bài 2.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 < 0 \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4) - x_1x_2 - x_3x_4 < 0 \\ (x_1+x_2)x_3x_4 - (x_3+x_4)x_1x_2 < 0 \\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ x_4 > 0 \end{cases}$$

Bài 3.

Tìm tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số sao cho mỗi số là trung bình cộng của các số suy từ số đó bằng phép hoán vị tròn các chữ số của số đó.

Bài 4.

Tính số cạnh của 1 đa giác đều có 4 đỉnh liên tiếp A, B, C, D thoả đẳng thức : $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si : từ giả thiết, ta có :

$$3=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\geq 1.$$

Đặt $x=\sqrt[12]{a},\ y=\sqrt[12]{b},\ z=\sqrt[12]{c}$.

Bài toán trở thành :

Với $\begin{cases}x>0,\ y>0,\ z>0\\ xyz\geq 1\end{cases}$, chứng minh $x^9+y^9+z^9\geq x^8+y^8+x^8$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 9 số :

$$x^9+.......+x^9\ +1\ \geq 9x^8 \qquad (1)$$

$$y^9+......+y^9+1\geq 9y^8 \qquad (2)$$

$$z^9+..........+z^9+1\geq 9z^8 \qquad (3)$$

Ta có : $x^8+y^8+z^8\geq 3\sqrt[3]{x^8y^8z^8}\geq 3 \qquad (4)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3), (4) ta có kết quả cần chứng minh : $x^9+y^9+z^9\geq x^8+y^8+z^8$.

Bài 2.

Xét hệ bất phương trình

$$\begin{cases}A=-x_1-x_2+x_3+x_4>0\\ B=x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4+x_3x_4>0\\ C=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4>0\\ D=x_1x_2x_3x_4>0\end{cases}$$

Đặt $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x+x_3)(x+x_4)$. Khai triển ta có

$$f(x)=x^4+Ax^2+Bx^2+Cx+D.$$

Do các hệ số A, B, C, D > 0 nên phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm x dương. Vì thế x_1, $x_2\leq 0$, trái giả thiết.

Vậy hệ đã cho là vô nghiệm.

Bài 3.

Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$, với $a, b, c\in\mathbb{N}$ và $1\leq a\leq 9,\ 0\leq b,c\leq 9$.

Theo giả thiết : $\overline{abc}=\dfrac{\overline{bca}+\overline{cab}}{2}\Leftrightarrow 189a=81b+108c$

$\Leftrightarrow 7a = 3b + 4c \Leftrightarrow 7(a-b) = 4(c-b)$ (1)

Suy ra :

$$4(c-b) \vdots 7 \quad (2)$$

$$\Rightarrow c-b \vdots 7 \quad (3)$$

Do $0 \le b, c \le 9$ nên $-9 \le c-b \le 9$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $c - b = -7, 0, 7$. Xét các trường hợp :

TH1 : $c - b = -7 \Leftrightarrow b = c + 7 \le 9$

$\Rightarrow c = 0, 1, 2$

$\Rightarrow b = 7, 8, 9$

$\Rightarrow a = 3, 4, 5$

$\Rightarrow \overline{abc} = 370, 481, 592$.

TH2 : $c - b = 0 \Leftrightarrow b = c$

$\Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow \overline{abc} = 111, 222, ..., 999$.

TH3 : $c - b = 7 \Leftrightarrow c = b + 7 \le 9$

$\Rightarrow b = 0, 1, 2$, $c = 7, 8, 9$

$\Rightarrow a = 4, 5, 6$

$\Rightarrow \overline{abc} = 470, 581, 692$.

Vậy có tất cả 15 số cần tìm là :

370, 481, 592

111, 222, ..., 999

470, 581, 692.

Bài 4.

Giả sử đa giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R.

Đặt $\alpha = \widehat{AOB}$ $(0^0 < \alpha < 120^0)$. Vẽ $OH \perp AB$, suy ra

$$AB = 2HB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Tương tự : $AC = 2R\sin\alpha$, $AD = 2R\sin\frac{3\alpha}{2}$.

Thay vào giả thiết :

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

Do đó : $\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\alpha+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)=0$

$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 2\alpha)=0$, hay

$$\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos 2\alpha\right)-\left(\cos\alpha+\cos\frac{5\alpha}{2}\right)=0,$$

$$\cos\frac{7\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}=0$$

Với điều kiện $0<\alpha<120^0$, ta có

$$\cos\frac{7\alpha}{4}=0\Rightarrow\frac{7\alpha}{4}=90^0\ \Rightarrow\alpha=\frac{300^0}{7}$$

Vậy đa giác có 7 cạnh.

6

TRƯỜNG THPT THÁI PHIÊN, TP. ĐÀ NẴNG

Bài 1.

1) Cho 3 số dương có tổng bằng 4. Chứng minh rằng tổng của hai số bất kì trong 3 số đó không bé hơn tích của 3 số đó.

2) Tính S = $\sin 39^0+\sin 69^0+\sin 183^0+\sin 213^0$.

Bài 2.

1) Giải phương trình : $\frac{1+3\sqrt{x}}{4x+\sqrt{2+x}}-1=0$.

2) Gọi x , y lần lượt là số đo hai góc trong của hai đa giác đều $Đ_1$ và $Đ_2$. Biết rằng : $5x-7y=0$. Tìm số cạnh của $Đ_1$, $Đ_2$.

Bài 3.

Chứng minh rằng với mọi nguyên dương n ta có :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3.\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4.\sqrt[3]{3}}+.........+\frac{1}{(1+n).\sqrt[3]{n}}<3.$$

Bài 4.

Cho tam giác ABC cân tại A. Biết rằng trực tâm H của tam giác nằm trên đường tròn nội tiếp của tam giác đó. Tính cosA.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

1) Giả thiết cho 3 số dương a, b, c và $a + b + c = 4$.

Không mất tính tổng quát, ta chứng minh : $a + b \geq abc$.

Từ $(a + b)^2 \geq 4ab$ suy ra $(a + b + c)^2 \geq 4(a + b)c$

$$\Leftrightarrow 16 \geq 4(a + b)c$$

$$\Leftrightarrow 16(a + b) \geq 4(a + b)^2 c \geq 16abc$$

$$\Leftrightarrow a + b \geq abc$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$, $c = 2$.

2) Ta có :

$$S = 2\sin 54^0 \cos 15^0 + 2\sin 198^0 \cos 15^0.$$

$$= 2\cos 15^0 (\sin 54^0 + \sin 198^0) = 2\cos 15^0 (\sin 54^0 - \sin 18^0)$$

$$= 4\cos 15^0 \cos 36^0 \sin 18^0$$

$$= \frac{4\cos 15^0 \cos 36^0 \sin 18^0 \cos 18^0}{\cos 18^0} = \frac{2\cos 15^0 \cos 36^0 \sin 36^0}{\cos 18^0}$$

$$= \frac{\cos 15^0 \sin 72^0}{\sin 72^0} = \cos 15^0$$

$$S = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Bài 2.

1) ĐK : $x \geq 0$

Phương trình cho : $1 + 3\sqrt{x} - 4x - \sqrt{2 + x} = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} - \sqrt{2 + x} = 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow 8x - 2 = (4x - 1)\left[3\sqrt{x} + \sqrt{2 + x}\right]$$

$$\Leftrightarrow (4x - 1)\left[3\sqrt{x} + \sqrt{2 + x} - 2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 1 = 0 \\ 3\sqrt{x} + \sqrt{2 + x} = 2 \end{array}\right.$$

* $4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

* Với $3\sqrt{x} + \sqrt{2 + x} = 2$ giải ra được nghiệm : $x = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{8}$.

Kết luận : Phương trình có 2 nghiệm là : $x = \dfrac{1}{4}; x = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{8}$.

2) Gọi số cạnh của đa giác đều $Đ_1$, $Đ_2$ lần lượt là : n và k.

ĐK : n, k là số nguyên dương và $3 \leq k \leq n$.

Ta có số đo mỗi góc của Đ$_1$ là $x = \frac{(n-2)\pi}{n}$

Và của Đ$_2$ là $y = \frac{(k-2)\pi}{k}$

$$5x - 7y = 0 \Leftrightarrow \frac{5(n-2)\pi}{n} = \frac{7(k-2)\pi}{k}$$

$$\Leftrightarrow 5nk - 10k = 7nk - 14n$$

$$\Leftrightarrow 5k + nk = 7n \Leftrightarrow k = \frac{7n}{n+5}$$

$$\Leftrightarrow k = 7 - \frac{35}{n+5}$$

Vì k là số nguyên dương nên $35 \vdots (n+5)$.

Do đó (n+5) phải bằng : 1, 5, 7 hoặc 35.

Nhưng vì $k \ge 3 \Rightarrow (n+5) = 35$. Vậy n = 30 và k = 6.

Bài 3.

Với mọi số nguyên dương k, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} = \frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k(k+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{k}.\sqrt[3]{k+1}.(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2})}$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{k}.\sqrt[3]{k+1}.(3\sqrt[3]{(k+1)^2})} = \frac{1}{3(1+k).\sqrt[3]{k}}$

Vậy $\frac{1}{(1+k).\sqrt[3]{k}} < 3(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}})$. Do đó

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4.\sqrt[3]{3}} + \dots\dots + \frac{1}{(1+n).\sqrt[3]{n}}$$

$$< 3.(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots\dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}) < 3.$$

Bài 4.

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, có bán kính r và K là trung điểm của BC.

Gọi x là số đo góc BHK $\Rightarrow x = 90^0 - \frac{A}{2}$.

Gọi y là số đo góc BOK, ta có :

$2y = 180^0 - B = 180^0 - (90^0 - \frac{A}{2}) = 90^0 + \frac{A}{2} \Rightarrow y = 45^0 + \frac{A}{4}$.

Tam giác BHK cho tgx = $\frac{BK}{2r}$ và Δ BOK cho tgy = $\frac{BK}{r}$ = 2tgx

$$\Leftrightarrow tg(45^0 + \frac{A}{4}) = 2tg(90^0 - \frac{A}{2}) = 2\cot g\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + tg\frac{A}{4}}{1 - tg\frac{A}{4}} = \frac{1 - tg^2\frac{A}{4}}{tg\frac{A}{4}} \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{4} + \sin\frac{A}{4}}{\cos\frac{A}{4} - \sin\frac{A}{4}} = \frac{\cos^2\frac{A}{4} - \sin^2\frac{A}{4}}{\sin\frac{A}{4}.\cos\frac{A}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{4}.\cos\frac{A}{4} = (\cos\frac{A}{4} - \sin\frac{A}{4})^2 = 1 - 2\sin\frac{A}{4}.\cos\frac{A}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{4}.\cos\frac{A}{4} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{2}{3}$$

Từ đó ta có cos A = 1 – 2sin$^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

7

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM, TỈNH QUẢNG NAM

Bài 1.

Giải phương trình sau trên tập số thực :

$$x^4 + 2006x^3 + 1006009x^2 + x - \sqrt{2x + 2007} + 1004 = 0.$$

Bài 2.

Chứng tỏ rằng nếu x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình :

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

thì với mọi n $\in$ N, số $x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên không chia hết cho 5.

Bài 3.

Xét các số thực dương a, b, c thoả điều kiện :

$$2006ac + ab + bc = 2006.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2b^2}{b^2 + 2006^2} + \frac{3}{c^2 + 1}$.

Bài 4.

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ là AB. Một đường tròn qua B và C tiếp xúc với cạnh AD tại E, một đường tròn qua A và D tiếp xúc với cạnh BC tại F. Hai đường tròn này cắt nhau tại 2 điểm M và N. Chứng minh rằng hai tam giác EMN và FMN có diện tích bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

ĐK : $x \geq -\frac{2007}{2}$ (*). Phương trình tương đương :

$$x^2(x^2+2.x.1003+1003^2)+\frac{1}{2}(2x+2007-\sqrt{2x+2007}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1003)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{2x+2007}-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1003)=0 \\ \sqrt{2x+2007}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1003$$

(thoả (*)). Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1003$.

Bài 2.

+ Trước hết ta chứng minh :

Với mọi $n \in N$, số $x_1^n + x_2^n$ là số nguyên. (*)

Mệnh đề đúng với n = 0, n = 1, n = 2. Ta có

$x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$;

$x_1^1 + x_2^1 = 6$; $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_x x_2 = 6^2 - 2.1 = 34$.

Giả sử mệnh đề (*) đúng với n = k – 1. Với n = k, ta có :

$$\begin{aligned} x_1^k + x_2^k &= (x_1+x_2)(x_1^{k-1}+x_2^{k-1}) - x_1x_2(x_1^{k-2}+x_2^{k-2}) \\ &= 6(x_1^{k-1}+x_2^{k-1}) - (x_1^{k-2}+x_2^{k-2}) \\ &= 5(x_1^{k-1}+x_2^{k-1}) + (x_1^{k-1}+x_2^{k-1}) - (x_1^{k-2}+x_2^{k-2}). \qquad (**) \end{aligned}$$

Do đó, nếu $(x_1^{k-1}+x_2^{k-1})$ và $(x_1^{k-2}+x_2^{k-2})$ là các số nguyên thì $x_1^k + x_2^k$ là một số nguyên, từ đó theo nguyên tắc quy nạp thì $x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên với mọi n.

+ Bây giờ ta chứng minh $x_1^n + x_2^n$ không chia hết cho 5 bằng phản chứng. Giả sử có các số tự nhiên n sao cho : $x_1^n + x_2^n$ chia hết cho 5.

Gọi n_0 là số tự nhiên nhỏ nhất mà $x_1^{n_0} + x_2^{n_0}$ chia hết cho 5.

Theo (**) thì hiệu $(x_1^{n_o-1}+x_2^{n_o-1})-(x_1^{n_o-2}+x_2^{n_o-2})$ cũng phải chia hết cho 5.

Thế k bởi n_0-1 trong (**) ta được :

$$x_1^{n_o-1}+x_2^{n_o-1}=5(x_1^{n_o-2}+x_2^{n_o-2})+(x_1^{n_o-2}+x_2^{n_o-2})-(x_1^{n_o-3}+x_2^{n_o-3})$$

Từ đó suy ra :

$$x_1^{n_o-3}+x_2^{n_o-3}=5(x_1^{n_o-2}+x_2^{n_o-2})-[(x_1^{n_o-1}+x_2^{n_o-1})-(x_1^{n_o-2}+x_2^{n_o-2})]$$

cũng phải chia hết cho 5. Điều này trái với giả thiết n_o là số tự nhiên nhỏ nhất mà $x_1^{n_o}+x_2^{n_o}$ chia hết cho 5. Do đó, giả thiết $x_1^n+x_2^n$ chia hết cho 5 là không tồn tại.

Vậy $x_1^n+x_2^n$ không chia hết cho 5 với mọi n.

Bài 3.

Từ giả thiết ta suy ra $ac+\dfrac{ab}{2006}+\dfrac{bc}{2006}=1$. ì a, b, c > 0 nên tồn tại A, B, C ∈ (0, π) sao cho A + B + C = π. Và vì

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1=ac+\frac{ab}{2006}+\frac{bc}{2006}$$

nên nếu đặt $a=\operatorname{tg}\dfrac{A}{2};\dfrac{b}{2006}=\operatorname{tg}\dfrac{B}{2};c=\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$ thì ta có :

$$P=\frac{2}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+1}-\frac{2}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}+1}+\frac{3}{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+1}=2\cos^2\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}+3\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\cos A+\cos B+3-3\sin^2\frac{C}{2}=-3\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+3$$

$$\le -3\sin^2\frac{C}{2}+3\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{A-B}{2}+3\le\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}.$$

Từ đó : $(\sqrt{3}\sin\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{A-B}{2})^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 3\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{A-B}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos\dfrac{A-B}{2}=1\\ 3\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A-B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\ \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Suy ra: $c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}; a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; b = 1003\sqrt{2}$.

Vậy Max $P = \dfrac{10}{3}$ khi $c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}; a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; b = 1003\sqrt{2}$.

Bài 4.

Gọi $I = EF \cap MN$; $K = AD \cap BC$; $P = EF \cap (ADF)$; $Q = EF \cap (BCE)$

$(ADF) = (O)$; $(BCE) = (O')$.

Ta có :

$P_{K/(O)} = KF^2 = KA.KD$ (1) ;

$P_{K/(O')} = KE^2 = KB.KC$ (2)

Suy ra : $\dfrac{KF^2}{KE^2} = \dfrac{KA.KD}{KB.KC} \Leftrightarrow \dfrac{KF^2}{KE^2} = \dfrac{KA^2}{KB^2}$ (do $\dfrac{KD}{KC} = \dfrac{KA}{KB}$)

$\Leftrightarrow \dfrac{KF}{KE} = \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{KD}{KC} \Leftrightarrow \begin{cases} KF.KB = KA.KE & (3) \\ KF.KC = KE.KD & (4) \end{cases}$

Ta có :

$EA.ED = (KE - KA)(KD - KE)$

$= KE.KD - KE^2 - KA.KD + KA.KE$

$FB.FC = (KF - KB)(KC - KF)$

$= KF.KC - KF^2 - KB.KC + KB.KF$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra : $EA.ED = FB.FC$

Ta lại có : $EA.ED = EP.EF = -\mathscr{P}_{E/(O)}$

$FB.FC = FQ.EF = -\mathscr{P}_{F/(O')}$

Do đó : $EP.EF = FQ.EF \Rightarrow EP = FQ$. (5)

Mặt khác, MN là trục đẳng phương của (O) và (O'), $I \in MN$ nên

$\mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(O')} \Leftrightarrow IF.IP = IE.IQ \Leftrightarrow IF.(IE + EP) = IE.(IF + FQ)$

$\Leftrightarrow IF.EP = IE.FQ \Leftrightarrow IE = IF$

Điều đó chứng tỏ : $S_{EMN} = S_{FMN}$ (đpcm).

8

TRƯỜNG THPT NGUYỄN DUY HIỆU, TỈNH QUẢNG NAM

Bài 1.

Giải phương trình sau trên tập số nguyên:

$$\frac{11}{5}x - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2.$$

Bài 2.

Tìm đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn :

$$P(x) = \sqrt{P(x^2+1)-7}+6, \forall x \geq 0,$$
$$P(2000) = 2006.$$

Bài 3.

Trong mặt phẳng cho 6 điểm khác nhau sao cho, các đường thẳng nối từng cặp điểm trong 6 điểm này không có cặp đường thẳng trùng nhau, song song hay vuông góc nhau. Qua mỗi điểm ta kẻ các đường thẳng vuông góc với tất cả những đường thẳng có thể dựng được và không qua điểm đó, tìm số giao điểm nhiều nhất của các đường thẳng vuông góc đó.

Bài 4.

Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R, tiếp xúc đường thẳng (d) tại A. Điểm C bất kì trên (O), từ C dựng tia vuông góc và cắt AB tại D, trên tia này lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ cùng chiều và BC = DE. Từ E dựng các tiếp tuyến EP, EQ với đường tròn (O), với P, Q là các tiếp điểm. Đường thẳng EP, EQ theo thứ tự cắt đường thẳng (d) tại N, K. Hãy tính độ dài NK theo R, khi C di động trên (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$\frac{11}{5}x - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2 \quad (1)$$

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ y \geq \dfrac{1}{4} \\ x, y \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ x, y \in Z \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{11}{5}x - 3y - 2 = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1} \quad (2)$

Đặt $p = \dfrac{11}{5}x - 3y - 2$; (2) trở thành $p = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1}$

$\Leftrightarrow p + \sqrt{4y-1} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow p + 4y - 1 + 2p\sqrt{4y-1} = 2x+1$

$\Rightarrow p^2 - 2x + 4y - 2 = 2p\sqrt{4y-1}$ (3)

Ta có 4y – 1 không là số chính phương, thật vậy giả sử

$$4y-1=n^2,\ n\in\mathbb{Z},$$

vế trái là số lẻ nên n = 2k + 1, khi đó

$$4k^2+4k+1=4y-1 \Rightarrow 2(k^2+k-y)+1=0\text{, vô lí !}$$

Do đó (3) chỉ đúng khi p = 0, vậy ta có hệ

$$\begin{cases}\frac{11}{5}x-3y-2=0\\ -2x+4y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}\text{(thỏa phương trình (1)).}$$

Bài 2.

Theo đề bài ta có

$$P(x)=\sqrt{P(x^2+1)-7}+6, \forall x\geq 0 \quad (1)$$

$$P(2000)=2006 \quad (2)$$

Do đó $P(2000^2+1)=\left(P(2000)-6\right)^2+7=2000^2+7 (3)$

Đặt $x_1=2000^2+1$ thì từ (3) ta có $P(x_1)=x_1+6$

Đặt $x_2={x_1}^2+1$ khi đó từ (1) ta có

$P({x_1}^2+1)=\left(P(x_1)-6\right)^2+7={x_1}^2+7$, nên $P(x_2)=x_2+6$.

Bằng quy nạp theo quy trình đã chọn như trên ta tìm được vô hạn số hạng $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ thỏa :

$x_1<x_2<....<x_n<....$ với $x_n={x_{n-1}}^2+1$ và $P(x_n)=x_n+6$.

Khi đó đa thức $Q(t)=P(t)-(t+6)$ có vô hạn nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ suy ra

$$Q(t)=0, \forall t$$

Vậy đa thức cần tìm là $P(x)=x+6$.

Bài 3.

Theo đề bài ta có số đường thẳng xác định từ 6 điểm cho trước A, B, C, D, E, F là $C_6^2=15$. Qua mỗi điểm có 5 đường thẳng, do đó có 10 đường thẳng không đi qua điểm đó. Ta xét hai điểm bất kì, giả sử A, B : các đương thẳng vuông góc hạ từ A xuống các đường thẳng qua B, cắt tất cả các đường thẳng vuông góc hạ từ B.

TRƯỜNG HỢP 1. Có 4 đường qua B mà không qua A. Vậy từA ta hạ được 4 đường thẳng vuông góc với 4 đương thẳng đó. Bốn đường thẳng vuông góc này cắt 10 đường thẳng vuông góc hạ từ B tại 4.10 = 40 giao điểm.

TRƯỜNG HỢP 2. Hạ từ A còn có 6 đường vuông góc nữa (có 10 đường không qua A, trừ đi 4 đường qua B không qua A), mỗi đường này sẽ cắt 9 đường vuông góc hạ từ B (trong đó có1đường song song đường còn lại), vậy có thêm 6.9 = 54 giao điểm.

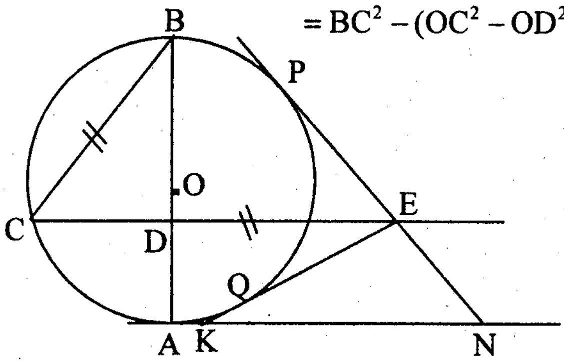
Trong số các giao điểm đã xét có các giao điểm trùng nhau, cứ mỗi 3 giao điểm tạo thành một tam giác mà 3 đường cao của nó là 3 đường vuông góc đã xét, vậy trực tâm của các tam giác này được kể 3 lần, số các tam giác này là $C_6^3 = 20$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có thể là 15(40 + 54) – 40 = 1370.

Bài 4.

* Ta có

$$EP^2 = EQ^2 = EO^2 - R^2 = ED^2 + OD^2 - R^2$$
$$= BC^2 - (OC^2 - OD^2) = BC^2 - CD^2 = BD^2$$



Do đó EP = EQ = BD.

* Đặt AK = KP = x ; NK = y ; EP = EQ = BD = z.

Ta có (O) là đường tròn bàng tiếp của tam giác ENK do đó

$$S_{\Delta ENK} = (p - KE)R = \frac{1}{2}AD.NK$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y(2R - z) = (\frac{x + z + y + EN}{2} - x - z)R$$
$$\Leftrightarrow y(2R - z) = (x + z + y + y + x - 2x - 2z - z)R$$
$$\Leftrightarrow y = 2R.$$

9

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH BÌNH ĐỊNH

Bài 1.

Cho hàm $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ thoả mãn :

$$f(n) + f(n + 1) + 120 = f(n + 2).f(n + 3) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Tính f(2006).

Bài 2.

Các số thực a, b, c, d thoả mãn

$$\begin{cases} 0 < a \le b \le c \le d \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{d}{c} \ge 3 \\ \dfrac{2}{b} + \dfrac{d}{c} \ge 2 \end{cases}$$

Chứng minh : $a^4 + b^4 + c^4 - d^4 \le 17$.

Bài 3.

Các số thực a, b, c dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.
Tính giá trị nhỏ nhất của

$$T = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} - \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Bài 4.

Cho ΔABC nhọn. Gọi (A_0), (B_0) và (C_0) là các đường tròn đường kính BC, CA, AB. Từ A, B và C ta kẻ các tiếp tuyến tới (A_0), (B_0) và (C_0). Các tiếp tuyến này tiếp xúc với các đường tròn trên tại A_1, A_2; B_1, B_2 và C_1, C_2. Chứng minh rằng 6 điểm A_1, A_2; B_1, B_2 và C_1, C_2 cùng nằm trên một đường tròn (C). Tính bán kính của (C) theo các cạnh của ΔABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Ta có f(2k + 1) – f(2k – 1)

$$= [f(2k+1) + f(2k)] - [f(2k) + f(2k-1)]$$
$$= f(2k+2)[f(2k+3) - f(2k+1)]$$

Do đó

$$|f(3) - f(1)| = f(4)f(6)...f(2k)|f(2k+1) - f(2k-1)|$$

với $k \in \mathbb{N}^*, k \ge 2$. Nếu $f(3) \ne f(1)$ thì $f(2k+1) \ne f(2k-1)$. Do đó $|f(3) - f(1)| \ge 2^{k-1}$ với $k \in \mathbb{N}^*, k \ge 2$. (Điều này không thể xảy ra.)

Vậy f(3) = f(1), suy ra f(2k + 1) = f(2k – 1) = a.

Tương tự f(2k + 2) = f(2k) = b với $a, b \in \mathbb{N}^*; a, b \ge 2$ và $\forall k \in \mathbb{N}^*$, và từ giả thiết ta có

$$a + b + 120 = ab \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 121 = 11^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=b-1=11 \\ \begin{cases} a-1=121 \\ b-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-1=1 \\ b-1=121 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=12 \\ b=122 \end{array}\right.$$

Vậy ta có kết quả sau: $\left[\begin{array}{l} f(2006)=2 \\ f(2006)=12 \\ f(2006)=122 \end{array}\right.$.

Bài 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số ta có

$$1+3a^4 \geq 4a^3, \quad 2^4+3b^4 \geq 8b^3, \quad d^4+3c^4 \geq 4dc^3$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta được

$$17 + 3(a^4 + b^4 + c^4) + d^4 \geq 4a^3 + 8b^3 + 4dc^3 \qquad (1)$$

Đặt $\alpha = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{d}{c}$; $\beta = \frac{2}{b} + \frac{d}{c}$; $\gamma = \frac{d}{c}$ thì

$$\begin{aligned} 4a^3 + 8b^3 + 4dc^3 &= 4a^4(\alpha-\beta) + 4b^4(\beta-\gamma) + 4c^4\gamma \\ &= 4a^4\alpha + 4(b^4-a^4)\beta + 4(c^4-b^4)\gamma \\ &\geq 12a^4 + 8(b^4-a^4) + 4(c^4-b^4) \\ &= 4(a^4+b^4+c^4) \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

Bài 3.

Từ giả thiết thì $0 < a, b, c < 1$.

Do đó, đặt $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\gamma$ với $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ thì

giả thiết trở thành $\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma \\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = \pi \\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ (1). Khi đó

$$T = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 3.$$

Với (1) thì ta luôn có $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}$ và

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \ge 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số ta có

$$\sin^2\alpha + \frac{9}{16\sin^2\alpha} \ge \frac{3}{2}$$

$$\sin^2\beta + \frac{9}{16\sin^2\beta} \ge \frac{3}{2}$$

$$\sin^2\gamma + \frac{9}{16\sin^2\gamma} \ge \frac{3}{2}$$

và $\frac{7}{16}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}\right) \ge \frac{7}{4}$

Vậy $T \ge \frac{13}{4}$ suy ra $\min T = \frac{13}{4}$ khi

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}.$$

Bài 4.

Kẻ đường cao AA'. Gọi H là trực tâm ΔABC.

Ta có BDHA' nội tiếp nên ta được

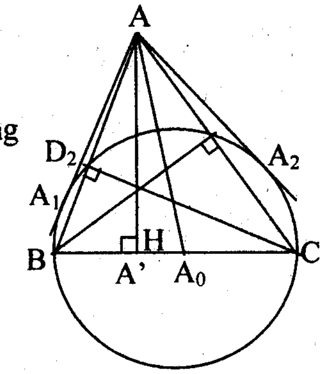
$$AH.AA' = AD.AB = AA_1{}^2 = AA_2{}^2 = k. \qquad (1)$$

Xét phép nghịch đảo

$N_A{}^k$: $A_1 \mapsto A_1$

$A_2 \mapsto A_2$ (2)

$A' \mapsto H$



Ta có 5 điểm A, A_1, A', A_0, A_2 cùng nằm trên đường tròn (AA_0) đường kính AA_0. (3)

Từ (2) và (3) thì $N_A{}^k$: $A_1A_2 \mapsto (AA_0)$.

Suy ra $H \in A_1A_2$

và $\overline{HA_1}.\overline{HA_2} = \overline{HA}.\overline{HA'}$ (4)

Tương tự gọi B', C' là chân đường cao kẻ từ B, C của ΔABC. Ta được

$$\overline{HB_1}.\overline{HB_2} = \overline{HB}.\overline{HB'} \qquad (5)$$

$$\overline{HC_1}.\overline{HC_2} = \overline{HC}.\overline{HC'} \quad (6)$$

Do H là trực tâm ΔABC nên $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$. Từ (4), (5), (6) ta có $\quad \overline{HA_1}.\overline{HA_2} = \overline{HB_1}.\overline{HB_2} = \overline{HC_1}.\overline{HC_2}$. (7)

AA_0, BB_0, CC_0 là các đường trung trực của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Kết hợp với (7) thì 6 điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng nằm trên đường tròn (C) tâm G (G là trọng tâm ΔABC).

Gọi R là bán kính của (C). Do G thuộc AA_0 nên sử dụng định lí Stewart ta được

$$GA_1{}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{18}$$

từ đó $R = GA_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

10

TRƯỜNG THPT DÂN LẬP DUY TÂN, TỈNH PHÚ YÊN

Bài 1.

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{1-2(ab+bc+ca)} + \frac{1}{abc}.$$

Bài 2.

Cho đa thức bậc 4 :

$$P(x) = 2006x^4 + 2004x^3 + 2007x^2 + 2003x + 2005.$$

Chứng minh rằng: $P(x) > 0 \ \forall x \in R$.

Bài 3.

Cho hình thang cân ABCD (AD = BC) nội tiếp trong đường tròn tâm O ; một đường thẳng Δ song song với AB cắt đường tròn lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng trực tâm của các tam giác AMD, MCB, CAN thẳng hàng.

Bài 4.

Cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, BC cắt AD tại F. Chứng minh rằng các trực tâm của bốn tam giác ABF, ADE, BEC, DCF thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Theo giả thiết :

$a + b + c = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + cb) = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$.

M được viết lại : $M = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a+b+c}{abc}$

$= \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}$

Ta có : $(ab + bc + ca)\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right) \ge 9$ (Theo BĐT Cô-si).

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \ge \frac{9}{ab+bc+ca}$$

Ta được:

$$M \ge \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương, ta có :

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2}{ab+bc+ca} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2}}$$

và : $\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2} \le$

$$\le \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{3} = \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vì thế $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{2}{ab+bc+ca} \ge 9$. Ta cũng có :

$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \ge 3(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 1 \ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{ab+bc+ca} \ge 3 \Leftrightarrow \dfrac{7}{ab+bc+ca} \ge 21$

Ta được $M \ge 9 + 21 = 30$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Vậy minM = 30 khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 2.

Trường hợp 1 : Nếu $x \ge 0$ thì $p(x) > 0$.

Trường hợp 2 : Xét $x < 0$. Ta có :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right) + \frac{1}{2}x^2$$

$$= x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 > 0$$

Ta viết lại P(x) :

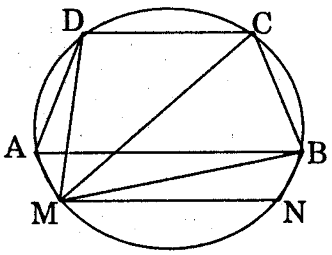
$$P(x) = 2x^4 + 2004(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + 3x^2 - x + 1$$

$$= 2x^4 + 3x^2 + (-x) + 1 + 2004(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) > 0 \ \forall x \in R.$$

Vậy $P(x) > 0$; $\forall x \in R$.

Bài 3.

Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác AMD, MBC, CAN. Rõ ràng ba tam giác này đều nội tiếp chung đường tròn ngoại tiếp hình thang cân ABCD. Theo tính chất trực tâm, ta có :



$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{H_2H_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \quad (4)$$

Tương tự, ta có : $\overrightarrow{H_2H_3} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AB}$ (5)

Do AB // DC // MN nên $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NM} = \beta\overrightarrow{AB}$

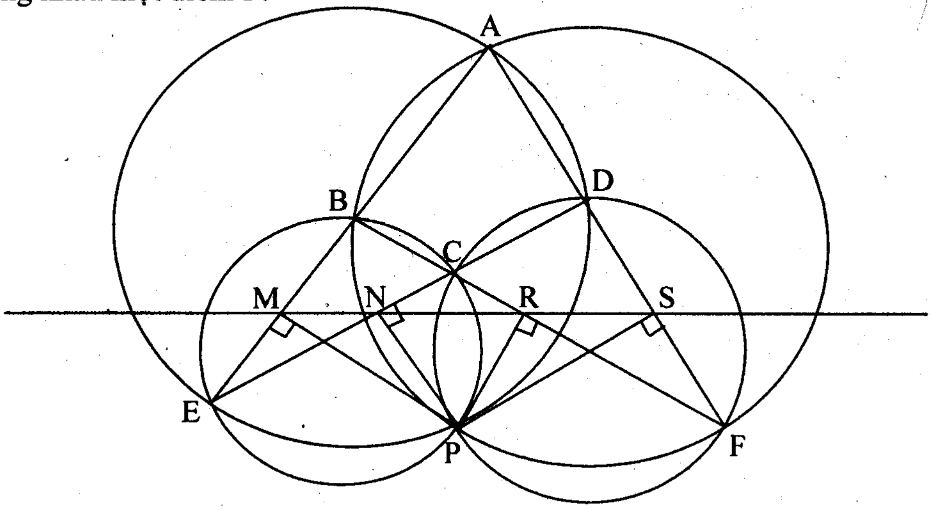
Vậy từ (4), (5) suy ra

$$\overrightarrow{H_2H_1} = (\alpha - 1)\overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{H_2H_3} = (\beta + 1)\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{H_2H_1} = t\overrightarrow{H_2H_3}$$

Do đó $\overrightarrow{H_1H_2} // \overrightarrow{H_1H_3}$, suy ra H_1, H_2, H_3 thẳng hàng (đ.p.c.m).

Bài 4.

Trước hết ta chứng minh bốn đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác có chung nhau một điểm P.



Gọi P là giao điểm của (EBC) và (CDF) thế thì

$$\widehat{CPE} = 180^0 - \widehat{CBE} = 180^0 - (\widehat{BAF} + \widehat{BFA})$$

$$\Rightarrow \widehat{CPE} + \widehat{CPD} = 180^0 - \widehat{EAD}$$

$$\Rightarrow \widehat{EPD} + \widehat{EAD} = 180^0.$$

Suy ra tứ giác ADPE nội tiếp, vậy đường tròn (ADE) qua P.

Tương tự, ta chứng minh đường tròn (ABF) cũng đi qua P. Gọi M, N, R, S là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống AB, CD, BC, AD. Suy ra M,N, R, S thẳng hàng (Đường thẳng Simson). Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm các tam giác ABF, ADF, BEC và DCF. Theo tính chất đường thẳng SimSon, suy ra trung điểm của PH_1, PH_2, PH_3, PH_4 nằm trên đường thẳng Simson MNRS. Từ đó, H_1, H_2, H_3, H_4 thẳng hàng (đpcm).

11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH, TỈNH PHÚ YÊN

Bài 1.

Cho x, y, z là các số thực thoả mãn :

$$x + y > 0; x + z > 0; y + z > 0; xy + yz + zx > 0.$$

Chứng minh rằng : $x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 \geq 4\sqrt{xy+yz+zx}.S$

(a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác, S là diện tích tam giác).

Bài 2.

Cho tam giác ABC thỏa $\cot g\frac{A}{2} + 2\cot g\frac{B}{2} - 23\cot g\frac{C}{2} = 0.$

Tìm GTNN của cosC.

Bài 3.

Cho tam thức $f(x) = x^2 - 2mx + 1$, $m \in \left(\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)$. Giải phương trình

$$[f(x)]^2 - 2mf(x) + 1 = x. \qquad (1)$$

Bài 4.

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A trên đường tròn đó, trên tiếp tuyến với đường tròn tại A lấy điểm M sao cho MA = R. Qua M dựng một cát tuyến thay đổi cắt (O) tại B và C (B nằm giữa M và C). Tìm vị trí B, C sao cho S_{ABC} đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Ta có : $x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 = x(a^2 - b^2 - c^2) + (x+y)b^2 + (x+z)c^2$

$$= -2xbc.\cos A + (x+y)b^2 + (x+z)c^2$$

$$\geq -2bcx.\cos A + 2\sqrt{(x+y)(x+z)}.bc \text{ (Cô-si)}$$

hay $x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 \geq 2bc\left(\sqrt{(x+y)(x+z)} - x.\cos A\right)$.

Ta lại có:

$$\left(x - \sqrt{(x+y)(x+z)}.\cos A\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (x+y)(x+z)\cos^2 A - 2x\sqrt{(x+y)(x+z)}.\cos A \geq 0$$

Từ đó :

$$(x+y)(x+z) + x^2\cos^2 A - 2x\sqrt{(x+y)(x+z)}.\cos A - (xy+yz+zx)\sin^2 A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+y)(x+z)} - x.\cos A\right)^2 \geq (xy+yz+zx).\sin^2 A$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+y)(x+z)} - x.\cos A \geq \sqrt{(xy+yz+zx)}.\sin A$$

Do đó : $x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 \geq 2bc\sqrt{xy+yz+zx}.\sin A$. Mà $2bc.\sin A = 4S$

Vậy $x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 \geq 4\sqrt{xy+yz+zx}.S$ (đpcm).

Bài 2.

Từ giả thiết ta có

$$\cot g\frac{A}{2}+2\cot g\frac{B}{2}-23\cot g\frac{C}{2}=0 \qquad (1)$$

Ta đưa (1) về dạng

$$x(\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2})+y(\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2})+z(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2})=0.$$

Đồng nhất các hệ số ta được x = – 11, y = 12, z = 13. Do đó

$$11\left(\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)+12\left(\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}\right)=13\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 11\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+12\frac{\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}=13\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Rightarrow 11\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+12\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}=13\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$ 11.sinA + 12.sinB = 13. sinC

$\Rightarrow$ 11a + 12b = 13c

$\Rightarrow$ $(11a + 12b)^2 = 169c^2$

$\Rightarrow$ $121a^2 + 144b^2 + 2.132.ab = 169(a^2 + b^2 - 2ab\cos C)$

$\Rightarrow$ $2ab(132 + 169\cos C) = 48a^2 + 25b^2 \geq 2.20\sqrt{3}.ab$

$$\Rightarrow \cos C \geq \frac{20\sqrt{3}-132}{169}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $4\sqrt{3}a = 5b$. Vậy $\min\cos C = \dfrac{20\sqrt{3}-132}{169}$.

Bài 3.

(1) $\Leftrightarrow$ $(x^2 - 2mx + 1)^2 - 2m(x^2 - 2mx + 1) + 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow$ $4(x^2 + x)m^2 - 2(x^2 + 1)(2x + 1)m + (x^2 + 1)^2 + 1 - x = 0$ (2)

Xét vế trái của (2) là tam thức bậc hai theo m, x là tham số, ta có :

$$\Delta' = (x^2+1)^2(2x+1)^2-4\left(x^2+x\right)\left[\left(x^2+1\right)^2+1-x\right]$$

$$= x^4+4x^2+1+4x^3-2x^2-4x$$

$$=\left(x^2+2x-1\right)^2.$$

Nghiệm của (2) là : $m_1=\dfrac{x^2-x+1}{2x}; m_2=\dfrac{x^2+x+2}{2(x+1)}$. Ta viết lại :

$$4\left(x^2+x\right)\left[m-\frac{x^2-x+1}{2x}\right].\left[m-\frac{x^2+x+2}{2(x+1)}\right]=0$$

$\Leftrightarrow$ $[x^2 - (2m + 1)x + 1].[x^2 - [x^2 - (2m + 1)x + 2 - 2m] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-(2m+1)x+1=0 & (3) \\ x^2-(2m-1)x+2-2m=0 & (4) \end{array}\right.$$

Ta có : $\Delta_3=\left(2m+1\right)^2-4=4(m-\frac{1}{2})(m+\frac{3}{2})$ và

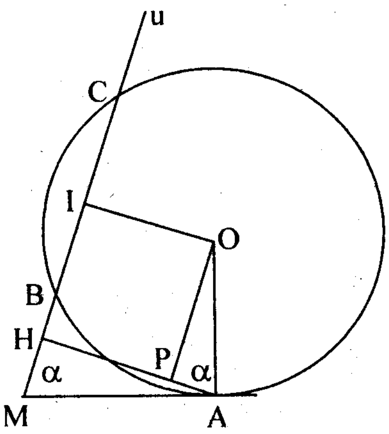
$$\Delta_4=(2m+1)^2-4(2-2m)=4(m+\frac{1+2\sqrt{2}}{2})(m+\frac{1-2\sqrt{2}}{2})$$

Với $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)\Rightarrow\begin{cases}\Delta_3>0\\ \Delta_4<0\end{cases}$, do đó (4) vô nghiệm và (3) có 2 nghiệm

$$x_1=\frac{2m+1-\sqrt{(2m+1)^2-4}}{2},\ x_2=\frac{2m+1+\sqrt{(2m+1)^2-4}}{2}.$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2.

Bài 4.



Gọi I là trung điểm của BC, dựng AH ⊥ BC (H∈ BC).

Giả sử góc HMA = α.

Qua O kẻ OP ⊥ AH , suy ra ∠OAP = α.

Ta có:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.\,BC=AH.\,IC$$

$$=R\sin\alpha\sqrt{OC^2-OI^2}$$

$$=R\sin\alpha\sqrt{R^2-OI^2}$$

$$=R\sin\alpha\sqrt{R^2-HP^2}$$

Ta có HP = AH – AP = R(sinα – cosα). Suy ra

$$S_{ABC}=R\sin\alpha\sqrt{R^2-R^2\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}=R^2\sin\alpha\sqrt{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=R^2\sqrt{2}\sqrt{\sin^3\alpha.\cos\alpha}.$$

Ta có :

$$\sin^3\alpha.\cos\alpha=\sqrt{\sin^6\alpha.\cos^2\alpha}=\sqrt{27\left(\frac{\sin^2\alpha}{3}\right)^3\cos^2\alpha}\ \le$$

$$\le \sqrt{27\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{4}\right)^4} = \sqrt{27.\frac{1}{4^4}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$ (Áp dụng Cô–si cho 4 số)

Do đó $S_{ABC} = R^2\sqrt{2}\sqrt{\sin^3\alpha.\cos\alpha} \le R^2\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{8}}R^2$.

Vậy Max $S_{ABC} = \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{8}}R^2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sin^2\alpha}{3} = \cos^2\alpha \Leftrightarrow tg^2\alpha = 3 \Leftrightarrow tg\alpha = \sqrt{3}$$

(α luôn nhọn) hay $\alpha = 60^0$.

Vậy các điểm B, C cần tìm là giao điểm của cát tuyến M_u hợp MA một góc 60^0 với (O).

12

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, TỈNH GIA LAI

Bài 1.

Tìm x nếu $\left[\frac{3}{x}\right]+\left[\frac{4}{x}\right]=5$.

Bài 2.

Cho các số thực dương a, b ,c. Chứng minh rằng :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

Bài 3.

Giải phương trình $x^3-3x=\sqrt{x+2}$.

Bài 4.

Cho tam giác ABC cân. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB tại T. CT cắt đường tròn tại K. Giả sử K là trung điểm CT và CT = $6\sqrt{2}$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Ta xét các trường hợp:

a) Nếu x < 0 thì $\frac{3}{x}<0 \Rightarrow \left[\frac{3}{x}\right] \le \frac{3}{x} \le 0$.

Tương tự ta có $\left[\frac{4}{x}\right] \le 0$. Vì vậy PT vô nghiệm.

b) Nếu x > 0 thì $\frac{3}{x} < \frac{4}{x} \Rightarrow \left[\frac{3}{x}\right] \le \left[\frac{4}{x}\right]$.Từ tính chất này và định nghĩa phần nguyên , ta có ba trường hợp:

* $\left[\frac{3}{x}\right] = 0$ và $\left[\frac{4}{x}\right] = 5$

Từ $\left[\frac{3}{x}\right] = 0$ suy ra $0 \le \frac{3}{x} < 1$ suy ra $x > 3$

Vì $\left[\frac{4}{x}\right] = 5$ suy ra $5 \le \frac{4}{x} < 6$ hay là $\frac{2}{3} < x \le \frac{4}{5}$.

Các khoảng này không có x nào thỏa mãn.

* $\left[\frac{3}{x}\right] = 1$ và $\left[\frac{4}{x}\right] = 4$.

Từ $\left[\frac{3}{x}\right] = 1$ suy ra $1 \le \frac{3}{x} < 2$ suy ra $\frac{3}{2} < x \le 3$.

Vì $\left[\frac{4}{x}\right] = 4$ suy ra $\frac{4}{5} < x \le 1$, cũng cho ta điều vô lí.

* $\left[\frac{3}{x}\right] = 2$ và $\left[\frac{4}{x}\right] = 3$.

Ta được $1 < x \le \frac{4}{3}$.

Vậy đáp số: $1 < x \le \frac{4}{3}$.

Bài 2.

Nhận xét rằng (1) đúng với a , b , c thì cũng đúng với ka , kb , kc. Vì vậy ta có quyền giả sử : a + b + c = 3.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \le 8$

Ta xét $\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2} = \frac{1}{3}\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{8x+6}{x^2-2x+3}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{8x+6}{(x-1)^2+2}\right) \le \frac{4}{3} + \frac{4}{3}x.$

Vì vậy VT $\leq 4 + \frac{4}{3}(a+b+c) = 8$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi a = b = c. (ĐPCM)

Bài 3.

Trước hết nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm x thì phải có

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Từ đó ta đặt x = 2cost với $0 \leq t \leq \pi$. Phương trình đã cho trở thành

$$8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\cos t + 2} \text{ hay } 2\cos 3t = 2\cos\frac{t}{2}.$$

Từ đó ta có nghiệm $t = 0, t = \frac{4\pi}{7}, t = \frac{4\pi}{5}$. Do đó tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{2, 2\cos\frac{4\pi}{5}, 2\cos\frac{4\pi}{7}\right\}$.

Bài 4.

Gọi K là trung điểm của CT và L là tiếp điểm của đường tròn với cạnh BC. Thế thì : $CK = \frac{1}{2}CT$ (*)

Không tính tổng quát ta xét hai trường hợp:

* TH1: AB = AC hay b = c. Suy ra L trung điểm của BC

$$CL^2 = CK.CT = \frac{1}{2}CT^2$$

Tức là $a^2/4 = 36$ hay a = 12 (1)

Áp dụng định lí côsin trong tam giác BCT, với $\beta = \widehat{ABC}$:

$$CT^2 = BT^2 + BC^2 - 2BT.BC.\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow 72 = a^2/4 + a^2 - 144.\cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{3}{4} \text{ (2) (do (1))}$$

Mặt khác, áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, có

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = a/2b$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có : (a, b, c) = (8, 8, 12).

* TH2: AC = BC hay a = b. Thế thì T là trung điểm của AB. Áp dụng định lí tiếp tuyến : $CL^2 = CK.CT = \frac{1}{2}CT^2$ (do (*)) hay

$$(a - c/2)^2 = 36.$$

Suy ra a = 6 + c/2. (4) Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác BCT :

$$a^2 = c^2/4 + 72 \text{ (5)}$$

Từ (4) và (5) : c = 6. Vậy : (a,b,c) = (9,9,6).

13

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KON TUM, TỈNH KON TUM

Bài 1.

Giải phương trình

$$(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1. \qquad (1)$$

Bài 2.

Cho $f(x) = |ax^2+bx+c|\sqrt{1-x^2} \le 1$ với mọi x thuộc đoạn [–1; 1].

Chứng minh rằng :

a) $|a| \le 4$.

b) $|ax^2+bx+c| \le 3$

Bài 3.

Cho tam giác ABC, có các cạnh BC = a, AC = b, AB = c và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng : Tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$a+b+c = 2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}.$$

Bài 4.

Cho tập hợp D = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }. Tìm số tập con D sao cho phương trình x + y = 13 vô nghiệm trên mỗi tập con đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Tập xác định của phương trình là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2-2x+3} = t$, với $t \ge \sqrt{2}$.

Khi đó phương trình (1) trở thành $(x + 1)t = x^2 + 1$ (2).

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - (x + 1)t + 2(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = x-1 \end{array}\right.$$

* Với t = 2, ta có $\sqrt{x^2-2x+3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right..$$

* Với t = x – 1, ta có $\sqrt{x^2-2x+3} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+3=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \phi$$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $\left\{1-\sqrt{2};\, 1+\sqrt{2}\right\}$.

Bài 2.

a) Từ giả thiết ta có :

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{3a}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}b + c\right| \leq 1 \Rightarrow \left|3a + 2b\sqrt{3} + 4c\right| \leq 8,$$

$$f(0) = |c| \leq 1,$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{3a}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}b + c\right| \leq 1 \Rightarrow \left|3a - 2b\sqrt{3} + 4c\right| \leq 8.$$

và

$$|6a| = \left|3a+3a+2b\sqrt{3}-2b\sqrt{3}+4c+4c-8c\right|$$

$$\leq \left|3a+2b\sqrt{3}+4c\right|+\left|3a-2b\sqrt{3}+4c\right|+|8c| \leq 8+8+8=24$$

Suy ra $|a| \leq 4$.

b) * Xét $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$, ta có :

$0 < 2\sqrt{3}x - 3 \leq 2\sqrt{3} - 3 \Rightarrow |2\sqrt{3}x - 3| \leq |2\sqrt{3} - 3|$

$0 > 2\sqrt{3} - 4x \geq 2\sqrt{3} - 4 \Rightarrow |2\sqrt{3}x - 4x| \leq |2\sqrt{3} - 4|$

và $2\sqrt{3}|ax^2 + bx + c| = |2\sqrt{3}ax^2 + 2\sqrt{3}bx + 2\sqrt{3}c|$

$= |(3a + 2\sqrt{3}b + 4c)x + ax(2\sqrt{3}x - 3) + c(2\sqrt{3} - 4x)|$

$\leq |3a + 2\sqrt{3}b + 4c)||x| + |a||x||2\sqrt{3}x - 3| + |c||2\sqrt{3} - 4x|$

$\leq 8 + 4|2\sqrt{3} - 3| + |2\sqrt{3} - 3| = 6\sqrt{3}$

Suy ra $|ax^2 + bx + c| \leq 3$.

* Xét $x \in \left[-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ta có :

$-2\sqrt{3} + 3 \leq 2\sqrt{3}x + 3 < 0 \Rightarrow |2\sqrt{3}x + 3| \leq |-2\sqrt{3} + 3|$,

$-4 + 2\sqrt{3} \leq 4x + 2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow |4x + 2\sqrt{3}| \leq |-4 + 2\sqrt{3}|$

và $2\sqrt{3}|ax^2 + bx + c| = |2\sqrt{3}ax^2 + 2\sqrt{3}bx + 2\sqrt{3}c|$

$= |-2\sqrt{3}ax^2 - 2\sqrt{3}bx - c|$

$= |(3a - 2\sqrt{3}b + 4c)x - ax(2\sqrt{3}x + 3) - c(2\sqrt{3} + 4x)|$

$\leq |3a - 2\sqrt{3}b + 4c||x| + |a||x||2\sqrt{3}x + 3| + |c|.|2\sqrt{3} + 4x|$

$\leq 8 + 4|-2\sqrt{3} + 3| + |-4 + 2\sqrt{3}| = 6\sqrt{3}$.

Suy ra $|ax^2 + bx + c| \leq 3$.

* Xét $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, ta có :

$$|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - x^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

Suy ra $|ax^2 + bx + c| \leq \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Vậy $|ax^2 + bx + c| \leq 3, \forall x \in [-1; 1]$.

Bài 3.

* ΔABC đều $\Rightarrow a+b+c=2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}$.

Vì ΔABC đều nên $a = b = c$ và $m_a = m_b = m_c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $a + b + c = 3a$, và

$$2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2} = 2\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}} = 3a.$$

Vậy $a+b+c=2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}$.

* $a+b+c=2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2} \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Ta có :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4},\ m_b^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4},\ m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

Do đó

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a = \sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2} \\ \frac{3}{2}b = \sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2} \\ \frac{3}{2}c = \sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2} \end{cases}$$

suy ra

$$\frac{3}{2}(a+b+c) = \sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2} + \sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2} + \sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta được:

$$\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}+\sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2}+\sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}\le\sqrt{3}.\sqrt{3(m_c^2+m_a^2+m_b^2)}$$

hay:

$$\frac{3}{2}(a+b+c)\le\sqrt{3}.\sqrt{3(m_c^2+m_a^2+m_b^2)}\Leftrightarrow a+b+c=2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}=\sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2}=\sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}$$

$\Leftrightarrow m_a^2=m_b^2=m_c^2 \Rightarrow m_a=m_b=m_c$ hay ΔABC đều.

* Vậy ΔABC đều $\Leftrightarrow a+b+c=2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}$.

Bài 4.

Ta có 1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7.

Đặt: $A_1=\{A\subset D \mid 1\in A \text{ và } 12\in A\}$

$A_2=\{A\subset D \mid 2\in A \text{ và } 11\in A\}$

$A_3=\{A\subset D \mid 3\in A \text{ và } 10\in A\}$

$A_4=\{A\subset D \mid 4\in A \text{ và } 9\in A\}$

$A_5=\{A\subset D \mid 5\in A \text{ và } 8\in A\}$

$A_6=\{A\subset D \mid 6\in A \text{ và } 7\in A\}$

Gọi B là tập hợp tất cả các tập con của D. Gọi C là tập hợp tất cả các tập con của D sao cho mọi tập con ấy không chứa trọn bất kì bộ nào trong 6 bộ số (1; 12), (2; 11), (3; 10), (4; 9), (5; 8), (6; 7).

Khi đó:

$C=B\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6)$

$\Rightarrow |C|=|B|\setminus|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|$ (1)

Từ cách đặt các A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) và C, ta có : Nếu $A\in C$ thì phương trình x + y = 13 vô nghiệm, vì thế $|C|$ chính là số các tập hợp con của D cần tìm. Ta có :

$$\left|\bigcup_{n=1}^{6}A_n\right|=\sum_{n=1}^{6}|A_n|-\sum_{1\le i<j\le 6}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k|-$$
$$\sum_{1\le i<j<k<l\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|+$$
$$+\sum_{1\le i<j<k<l<m\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m|-|A_1\cap A_2\cap A_4\cap A_5\cap A_6|$$

Vì các A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) có vai trò bình đẳng nhau nên:

$$+\sum_{n=1}^{6}|A_n| = 6|A_1|\ ;\ \sum_{1\le i<j\le 6}|A_i\cap A_j| = C_6^2|A_1\cap A_2| = 15|A_1\cap A_2|;$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k| = C_6^3|A_1\cap A_2\cap A_3| = 20|A_1\cap A_2\cap A_3|\ (3)$$

$$\sum_{1\le i<j<k<l\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| = C_6^4|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = 15|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

$$\sum_{1\le i<j<k<l<m\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m| = 6|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|$$

Ta có :

+$|B| = 2^{13} = 4096$. (4)

+ Vì $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6 = \{D\}$ nên

$$A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6| = 1.\quad (5)$$

+ Mỗi phần tử của A_1 có dạng $\{1; 12\}\cup Y_1$, với Y_1 là một tập con bất kì của $D\backslash\{1; 12\}$. Vì thế $|A_1|$ chính bằng số tập con $D\backslash\{1; 12\}$, từ đó:

$$|D\backslash\{1; 12\}| = 10 \Rightarrow |A_1| = 2^{10}.\ (6)$$

+ Mỗi phần tử của $|A_1\cap A_2|$ có dạng $\{1; 12; 2; 11\}\cup Y_2$ với Y_2 là một tập con bất kì của $D\backslash\{1; 2; 11; 12\}$. Vì thế $|A_1|$ chính bằng số tập con $D\backslash\{1; 2; 11; 12\}$. Từ đó:

$$|D\backslash\{1; 2; 11; 12\}| = 8 \Rightarrow |A_1\cap A_2| = 2^8.\ (7)$$

Tương tự ta được:

+$|A_1\cap A_2\cap A_3| = 2^6$, (8)

+$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = 2^4$, (9)

+$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5| = 2^2$. (10)

Từ (2), (3), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ta có:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|$$
$$= 6.2^{10} - 15.2^8 + 20.2^6 - 15.2^4 + 6.2^2 - 1 = 3367.\ (11)$$

Từ (1) và (11), ta có số tập con của D cần tìm là:

$$4096 - 3367 = 729.$$

14

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU, TỈNH ĐẮC LẮC

Bài 1.

Tìm đa thức P(x) thoả mãn:

$$P(P(x)) + 1 = [P^2(x) + 2P(x) + (x^2 + 3x + 1)^2]^2.$$

Bài 2.

Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trên mặt phẳng, không có ba điểm nào thẳng hàng, không có 4 điểm nào tạo thành hình bình hành. Gọi $I_1, I_2, \ldots, I_m$ là tất cả các trung điểm tạo thành từ các đoạn thẳng có đầu mút là hai điểm A_i, A_j nào đó $(1 \le i, j \le n)$. Gọi M là tổng độ dài mọi thẳng có đầu mút là hai điểm A_i, A_j bất kì $(1 \le i, j \le n)$. Gọi N là tổng độ dài mọi thẳng có đầu mút là hai điểm I_i, I_j bất kì $(1 \le i, j \le m)$. Chứng minh rằng:

$$N \le \frac{n^2 - 3n + 2}{4}.M.$$

Bài 3.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. M, N, P là trung điểm các cung nhỏ BC, CA, AB. Trên cạnh AB ta lấy hai điểm A_1, B_2 ; trên cạnh BC lấy hai điểm B_1, C_2 ; trên cạnh CA lấy hai điểm C_1, A_2 sao cho:

$$AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2.$$

Lấy A_3 là giao PA_1 với NA_2 ; B_3 là giao MB_1 với PB_2 ; C_3 là giao NC_1 với MC_2. Chứng minh rằng AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.

Bài 4.

Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn : a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của : A = 9ab + 10ac + 22bc.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$P(P(x)) + 1 = [P^2(x) + 2P(x) + (x^2 + 3x + 1)^2]^2 \quad (1)$$

Ta có P(x) = 0 không thoả mãn, vậy P(x) có dạng :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; \ (a_n \ne 0)$$

Khi khai triển hai vế của (1) thì số hạng lớn nhất của P(P(x)) + 1 là:

$$a_n(a_n x^n)^n = a_n^{n+1} x^{n^2}$$

Còn số hạng lớn nhất của $[P^2(x) + 2P(x) + (x^2 + 3x + 1)^2]^2$ là:

$$\begin{cases} \left(\left(a_n x^n\right)^2\right)^2 = a_n^4 x^{4n}\,;\ n > 2 \\ \left(\left(a_n x^2\right)^2 + x^4\right)^2 = (a_n^2+1)^2 x^8\,;\ n = 2 \\ x^8; n < 2 \end{cases}$$

Vậy nếu $n \le 2$ thì $x^{n^2} = x^8 \Rightarrow n^2 = 8$ (vô lí)

Do đó, $n > 2$ và $a_n^{n+1} x^{n^2} = a_n^4 x^{4n} \Rightarrow n = 4; a_n = 1$.

Vậy P(x) có dạng : $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Đặt $G(x) = P(x) - (x^2+3x+1)^2 + 1$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + 3P(x) + 1 - P(x) + (x^2+3x+1)^2 - 1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + 3P(x) + 1 - G(x)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow P(P(x)) - \left[P^2(x) + 3P(x) + 1\right]^2 + 1 = G(x)\left[G(x) - 2(P^2(x) + 3P(x) + 1)\right]$$

$$\Leftrightarrow G(P(x)) = G(x)\left[G(x) - 2(P^2(x) + 3P(x) + 1)\right]$$

Nếu $G(x) \ne 0$, đặt $\deg G(x) = k$ thì $k \le 3$ nên ta có :

$$\begin{cases} \deg G(P(x)) = 4k \\ \deg G(x)\left[G(x) - 2(P^2(x)+3P(x)+1)\right] = k + 8 \end{cases}$$

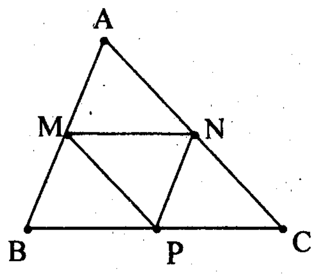
$$\Rightarrow 4k = k + 8 \Rightarrow k = \frac{8}{3} \text{ (vô lí).}$$

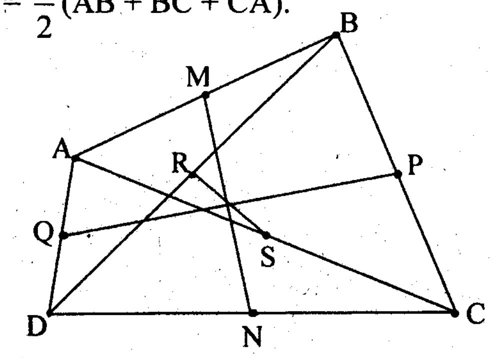
Vậy $G(x) = 0$ hay $P(x) = (x^2+3x+1)^2 - 1 = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Bài 2.

Với mỗi tam giác ABC có trung điểm các cạnh AB, BC, CA là M, N, P, ta có đẳng thức :

$$MN + NP + PM = \frac{1}{2}(AB + BC + CA). \qquad (*)$$





Với mỗi tứ giác ABCD (có thể tự cắt hoặc không lồi) có trung điểm các đoạn AB, CD, BC, DA, BD, AC là M, N, P, Q, R, S ta có bất đẳng thức

$$MN + PQ + RS \le \frac{1}{2}(AB + CD + BC + AD + BD + AC). \qquad (**)$$

Từ các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta lập mọi tam giác, tứ giác có các đỉnh thuộc các điểm này, rồi lập mọi đẳng thức (*), BĐT (**) tương ứng với mỗi tam giác, tứ giác trên và cộng vế theo vế tất cả ta được một bất đẳng thức (***).

Vì mỗi đoạn I_iI_j chỉ thuộc đúng một tam giác hoặc một tứ giác trên nên nó có mặt đúng một lần bên vế trái của BĐT (***). Vậy VT(***) = **N**.

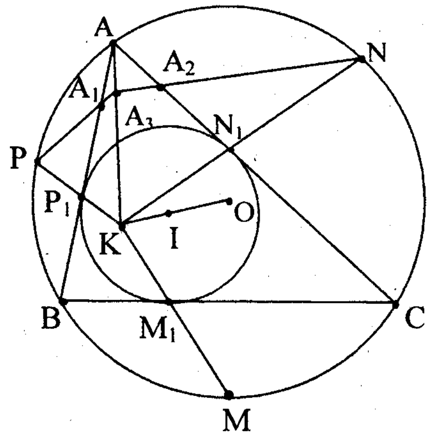
Mỗi đoạn A_iA_j có mặt trong đúng n-2 tam giác và $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ tứ giác nên hệ số của nó khi khai triển VP(***) là

$$\frac{1}{2}(n-2+\frac{(n-2)(n-3)}{2}) = \frac{n^2-3n+2}{4}.$$

Vậy VP(***) = $\frac{n^2-3n+2}{4}$.M.

Do đó N$\le\frac{n^2-3n+2}{4}$.M

Bài 3.



Xét đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm M_1, N_1, P_1 của các cạnh BC, CA, AB. Gọi K là tâm vị tự tỉ số dương của hai đường tròn (I) và (O). Vì $IM_1 \parallel OM$ (cùng vuông góc BC) nên ta có phép vị tự:

$V_K^{\frac{R}{r}}: (I) \to (O)$

$M_1 \to M$

$N_1 \to N$

$P_1 \to P$

Vì $AA_1 = AA_2$ và $AP_1 = AN_1$ nên ta có phép vị tự:

$V_A^{\frac{AA_1}{AP_1}}: P_1 \to A_1$

$N_1 \to A_2$

Gọi phép vị tự tâm H là tích hai phép vị tự trên thì H, A, K thẳng hàng và H, P, A_1 thẳng hàng, H, N, A_2 thẳng hàng. Vậy H trùng A_3, hay AA_3 đi qua K.

Tương tự, BB_3, CC_3 đi qua K nên AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.

Chú ý : Thí sinh có thể dùng định lí Mê-nê-la-úyt - Xê-va thay cho tích hai phép vị tự.

Bài 4.

Ta có : $a + b + c = 3$,

$$\begin{aligned} A &= 9ab + 10ac + 22bc \\ &= 9ab + 10(a + b)c + 12bc \\ &= 9ab + 10(3-(a + b))(a + b) + 12b(3-(a + b)) \\ &= -10(a + b)^2 + 30(a + b) - 12b^2 + 36b - 3ab \end{aligned}$$

Xét $f(t) = -t^2 + 3t$ với $0 \le t \le 3$ ta có : $\max f(t) = \frac{9}{4}$, đạt tại $t = \frac{3}{2}$.

Vậy $A = 10f(a + b) + 12f(b) - 3ab \le 22\max f(t) = \frac{99}{2}$.

Do đó GTLN của A là $\frac{99}{2}$, xảy ra khi $a = 0$, $b = c = \frac{3}{2}$.

15

TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG, ĐÀ LẠT

Bài 1.

Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, AB. Đường thẳng C_1K cắt đường thẳng AC tại B_2, đường thẳng B_1K cắt đường thẳng AB tại C_2 sao cho diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác AB_2C_2. Tính góc CAB.

Bài 2.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{5}{8} + \frac{r}{4R},$$

trong đó R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

Bài 3.

Cho n số thực $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

Chứng minh :

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} < \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(y+x)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

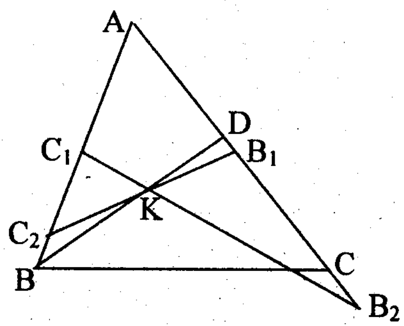
Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AB_2 = x$, $AC_2 = y$.

Phân giác BK cắt cạnh AC tại D. Ta có :

$$\frac{KB}{KD} = \frac{c}{AD} = \frac{a}{CD} = \frac{a+c}{b} > 1.$$

Suy ra : $AD = \dfrac{bc}{a+c}$ và D nằm giữa A và B_2

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác ABD và đường thẳng B_2 K C_1 ta có :



$$\frac{B_2D}{B_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{KB}{KD} = 1$$

Suy ra :

$$\frac{x - \dfrac{bc}{a+c}}{x} \cdot \frac{a+c}{b} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{a+c-b} \quad (1)$$

Tương tự ta có : $y = \dfrac{bc}{a+b-c}$ (2)

Từ giả thiết : diện tích tam giác ABC = diện tích tam giác AB_2C_2, suy ra :

$$xy = bc \ (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được :

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \ (4)$$

Theo định lí cosin ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A \ (5)$$

Từ (4), (5) suy ra : $\cos A = -\dfrac{1}{2}$ và $\widehat{CAB} = 60^\circ$.

Bài 2.

Ta có:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)=\cos B+\cos C$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)=\cos C+\cos A$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)=\cos A+\cos B$$

Và

$$\frac{r}{R}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin A\geq 2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin A}$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\leq\frac{1}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin A\right)$$

Tương tự ta có:

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin C+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin B\right)$$
$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin A+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin C\right)$$

Cộng các bất đẳng thức này lại ta được:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$
$$\leq\frac{1}{4}\left[\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)+\operatorname{tg}\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)\right]$$
$$=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2}=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{4}+\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{4}+\frac{1}{4}$$

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$, suy ra:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}.$$

Bài 3.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left[\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right]^2<\frac{n}{2} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-a-cốp-ski ta có:

$$\text{Vế trái }(1)\le n.\left[\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)^2\right] \quad (2)$$

Ta có :

$$\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}\le\frac{x_1^2}{1+x_1^2}=1-\frac{1}{1+x_1^2}$$

$$\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}\le\frac{1}{1+x_1^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} \qquad \cdots$$

$$\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\le\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

Suy ra vế phải của (2) bé hơn:

$$n.\left[1-\frac{1}{1+x_1^2}+\left(\frac{1}{1+x_1^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)\right]$$

$$=n\left[1-\frac{1}{2}\right]=\frac{n}{2}.$$

(dấu < nghiêm ngặt vì có ít nhất một $x_i^2>0, i=1,2,\cdots,n$).

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài 4.

I. Trường hợp có một trong ba ẩn x, y, z bằng 0.

1) x = 0 : Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}0=y^2z^2\\ y^2z^2=0\\ z^2y^2=0\end{cases}$$

suy ra : $y=0, z=t\in R$ hay $z=0, y=t\in R$, trong trường này hệ có nghiệm

$(x,y,z)\in\{(0,0,t),(0,t,0), t\in R\}$.

2) y = 0 : Tương tự ta có nghiệm :

$(x,y,z)\in\{(t,0,0),(0,0,t), t\in R\}$.

3) z = 0 : Tương tự ta có nghiệm :

$(x,y,z)\in\{(t,0,0),(0,t,0), t\in R\}$.

II. Trường hợp $xyz \neq 0$.

Chia mỗi phương trình trong hệ cho $(xyz)^2$ ta có :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2 = 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2 = 4+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2 = 5+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $x_0 = \frac{1}{x}, y_0 = \frac{1}{y}, z_0 = \frac{1}{z}$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} (z_0+y_0)^2 = 3+x_0+x_0^2 & (1) \\ (x_0+z_0)^2 = 4+y_0+y_0^2 & (2) \\ (y_0+x_0)^2 = 5+z_0+z_0^2 & (3) \end{cases}$$

Cộng 3 phương trình của hệ này ta có:

$$\left(x_0+y_0+z_0\right)^2 = 12+\left(x_0+y_0+z_0\right) \ (*)$$

Giải phương trình bậc 2 ta có : $x_0 + y_0 + z_0 = 4$ (4) hay $x_0 + y_0 + z_0 = -3$ (5)

a) Từ (1), (4) ta có : $x_0 = \frac{13}{9}$, từ (2), (4) ta có : $y_0 = \frac{12}{9}$, từ (3), (4) ta có $z_0 = \frac{11}{9}$.

b) Từ (1), (5) ta có : $x_0 = \frac{-6}{5}$, từ (2), (5) ta có : $y_0 = \frac{-5}{5}$, từ (3), (5) ta có $z_0 = \frac{-4}{5}$.

Kết luận :

$$(x, y, z) \in \left\{\left(\frac{9}{13},\frac{9}{12},\frac{9}{11}\right),\left(\frac{-5}{6},\frac{-5}{5},\frac{-5}{4}\right),(t,0,0),(0,t,0),(0,0,t),t\in R\right\}.$$

16

TRƯỜNG CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH KHÁNH HÒA

Bài 1.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3y + y^3x$, với $x, y \in R$ và x, y thỏa điều kiện: $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Bài 2.

Tìm tất cả các tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là các số nguyên dương, không có ước chung và thỏa mãn đẳng thức :

$$\cot g^2\frac{A}{2} + 4\cot g^2\frac{B}{2} + 9\cot g^2\frac{C}{2} = \left(\frac{6p}{7r}\right)^2,$$

Với p, r lần lượt là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 3.

Lấy các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC làm đáy, dựng ra phía ngoài 3 tam giác vuông cân MBC, NCA, PAB. Chứng minh rằng 3 đường thẳng AM, BN, CP đồng quy và hai tam giác ABC, MNP có cùng trọng tâm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Gọi a là một giá trị của biểu thức P, nghĩa là hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 & (1) \\ x^3y + y^3x = a & (2) \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + y^2$; $v = xy$ (điều kiện : $u \geq 2v$). Hệ trên tương đương với

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = a \end{cases},$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình : $X^2 - X + a = 0$. Nghiệm thỏa mãn

$$u \geq 2v \Leftrightarrow a \leq \frac{2}{9}.$$

Vậy: $\mathrm{Max}P = \frac{2}{9}$ khi $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 2.

Ta có: $\frac{p}{r} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$ và

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}. \qquad (*)$$

Từ giả thiết, ta có :

$$49(\cot g^2\frac{A}{2} + 4\cot g^2\frac{B}{2} + 9\cot g^2\frac{C}{2}) = 36(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2})^2 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Bun-nhi-a-cốp-ski :

$$36(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2})^2 \leq 49(\cot g^2\frac{A}{2} + 4\cot g^2\frac{B}{2} + 9\cot g^2\frac{C}{2}) \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\cot g\frac{A}{2}}{6} = \dfrac{2\cot g\frac{B}{2}}{3} = \dfrac{3\cot g\frac{C}{2}}{2}$.

Kết hợp với (*), ta được : $\begin{cases} \cot g\frac{A}{2} = 7 \\ \cot g\frac{B}{2} = \frac{7}{4} \\ \cot g\frac{C}{2} = \frac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{7}{25} \\ \sin B = \frac{56}{65} \\ \sin C = \frac{63}{65} \end{cases}$

Áp dụng định lí hàm sin : $\dfrac{25a}{7} = \dfrac{65b}{56} = \dfrac{65c}{63} \Leftrightarrow \begin{cases} 40a = 13b \\ 45a = 13c \end{cases}$.

Ta chọn : a =13, b = 40 ; c = 45 .

Kết luận : Δ ABC có 3 cạnh

(a ; b; c) = (13k ; 40k ; 45k) với $k \in N^*$.

Bài 3.

a) Dựng ra phía ngoài Δ ABC, 3 hình vuông BCC_1B_1, ACC_2A_2, ABB_2A_1 thì M, N, P lần lượt là tâm 3 hình vuông nói trên.

Xét phép quay $Q_B^{90^0}$: A → B_2

B_1 → C $\Rightarrow AB_1 = B_2C$ và $AB_1 \perp B_2C$ (1)

Gọi D là trung điểm của AC, ta có DM, DN lần lượt là đường trung bình của ΔACB_1, ΔACB_2 . Kết hợp với (1), ta có :

$$DP = DM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2}B_2C \text{ và } DP \perp DM$$

Xét phép quay $Q_D^{90^0}$: P → M

N → A $\Rightarrow$ PN = MA và PN $\perp$ MA

$\Rightarrow$ MA là đường cao của Δ MNP.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được BN, CP là các đường cao của ΔMNP.

Do đó AM, BN, CP đồng quy tại trực tâm của Δ MNP. Gọi Q, R lần lượt là trung điểm PN, AM, và G = MQ $\cap$ BD.

Theo chứng minh trên, $Q_D^{90^0}$: PN → MA, nên

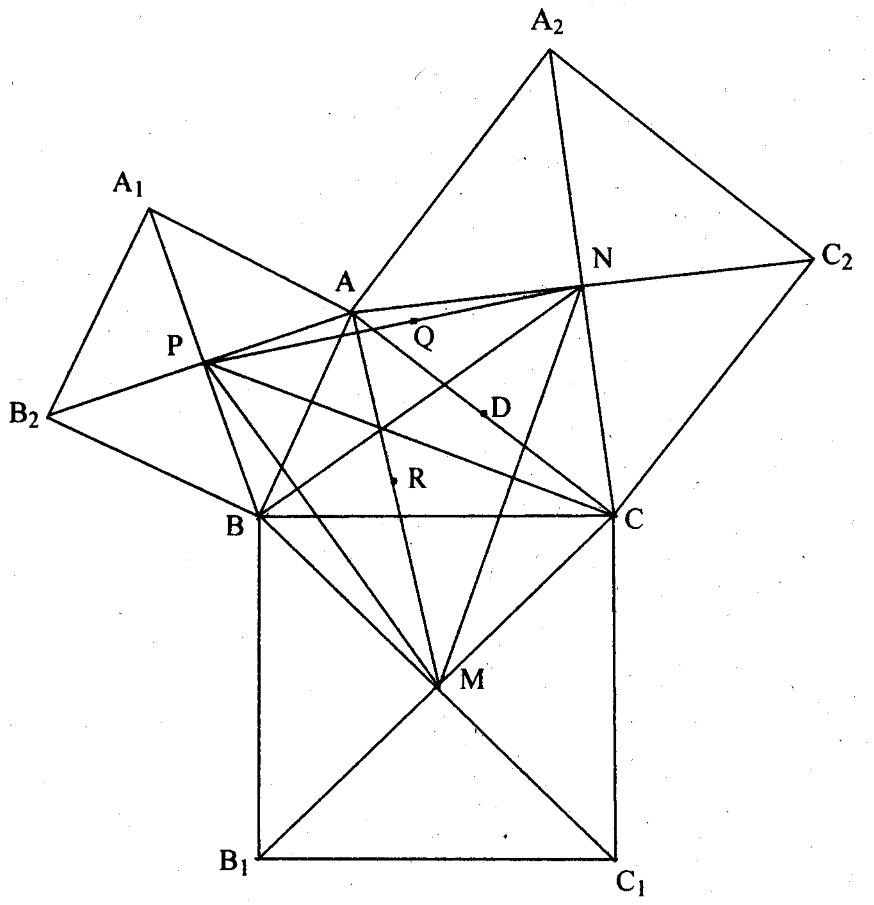
$$Q_D^{90^0} : Q \to R \Rightarrow DQ = DR \text{ và } DQ \perp DR. \ (2)$$

Vì DR là đường trung bình của Δ AMC $\Rightarrow$ DR // MC và DR = $\frac{1}{2}$MC

Mà : MC = MB và MC $\perp$ MB nên DR $\perp$ MB và DR = $\frac{1}{2}$MB. (3)

Từ (2) và (3), ta có DQ // MB và DQ = $\frac{1}{2}$MB.

Theo định lí Ta-lét : $\frac{QD}{BM} = \frac{QG}{GM} = \frac{DG}{BG} = \frac{1}{2}$ và G $\in$ BD, G $\in$ MQ và BD, MQ là trung tuyến của ΔABC, ΔMNP, suy ra G là trọng tâm ΔABC và ΔMNP (đpcm).



17

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO, TỈNH BÌNH THUẬN

Bài 1.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x^2 = y(1+9x^2) & (1) \\ 6y^2 = z(1+9y^2) & (2) \\ 6z^2 = x(1+9z^2) & (3) \end{cases}$$

Bài 2.

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{ab}{c(b+c)} + \dfrac{bc}{a(c+a)} + \dfrac{ca}{b(a+b)}$.

Bài 3.

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và các góc thỏa mãn

$$B = 2A,\ C = 4A.$$

Tính $S = R^2\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4.

Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác đó ba tam giác cân $\triangle AC_1B, \triangle BA_1C, \triangle CB_1A$ có các cạnh đáy AB, BC,CA và góc ở đáy là α. Chứng minh ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Ta có

$$6x^2 = y(1+9x^2) \Leftrightarrow y = 3x^2(2-3y) \qquad (*)$$

$y = \dfrac{2}{3}$: không là nghiệm của hệ phương trình.

$y \neq \dfrac{2}{3}$: từ (*) ta có $x^2 = \dfrac{y}{3(2-3y)}$.

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{y}{3(2-3y)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y < \dfrac{2}{3}$.

Tương tự : $0 \leq x < \dfrac{2}{3}, 0 \leq z < \dfrac{2}{3}$.

Ta có : $x = y = z = 0$ là nghiệm hệ phương trình

Với $x, y, z > 0$, từ (1): $\dfrac{y}{x} = \dfrac{6x}{1+9x^2} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq x$

từ (2) : $z \leq y$

từ (3) : $x \leq z$

$\Rightarrow y \leq x \leq z \leq y \Rightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0;0), (\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3})$.

Bài 2.

Ta có $(\sqrt{\dfrac{ab}{c}} + \sqrt{\dfrac{bc}{a}} + \sqrt{\dfrac{ca}{b}})^2$

$$= (\sqrt{\dfrac{ab}{c(b+c)}}.\sqrt{b+c} + \sqrt{\dfrac{bc}{a(c+a)}}.\sqrt{c+a} + \sqrt{\dfrac{ca}{b(a+b)}}.\sqrt{a+b})^2$$

$$\leq (\dfrac{ab}{c(b+c)} + \dfrac{bc}{a(c+a)} + \dfrac{ca}{b(a+b)})(b+c+c+a+a+b) = 2T$$

Mà $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

nên:

$$(\sqrt{\dfrac{ab}{c}} + \sqrt{\dfrac{bc}{a}} + \sqrt{\dfrac{ca}{b}})^2 \geq 3(a+b+c) = 3.$$

$\Rightarrow 2T \geq 3 \Rightarrow$ GTNN của T là $\dfrac{3}{2}$.

GTNN này đạt được khi $\sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \sqrt{\dfrac{bc}{a}} = \sqrt{\dfrac{ca}{b}} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Bài 3.

Ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$$\Rightarrow \dfrac{R}{a} = \dfrac{1}{2\sin A}, \dfrac{R}{b} = \dfrac{1}{2\sin B}, \dfrac{R}{c} = \dfrac{1}{2\sin C}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(3+\cot g^2A+\cot g^2B+\cot g^2C)$$

Trong ΔABC có $\cot gA.\cot gB+\cot gBC.tgC+\cot gC.\cot gA=1$

và ta có: $\cot g2\alpha=\dfrac{\cot g^2\alpha-1}{2\cot g\alpha}$ nên suy ra:

$$\cot g^2\alpha=1+2\cot g\alpha.\cot g2\alpha$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\left[3+3+2(\cot gA.\cot g2A+\cot gB.\cot g2B+\cot gC.\cot g2C)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left[6+2(\cot gA.\cot gB+\cot gB.\cot gC+\cot gC.\cot gA)\right]$$
$$=\frac{1}{4}(6+2)=2.$$

Bài 4.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{A}\ge\widehat{B}\ge\widehat{C}$.

Trường hợp 1: $\widehat{A}+\alpha<180^0$. Gọi M. N, P lần lượt là giao điểm của AA_1,BB_1,CC_1 với BC, CA, AB. Kẻ $BH_1\perp AA_1,CH_2\perp AA_1$. Ta có:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{-MB}{MC}=-\frac{BH_1}{CH_2}$$
$$=-\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}}=-\frac{c.BA_1.\sin(B+\alpha)}{b.CA_1.\sin(C+\alpha)}$$
$$=-\frac{c\sin(B+\alpha)}{b\sin(C+\alpha)}.$$

Tương tự,

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=-\frac{a\sin(C+\alpha)}{c\sin(A+\alpha)},\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-\frac{b\sin(A+\alpha)}{a\sin(B+\alpha)}$$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1\Rightarrow AA_1,BB_1,CC_1$ đồng quy.

Trường hợp 2: $\widehat{A}+\alpha=180^0$. AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy tại A.

Trường hợp 3: $\widehat{A}+\alpha>180^0$.

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-\frac{MB}{MC}=-\frac{c\sin(B+\alpha)}{b\sin(C+\alpha)}$$

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{NC}{NA}=\frac{a\sin(C+\alpha)}{-c\sin(A+\alpha)}$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{PA}{PB}=-\frac{b\sin(A+\alpha)}{a\sin(B+\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$$

$\Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ đồng quy.

18

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, TỈNH ĐỒNG NAI

Bài 1.

Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh tương ứng là a, b, c. O là tâm đường tròn ngoại tiếp ; H là trực tâm. R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Giả sử OH cắt CB và CA tại P và Q.

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABPQ nội tiếp là:

$$a^2+b^2=6R^2.$$

Bài 2.

Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số:

$$\underbrace{11....1}_{p}\underbrace{22....2}_{p}........\underbrace{99...9}_{p}-123456789$$

chia hết cho p.

Bài 3.

Gọi s, t, u, v là các số nằm trong $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho:

$$s+t+u+v=\pi.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{2}\sin s-1}{\cos s}+\frac{\sqrt{2}\sin t-1}{\cos t}+\frac{\sqrt{2}\sin u-1}{\cos u}+\frac{\sqrt{2}\sin v-1}{\cos v}\geq 0.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Ta có các nhận xét sau đây :

1) Trong tam giác ABC, ta có : $CH = 2R.\cos C$; $\widehat{OCH} = |B - A|$

2) $CO \perp OH \Leftrightarrow$ ABPQ nội tiếp.

Chứng minh :

1) Gọi K là trung điểm AB ; ta có:

$$CH = 2OK = 2R.\cos\widehat{BOK} = 2R.\cos C.$$

Ta có $\widehat{OCH} = \left|\widehat{HCA} - \widehat{OCA}\right| = \left|\left(90^0 - A\right) - \left(90^0 - B\right)\right| = |B - A|$.

2) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (ABC) tại C; cắt AB tại T ; Khi đó ta có $\widehat{TCB} = \widehat{CAB}$, $OC \perp CT$ nên tứ giác ABPQ nội tiếp, do đó

$$\widehat{CPQ} = \widehat{CAB} = \widehat{TCB} \Leftrightarrow CT // PQ \Leftrightarrow CO \perp OH.$$

Áp dụng vào bài ta có :

Tứ giác ABPQ nội tiếp

$\Leftrightarrow CO \perp OH \Leftrightarrow CO = CH.\cos(HCO) \Leftrightarrow R = 2R\cos C.\cos(B - A)$

$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B = -1 \Leftrightarrow 2\sin^2 A + 2\sin^2 B = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 6R^2$

Bài 2.

Xét $p = 3$: dễ dàng chứng minh.

Xét $p \neq 3$: Ta có:

$$n = \sum_{k=0}^{p-1} 10^{8p+k} + 2\sum_{k=0}^{p-1} 10^{7p+k} + \ldots\ldots + 9\sum_{k=0}^{p-1} 10^k - c$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^p - 1\right)\left(10^{8p} + 2.10^{7p} + \ldots\ldots + 8.10^p + 9\right) - c$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{9p} + 10^{8p} + \ldots\ldots + 10^p - 9\right) - c$$

p là ước của n khi và chỉ khi 9p là ước của 9n (vì ta xét p khác 3).

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$10^{9p} + 10^{8p} + \ldots\ldots + 10^p - 9 - 9c$$

chia hết cho 9p.

Vì $9 + 9c = 1111111110 = 10^9 + 10^8 + \ldots\ldots + 10$ nên ta sẽ chứng minh $\left(10^{9p} + 10^{8p} + \ldots\ldots + 10^p\right) - \left(10^9 + 10^8 + \ldots\ldots + 10\right)$ chia hết cho 9p.

Theo định lí Fermat nhỏ, ta có:

$10^{mp} \equiv \left(10^{m}\right)^{p} \equiv 10^{m} \pmod{p}$

$10^{mp} \equiv 10^{m} \pmod{9}$

Mà (9;p) = 1 nên $10^{mp} \equiv 10^{m} \pmod{9p}$. Suy ra đpcm.

Bài 3.

Đặt a = tgs ; b = tgt ; c = tg u ; d = tgv. Khi đó a, b, c, d > 0. Ta có:

$$s+t+u+v=\pi \Rightarrow tg(s+t)+tg(u+v)=0 \Rightarrow \frac{a+b}{1-ab}+\frac{c+d}{1-cd}=0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$$

Suy ra:

$$(a+b)(a+c)(a+d)=a^2(a+b+c+d)+abc+abd+acd+bcd$$

$$=\left(a^2+1\right)(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a+b}=\frac{(a+c)(a+d)}{(a+b+c+d)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-kốp-ski:

$$2(a+b+c+d)^2=$$

$$=\left[(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\right]\left[\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right]$$

$$\geq\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\right)$$

Suy ra:

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\leq\sqrt{2}(a+b+c+d)$$

Tức là:

$$\frac{1}{\cos s}+\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\cos u}+\frac{1}{\cos v}\leq\sqrt{2}(tgs+tgt+tgu+tgv)$$

Đây là điều phải chứng minh.

19

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH BÀ RỊA - VŨNG TÀU

Bài 1.

Giải phương trình : $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$.

Bài 2.

Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn : $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 9$.

Chứng minh rằng : $\sqrt[3]{xyz} \in \mathbb{Z}$.

Bài 3.

Cho ΔABC có $A < C < \frac{\pi}{2}$ và các số thực m, n, p thỏa mãn :

$$\frac{m}{\cos A} + \frac{n}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{p}{\cos C} = 0.$$

Chứng minh phương trình :

$$mx^2 + nx + p = 0$$

có nghiệm $x \in (0;1)$.

Bài 4.

Cho ΔABC thỏa mãn : $\cos A.\cos B.\cos C = -\frac{3}{8}$.

a) Chứng minh tồn tại một góc của ΔABC có số đo nhỏ nhất là 120^o.
b) Gọi M, N, P là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Cách 1 : $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \Leftrightarrow 6x + 1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x$ (1)

Phương trình có dạng : $f(\sqrt[3]{6x+1}) = f(2x)$ với $f(t) = t^3 + t$ là hàm số đồng biến trong $\mathbb{R}$. Vậy phương trình (1) tương đương với:

$$\sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1.$$

Nhận xét :

Nếu $|x| > 1 \Rightarrow 4x^2 - 3 > 1 \Rightarrow |8x^3 - 6x| = 2|x|(4x^2 - 3) > 2$.

nên nghiệm của (1) nếu có phải thuộc [-1;1].

Đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi]$. (1) trở thành:

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra (1) có tập nghiệm là: $S = \left\{\cos\frac{\pi}{9}; \cos\frac{5\pi}{9}; \cos\frac{7\pi}{9}\right\}$.

<u>**Cách 2**</u> : Đặt $\sqrt[3]{6x+1} = 2y \Rightarrow \begin{cases} 8y^3 = 6x+1 \\ 8x^3 = 4x+2y+1 \end{cases}$.

Trừ 2 phương trình ta được : $8(y^3 - x^3) = 2(x-y) \Leftrightarrow x = y$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1$.

Các bước tiếp theo giải như cách 1.

Bài 2.

ƯCLN$(x,y,z) = d \Rightarrow x = dx_0; y = dy_0; z = dz_0$, với $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ và UCLN$(x_0, y_0, z_0) = 1$. Khi đó:

$$\frac{x_0}{y_0} - \frac{y_0}{z_0} + \frac{z_0}{x_0} = 9 \ (1) \ ; \ \sqrt[3]{xyz} = d\sqrt[3]{x_0y_0z_0} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_0y_0z_0} \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét : bộ $(x_0, y_0, z_0) : x_0y_0z_0 = \pm 1$ không thể thỏa mãn (1) nên $x_0y_0z_0 \neq \pm 1$. Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của $x_0y_0z_0$. Vì

$$(1) \Leftrightarrow x_0^2z_0 - y_0^2x_0 + z_0^2y_0 = 9x_0y_0z_0 \ (2)$$

và $(x_0, y_0, z_0) = 1$ nên p chỉ là ước của đúng hai trong 3 số x_0, y_0, z_0.

Không giảm tổng quát, giả sử p là ước của x_o, y_o và không là ước của z_o. Gọi m, n lần lượt là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của x_o và y_o $(m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

<u>Ta xét hai trường hợp</u> :

a) Nếu $n \geq 2m+1$: ta có p^{2m+1} là ước của $z_0^2y_0, y_0^2x_0, 9x_0y_0z_0$ nên từ (2) suy ra p^{2m+1} là ước của $x_0^2z_0$, mà x_0^2 không chia hết cho p^{2m+1} nên nên p là ước của z_0 (mâu thuẫn).

b) Nếu $n \leq 2m-1 \Leftrightarrow n+1 \leq 2m$: ta có p^{n+1}là ước của

$$x_0^2z_0, y_0^2x_0, 9x_0y_0z_0$$

nên từ (2) suy ra p^{m+1} là ước của $z_0^2y_0$, mà y_o không chia hết cho p^{n+1} nên p là ước của z_0 (mâu thuẫn). Vậy n = 2m nên 3m là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $x_0y_0z_0$.

Suy ra $x_0y_0z_0 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{3m_i}$ (với p_i, $i = \overline{1,k}$, là các ước nguyên tố của $x_0y_0z_0$). Vậy $\sqrt[3]{x_0y_0z_0} \in \mathbb{Z}$.

Chú ý: Ta có thể chỉ ra vô số bộ ba (x, y, z) thỏa $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 9$, ví dụ: $x = t$, y = 3t, z = 9t với t là số nguyên tùy ý khác 0, và $\sqrt[3]{xyz} = 3t$.

Bài 3.

Trước hết, với ΔABC thỏa $A < C < \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$1)\cos A.\cos C = \frac{1}{2}\left(\cos(A-C)+\cos(A+C)\right) < \frac{1}{2}(1-\cos B) = \sin^2\frac{B}{2}$$

$$2) 0 < A < C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A + B < \pi \Rightarrow 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2} - A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{B}{2} < \cos A$$

Đặt $u = \cos A; v = \sin\frac{B}{2}; w = \cos C \Rightarrow 0 < \frac{v}{u} < 1, 0 < uw < v^2$ (1)

và $f(x) = mx^2 + nx + p$.

Nếu p = 0: giả thiết bài toán trở thành $\frac{m}{u} + \frac{n}{v} = 0$.

Nếu m = 0 thì n = 0: f(x) là "đa thức không" nên có nghiệm $x \in (0;1)$.

Nếu $m \neq 0 \Rightarrow -\frac{n}{m} = \frac{v}{u} \Rightarrow f(x) = x(mx+n)$ có nghiệm $x = -\frac{n}{m} = \frac{v}{u} \in (0;1)$.

Nếu $p \neq 0$. Ta biến đổi giả thiết :

$$\frac{m}{u} + \frac{n}{v} + \frac{p}{w} = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v^2}\left(m\frac{v^2}{u^2} + n\frac{v}{u} + p\right) - \frac{uw - v^2}{v^2w}p = 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{uw - v^2}{uw}f(0).$$

Vậy : $f\left(\frac{v}{u}\right).f(0) = \frac{uw - v^2}{uw}\left[f(0)\right]^2 < 0$. (do (1) và $f(0) = p \neq 0$)

Suy ra f(x) có nghiệm $x \in \left(0;\frac{v}{u}\right) \subset (0;1)$ nên f(x) có nghiệm

$x \in (0;1)$.

Bài 4.

a) Vai trò A, B, C như nhau và từ giả thiết suy ra ΔABC tù nên không giảm tổng quát, giả sử $A > 90^\circ > B \ge C$. Ta có :

$$\cos A.\cos B.\cos C = -\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{3}{4} = -\cos A.\left(\cos(B-C) - \cos A\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \le -\cos A.\left(1-\cos A\right) \Rightarrow \cos^2 A - \cos A - \frac{3}{4} \ge 0 \Rightarrow \cos A \le -\frac{1}{2}$$

Vậy $A \ge 120^\circ$. Đẳng thức xảy ra khi : $B = C = 30^\circ$

(thỏa mãn : $\cos 120^\circ.\cos 30^\circ.\cos 30^\circ = -\frac{3}{8}$).

b) Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên cạnh đối diện (ta vẫn giả sử A tù). Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, ta có:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \vec{u} + \frac{c.\cos B}{a}.\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{c.\cos B}{a}.(\vec{v} - \vec{u})$$

$$= \frac{a - c.\cos B}{a}\vec{u} + \frac{c.\cos B}{a}\vec{v}$$

$$= \frac{b.\cos C}{a}\vec{u} + \frac{c.\cos B}{a}\vec{v} \text{ (do } a = b.\cos C + c.\cos B).$$

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\vec{u} + \frac{c.\cos A}{b}\vec{v}, \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} = -\vec{v} + \frac{b.\cos A}{c}\vec{u}.$$

M, N, P là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB nên ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2b\cos C}{a}\vec{u} + \frac{2c\cos B}{a}\vec{v}; \overrightarrow{AN}$$

$$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BK} = -\vec{u} + \frac{2c.\cos A}{b}\vec{v};$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CL} = -\vec{v} + \frac{2b.\cos A}{c}\vec{u},$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = 2c\left(\frac{\cos A}{b} - \frac{\cos B}{a}\right)\vec{v} - \left(1 + \frac{2b\cos C}{a}\right)\vec{u}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = 2b\left(\frac{\cos A}{c} - \frac{\cos C}{a}\right)\vec{u} - \left(1 + \frac{2c\cos B}{a}\right)\vec{v}$$

Vậy: M, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương.

Điều này tương đương với:

$$2c\left(\frac{\cos A}{b}-\frac{\cos B}{a}\right).2b\left(\frac{\cos A}{c}-\frac{\cos C}{a}\right)=\left(1+\frac{2b\cos C}{a}\right)\left(1+\frac{2c\cos B}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4(a\cos A-b\cos B)(a\cos A-c.\cos C)=(a+2b\cos C)(a+2c\cos B)$$

$$\Leftrightarrow 4[a\cos A-(b\cos B+c.\cos C)]\cos A=a+2(b\cos C+c.\cos B)$$

$$\Leftrightarrow 4[a\cos A-(b\cos B+c.\cos C)]\cos A=3a$$

$$\Leftrightarrow 4[\cos A-(\frac{\sin B}{\sin A}\cos B+\frac{\sin C}{\sin A}\cos C)]\cos A=3$$

$$\Leftrightarrow 4[-\cos(B+C)-\cos(B-C)]\cos A=3$$

$$\Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C=-\frac{3}{8}.$$

Đẳng thức cuối được cho ở giả thiết nên ta có điều cần chứng minh.

20

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TP. HỒ CHÍ MINH

Bài 1.

Tìm tất cả các hàm số $f: R^+ \to R^+$ (R^+ chỉ tập hợp các số thực dương) thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện :

(1) $\forall$ x, y $\in R^+$, nếu $x \le y$ thì $f(x) \le f(y)$

(2) $f(x.y).\ f(\frac{f(y)}{x}) = 2006,\ \forall x, y \in R^+$.

Bài 2.

Cho m, n là hai số nguyên dương phân biệt có (m, n) = d.

Tính $(2006^m + 1, 2006^n + 1)$.

(Kí hiệu (m, n) chỉ ước chung lớn nhất của m và n).

Bài 3.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} \text{ với x, y, z thuộc đoạn } [1003; 2006].$$

Bài 4.

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường thẳng AO cắt cạnh BC tại D. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm M và điểm N sao cho DB = DM và DC = DN. CM và BN cắt nhau tại E. Gọi H và K là trực tâm các tam giác EBM và ECN. Chứng minh HK vuông góc với AE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Giả sử hàm số $f: R^+ \to R^+$ đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

(1) $\forall x, y \in R^+$, nếu $x \le y$ thì $f(x) \le f(y)$

(2) $f(x.y).\, f(\frac{f(y)}{x}) = 2006, \forall x, y \in R^+$.

Từ (2) lấy x = 1 ta có:

$$f(f(y)) = \frac{2006}{f(y)}, \forall y \in R^+. \qquad (3)$$

$\forall x, y \in R^+$, nếu $x > y$ thì từ (1) ta có $f(x) \ge f(y) \Rightarrow f(f(x)) \ge f(f(y))$

$\Rightarrow \frac{2006}{f(x)} \ge \frac{2006}{f(y)} \Rightarrow f(y) \ge f(x) \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \exists\ a \in R^+$ sao cho $f(x) = a, \forall x \in R^+$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow a = \frac{2006}{a} \Rightarrow a = \sqrt{2006}, \forall x \in R^+$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2006}, \forall x \in R^+.$$

Ngược lại nếu $f: R^+ \to R^+$ và $f(x) = \sqrt{2006}$, $\forall x \in R^+$ thì rõ ràng (1) và (2) đều được thỏa mãn.

Bài 2.

Đặt $r = \frac{m}{d}$, $s = \frac{n}{d}$ và $2006^d = b$. Ta có:

$(r, s) = 1$, $2006^m = b^r$, $2006^n = b^s$, b chẵn.

Ta tìm $g = (2006^m + 1, 2006^n + 1) = (b^r + 1, b^s + 1)$. Ta có :

$$\begin{cases} b^r + 1 \ \vdots\ g \\ b^s + 1 \ \vdots\ g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^r \equiv -1 \pmod g \\ b^s \equiv -1 \pmod g \end{cases} \qquad (1)$$

$$b^r + 1 \ \vdots\ g \Rightarrow b^r + 1 = kg\ (k \in Z) \Rightarrow kg - b^r = 1 \Rightarrow (b, g) = 1 \qquad (2)$$

$$(r, s) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in Z \text{ sao cho } ru - sv = 1. \qquad (3)$$

$(r, s) = 1$ nên r, s cùng lẻ hoặc khác tính chẵn lẻ.

Trường hợp r, s đều lẻ:

Khi đó $b^r + 1$ và $b^s + 1$ có $b + 1$ là một ước chung, suy ra

$$g \ \vdots\ (b + 1) \qquad (4)$$

Từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} b^{ru} \equiv (-1)^u \pmod g \\ b^{sv} \equiv (-1)^v \pmod g \end{cases}$.

Mà r, s đều lẻ và ru – sv = 1 nên u, v khác tính chẵn lẻ. Do đó:

$$b^{ru} + b^{sv} \equiv (-1)^u + (-1)^v \equiv 0 \pmod g$$

$$\Rightarrow b^{sv+1} + b^{sv} = b^{sv}(b+1) \ \vdots\ g \overset{(2)}{\Rightarrow} b+1 \ \vdots\ g. \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow g = b + 1$.

Trường hợp r, s khác tính chẵn lẻ:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} b^{rs} \equiv (-1)^s \pmod g \\ b^{sr} \equiv (-1)^r \pmod g \end{cases} \Rightarrow 2.b^{rs} \equiv (-1)^r + (-1)^s \equiv 0 \pmod g$$

$$\Rightarrow 2.b^{rs} \ \vdots\ g \overset{(2)}{\Rightarrow} 2 \ \vdots\ g. \qquad (6)$$

Mà b chẵn $\Rightarrow b^r + 1, b^s + 1$ là các số lẻ $\Rightarrow$ g lẻ. (7)

Từ (6) và (7) ta có $g = 1$.

Vậy:

$$(2006^m + 1, 2006^n + 1) = 2006^d + 1 \text{ nếu } \frac{m}{d}, \frac{n}{d} \text{ cùng lẻ ;}$$

$$(2006^m + 1, 2006^n + 1) = 2006^d + 1 \text{ nếu } \frac{m}{d}, \frac{n}{d} \text{ khác tính chẵn lẻ.}$$

Bài 3.

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử

$$1003 \le x \le y \le z \le 2006.$$

Đặt $y = kx$ và $z = hx$ $(1 \le k \le h \le 2)$ ta được:

$$A = \frac{x^3 + k^3x^3 + h^3x^3}{x.kx.hx} = \frac{1 + k^3 + h^3}{kh}. \qquad (1)$$

Ta chứng minh

$$\frac{1 + k^3 + h^3}{hk} \le \frac{1 + k^3 + 2^3}{2k} \qquad (2)$$

$(2) \Leftrightarrow 2 + 2k^3 + 2h^3 \le h + hk^3 + h.2^3$

$\Leftrightarrow (2 - h) + k^3(2 - h) + 2h(h^2 - 2^2) \le 0$

$\Leftrightarrow (2 - h)[1 - 4h + k^3 - 2h^2] \le 0.$ (*)

Vì $2 - h \ge 0$, $1 - 4h \le 0$ và $k^3 - 2h^2 \le 2k^2 - 2h^2 \le 0$ nên (*) đúng.

Mặt khác ta có:

$$\frac{1 + k^3 + 2^3}{2k} - 5 = \frac{k^3 - 10k + 9}{2k} = \frac{(k-1)(k^2 + k - 9)}{2k} \le 0. \qquad (3)$$

Từ (1) (2) và (3) ta có : $A \le 5$. Lại có khi $x = y = 1003$, $z = 2006$ thì $A = 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 5.

Bài 4.

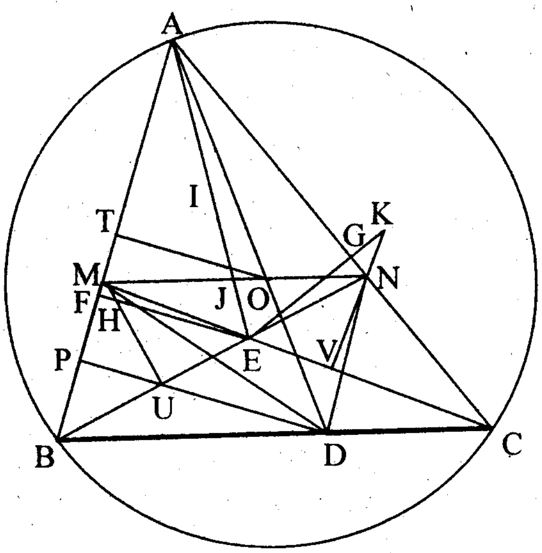
Gọi P và T lần lượt là trung điểm của BM và AB

$\Rightarrow DP \perp AB$ (do DM = DB) và $OT \perp AB$.

$\Rightarrow OT // DP$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{2PB}{AB} = 2\left(1 - \dfrac{AP}{AB}\right)$

$= 2 - \dfrac{AP}{AT} = 2 - \dfrac{AD}{AO}$.



Tương tự ta cũng có:

$\dfrac{NC}{AC} = 2 - \dfrac{AD}{AO}$.

Do đó $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{NC}{AC}$

$\Rightarrow MN // BC \Rightarrow$ AE đi qua trung điểm J của MN.

Gọi (γ_1) là đường tròn tâm I, đường kính AE và (γ_2) là đường tròn tâm J, đường kính MN.

Gọi F, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AB và AC. Gọi U là hình chiếu vuông góc của M trên BN và V là hình chiếu của N trên CM. Ta có:

$$P_H/(\gamma_1) = \overline{HE}.\overline{HF} \text{ và } P_H/(\gamma_2) = \overline{HM}.\overline{HU}$$

mà M, F, U, E cùng thuộc đường tròn đường kính EM nên

$$\overline{HE}.\overline{HF} = \overline{HM}.\overline{HU} \Rightarrow P_H/(\gamma_1) = P_H/(\gamma_2)$$

Tương tự ta có: $P_K/(\gamma_1) = \overline{KG}.\overline{KE} = \overline{KN}.\overline{KV} = P_K/(\gamma_2)$. Suy ra KH là trục đẳng phương của 2 đường tròn $(\gamma_1), (\gamma_2)$. Suy ra $HK \perp IJ \Rightarrow HK \perp AE$.

21

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TP. HỒ CHÍ MINH

Bài 1.

Giải phương trình:

$$(x - x^2)(x^2 + 3x + 2007) - 2005x\sqrt{4 - 4x} = 30\sqrt[4]{x^2 + x - 1} + 2006.$$

Bài 2.

a) Cho $x, y > 0,\ x + y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 51x + 23y + \frac{9}{x} + \frac{48}{7y}.$$

b) Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

Bài 3.

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a + b + c} \leq 4R^2.$$

Bài 4.

Cho tập hợp $A = \{a_1, a_2, a_3..., a_{2006}\}$. Ta xây dựng các tập hợp B, C, D như sau :

$B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_{2006}\}$ với $b_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ $(i = 1, 2, ..., 2006), a_{2007} = a_1$

$C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_{2006}\}$ với $c_i = \dfrac{b_i + b_{i+1}}{2}$ $(i = 1, 2, ..., 2006), b_{2007} = b_1$

$D = \{d_1, d_2, d_3, ..., d_{2006}\}$ với $d_i = \dfrac{c_i + c_{i+1}}{2}$ $(i = 1, 2, ..., 2006), c_{2007} = c_1$

Biết $A = D$ và $a_1 = 1$. Tìm $a_2, a_3, ..., a_{2006}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x^2 + x - 1)^2 + 2005(x + \sqrt{1-x})^2 + 30\sqrt[4]{x^2 + x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x + \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 2.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$P = 2(x + y) + (49x + \frac{9}{x}) + (21y + \frac{48}{7y}) \geq 2 + 42 + 24 = 68.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 68, khi $x=\frac{3}{7}; y=\frac{4}{7}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si – Svac:

$$(ab+bc+ca)(ab+b^2+a^2)\ge(ab+\sqrt{b^3c}+\sqrt{a^3c})^2 \qquad (1)$$

$$(b^2+bc+c^2)(a^2+c^2+ca)\ge(ab+\sqrt{bc^3}+\sqrt{ac^3})^2 \qquad (2)$$

$$(ab+\sqrt{b^3c}+\sqrt{a^3c})(ab+\sqrt{bc^3}+\sqrt{ac^3})\ge(ab+bc+ca)^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Bài 4.

Ta có $\left((a+b)\overrightarrow{OC}+(b+c)\overrightarrow{OA}+(c+a)\overrightarrow{OB}\right)^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow [(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]R^2+2(a+b)(b+c)\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$
$$+2(b+c)(c+a)\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2(c+a)(a+b)\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow [(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]R^2+(a+b)(b+c)(2R^2-b^2)$$
$$+(b+c)(c+a)(2R^2-c^2)+(c+a)(a+b)(2R^2-a^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 4R^2\ge a^2(a+b)(a+c)+b^2(b+c)(b+a)+c^2(c+a)(c+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 4R^2\ge (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c}\le 4R^2.$$

Bài 4.

Ta có:

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{2}+\ldots+\frac{a_{2006}^2+a_1^2}{2}\ge\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_{2006}+a_1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2006}^2\ge b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{2006}^2$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{2006}^2\ge c_1^2+c_2^2+\ldots+c_{2006}^2\ge d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{2006}^2.$$

Suy ra $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2006}^2\ge d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{2006}^2$.

Do A = D (giả thiết) nên đẳng thức xảy ra. Từ đó suy ra:

$$a_1=a_2=\ldots=a_{2006}=1.$$

22

TRƯỜNG THPT MẠC ĐĨNH CHI, TP. HỒ CHÍ MINH

Bài 1.

Tìm nghiệm dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = \dfrac{2007}{x_1\, x_2} \\ x_2 + x_3 - x_4 = \dfrac{2007}{x_2\, x_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2006} + x_{2007} - x_1 = \dfrac{2007}{x_{2006}\, x_{2007}} \\ x_{2007} + x_1 - x_2 = \dfrac{2007}{x_{2007}\, x_1} \end{cases}$$

Bài 2.

Tìm giá trị của m, a, b sao cho phương trình $x^5 - mx - 33 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + ax + b = 0,$$

trong đó a và b là các số nguyên.

Bài 3.

Cho tam giác ABC. Gọi m_a ; m_b ; m_c lần lượt là độ dài ba đường trung tuyến và h_a ; h_b ; h_c lần lượt là độ dài ba đường cao từ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le 1 + \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Bài 4.

Cho tam giác ABC và O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Qua O kẻ ba đường thẳng phân biệt d_1 ; d_2 ; d_3, chúng lần lượt cắt hai cạnh AB, BC tại M, N ; cắt hai cạnh BC, CA tại P, Q và cắt hai cạnh CA, AB tại R, T. Gọi S_1 ; S_2 ; S_3 ; S lần lượt là diện tích các tam giác OPN ; ORQ ; OMT và ABC. Chứng minh : $\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3} \ge \dfrac{18}{S}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt $y_k = \dfrac{x_k}{\sqrt[3]{2007}}$, $k = \overline{1\,;\,2007}$. Vì $x_k > 0$ nên $y_k > 0$. Khi đó hệ phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = \dfrac{1}{y_1.y_2} \\ y_2 + y_3 - y_4 = \dfrac{1}{y_2.y_3} \\ y_{2006} + y_{2007} - y_1 = \dfrac{1}{y_{2006}.y_{2007}} \\ y_{2007} + y_1 - y_2 = \dfrac{1}{y_{2007}.y_1} \end{cases} \quad (*)$$

Ta thấy $y_1 = y_2 = ... = y_{2007} = 1$ là nghiệm của hệ phương trình (*). Ta chứng minh hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $y_1 = y_2 = ... = y_{2007} = 1$.

Ta có $y_k + y_{k+1} - y_{k+2} = \dfrac{1}{y_k.y_{k+1}}$ (1), $\forall k \in \{1;\ 2;\ ...;\ 2007\}$.

(Quy ước $y_{k+2007} = y_k$). Cộng tất cả các phương trình của hệ phương trình (*) vế theo vế ta được:

$$y_1 + y_2 + ... + y_{2007} = \frac{1}{y_1.y_2} + \frac{1}{y_2.y_3} + ... + \frac{1}{y_{2007}.y_1}. \quad (1)$$

Từ đó ta có nhận xét sau:

Nhận xét 1: Nếu $y_{k_o} > 1$ thì $y_{k_o+1} < 1$ (với $k_o \in \{1;\ 2;\ ...;\ 2007\}$)

Thật vậy: vì nếu $y_{k_o} \geq 1$ thì ta suy ra:

$$y_{k_o+2} = y_{k_o} + y_{k_o+1} - \frac{1}{y_{k_o}.y_{k_o+1}} > 1$$

Từ $y_{k_o} \geq 1$ và $y_{k_o+2} > 1 \Rightarrow y_{k_o+3} = y_{k_o+1} + y_{k_o+2} - \dfrac{1}{y_{k_o+1}.y_{k_o+2}} > 1$.

Cứ tiếp tục như vậy, suy ra:

$y_k > 1$, $\forall k \in \{1;\ 2;\ ...;k_o;\ k_o+2;\ ...;\ 2007\}$ và $y_{k_o+1} \geq 1$.

Từ (1) ta suy ra VT > 2007 và VP < 2007 (mâu thuẫn).

Với lập luận tương tự như nhận xét 1 ta có nhận xét 2 như sau:

Nhận xét 2 : Nếu $y_{k_o} < 1$ thì $y_{k_o+1} > 1$ (với $k_o \in \{1; 2; ...; 2007\}$).

Trở lại bài toán ta có:

Giả sử $\exists k_o \in \{1; 2; ...; 2007\}$ để cho $y_{k_o} > 1$

Theo nhận xét 1 và nhận xét 2 ta suy ra:

$$y_{k_o+1} < 1 \ ; \ y_{k_o+2} > 1 \ ; \ y_{k_o+3} < 1 \ ; \ y_{k_o+4} > 1 \ ; \ ... \ ; \ y_{k_o+2007} < 1$$

(mâu thuẫn vì $y_{k_o+2007} = y_{k_o}$).

Hoàn toàn tương tự ta suy ra được rằng không tồn tại

$$k_o \in \{1; 2; ...; 2007\} \text{ để cho } . \ y_{k_o} < 1$$

Vậy $y_1 = y_2 = ... = y_{2007} = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (*). Từ đó suy ra $x_1 = x_2 = ... = x_{2007} = \sqrt[3]{2007}$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.

Bài 2.

Vì phương trình $x^5 - mx - 3 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x + ax + b = 0$ nên đa thức $x^5 - mx - 3 = 0$ chia hết cho

$$x + ax + b = 0.$$

Thực hiện phép chia đa thức $x^5 - mx - 3 = 0$ cho $x + ax + b = 0$ ta được :

$$x^5 - mx - 3 = (x + ax + b)\left[x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + 2ab - a^3\right] +$$

$$+(a^4 - 3a^2b + b^2 - m)x + a^3b - 2ab^2 - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2b + b^2 - m = 0 & (1) \\ a^3b - 2ab - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow ab(a^2 - 2b) = 3$. (3)

Vì $a, b \in Z \Rightarrow a^2 - 2b \in Z$. Từ (3) $\Rightarrow$ a là ước số của 3.

Có 4 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $a = 1$.

(3) $\Leftrightarrow b(1 - 2b) = 3 \Leftrightarrow 2b^2 - b + 3 = 0$ phương trình vô nghiệm (loại).

+ Trường hợp 2: $a = -1$.

$$(3) \Leftrightarrow -b(1 - 2b) = 0 \Leftrightarrow 2b^2 - b - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.,$$

ở đây, ta loại $b = -1$. Từ (1) $\Rightarrow m = 5$.

+ Trường hợp 3: $a = 3$.

(3) $\Leftrightarrow 3b(9-2b)=3 \Leftrightarrow 2b^2-9b+1=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{9\pm\sqrt{73}}{4}$ (loại).

+ Trường hợp 4: $a=-3$.

(3) $\Leftrightarrow -3b(9-2b)=3 \Leftrightarrow 2b^2-9b-1=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{9\pm\sqrt{89}}{4}$ (loại).

Thử lại, ta thấy với $a=-1,\ b=-1,\ m=5$ thì:

$$x^2+ax+b=x^2-x-1$$

và $x^5-mx-3=x^5-5x-3=(x^2-x-1)(x^3+x^2+2x+3)$, suy ra phương trình $x+ax+b=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

và phương trình $x^5-mx-3=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x+ax+b=0$ (thoả mãn yêu cầu của đề bài).

Vậy $a=-1,\ b=-1,\ m=5$.

Bài 3.

Ta có :

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le 1+\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}} \quad (1)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{m_a}{h_a}+\dfrac{m_b}{h_b}+\dfrac{m_c}{h_c}\le 1+\dfrac{R}{r}$ (2) (vì $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\ \sin\dfrac{B}{2}\ \sin\dfrac{C}{2}$).

Nhân 2 vế của bất phương trình với $S_{\Delta ABC}$ ta được :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a\ m_a+\frac{1}{2}b\ m_b+\frac{1}{2}c\ m_c\le S_{\Delta ABC}+pR$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a\ (m_a-R)+\frac{1}{2}b\ (m_b-R)+\frac{1}{2}c\ (m_c-R)\le S_{\Delta ABC} \quad (3)$$

Ta có : $m_a-R=AM-OA\le OM$.

Tương tự : $m_b-R\le ON$

$m_c-R\le OP$.

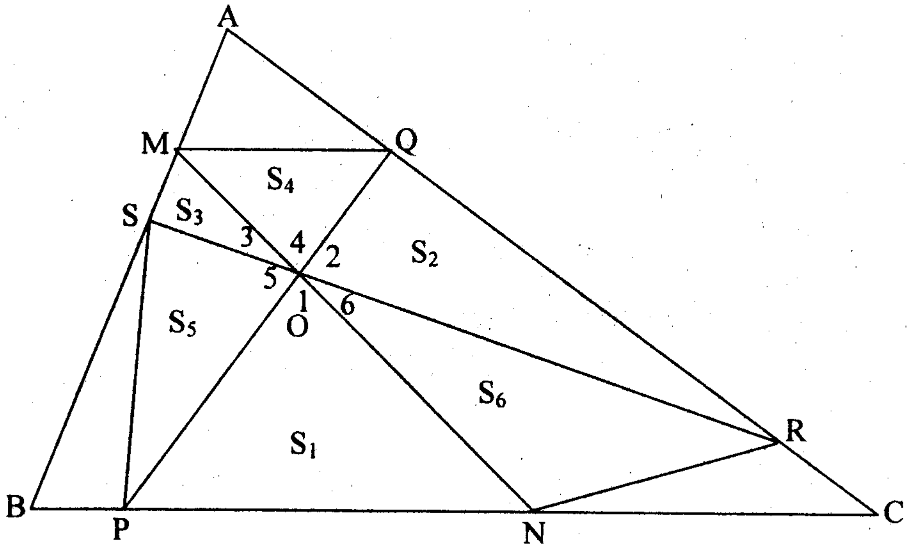
Từ (3) ta có :

$VT\le\dfrac{1}{2}a\ OM+\dfrac{1}{2}b\ ON+\dfrac{1}{2}c\ OP$

$\Leftrightarrow VT\le S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}=S_{ABC}=VP$.

Vậy (1) được chứng minh.

Bài 4.



Đặt: $S_4 = S_{\Delta OMQ}$, $S_5 = S_{\Delta OTP}$, $S_6 = S_{\Delta ORN}$

$$\Rightarrow S_4.S_5.S_6 = \frac{1}{8}OM.ON.OP.OQ.OR.OT.\sin O_4.\sin O_5.\sin O_6$$

$$= \frac{1}{8}OM.ON.OP.OQ.OR.OT.\sin O_1.\sin O_2.\sin O_3 = S_1.S_2.S_3$$

Ta có $\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}} = \dfrac{3}{\sqrt[6]{S_1S_2S_3S_4S_5S_6}}$

Mặt khác: $\sqrt[6]{S_1S_2S_3S_4S_5S_6} \leq \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6}{6} \leq \dfrac{S}{6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{18}{S}$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \dfrac{S}{6}$, hay

d_1; d_2; d_3 là 3 đường trung tuyến và O là trọng tâm của ΔABC.

23

TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN, TP. HỒ CHÍ MINH

Bài 1.

Cho tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC có độ dài là a. Chia BC thành 101 phần bằng nhau. Khi đó tam giác ABC được chia thành 101 tam giác nhỏ và tam giác ở chính giữa có góc tại đỉnh A bằng α. Gọi h là khoảng cách từ A đến BC. Chứng minh rằng $tg\alpha = \frac{101h}{2550a}$.

Bài 2.

Tìm tất cả các số thực m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z :

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=m-1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=m+1 \end{cases}. \quad (*)$$

Bài 3.

Tổng của m số dương chẵn khác nhau và n số dương lẻ khác nhau là 2001. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = 5m + 2n.

Bài 4.

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1 thì $\frac{13}{27} \le a^2+b^2+c^2+4abc < \frac{1}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Gọi AMN là tam giác ở chính giữa có diện tích là S, ta có

$BM = CN = \frac{50a}{101}$, $MN = \frac{a}{101}$ và $S = \frac{1}{2}MN.h = \frac{h.a}{202}$.

Gọi I là trung điểm BC. Trong tam giác AMN, ta có :

$AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \frac{MN^2}{2}$ với $AI = \frac{a}{2} \Rightarrow AM^2 + AN^2 = \frac{5101a^2}{10201}$

Vậy $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2S}{AM.AN}.\frac{2AM.AN}{AM^2+AN^2-MN^2} = \frac{101h}{2550a}$.

Bài 2.

Điều kiện : $x, y, z \ge 1$.

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})+(\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1})=2m \\ (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})+(\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1})=2 \end{cases}$$

Đặt $u=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1};\ v=\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1};\ w=\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}$.

Do $x, y, z \geq 1$ nên $u, v, w \geq \sqrt{2}$. Ngược lại nếu u, v, w $\geq \sqrt{2}$ ta có

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{u} \Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\left(u+\frac{2}{u}\right) \Rightarrow x=\frac{1}{4}\left(u+\frac{2}{u}\right)^2-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{4}\left(u^2+\frac{4}{u^2}\right)\geq 1.$$

Tương tự y, z ≥ 1. Vậy bài toán đã cho trở thành : Tìm tất cả các số thực m sao cho hệ sau có nghiệm u, v, w $\geq \sqrt{2}$: $\begin{cases} u+v+w=2a \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=1 \end{cases}$ (I)

Điều kiện cần:

Giả sử (I) có nghiệm (u, v, w). Theo BĐT Bu-nhi-a-cốp-ski, ta có:

$$2m=(u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\geq 9 \Rightarrow m\geq \frac{9}{2}.$$

Điều kiện đủ:

Giả sử $m\geq \frac{9}{2}$, ta chứng minh (I) có nghiệm. Lấy w = 3 (thỏa mãn $w\geq\sqrt{2}$).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2m-3 \\ uv=\dfrac{3(2m-3)}{2} \end{cases}.$$

Khi đó u, v là nghiệm pt $X^2-(2m-3)X+\frac{3(2m-3)}{2}=0$.

$$\Delta=(2m-3)(2m-9)\geq 0 \Rightarrow u,v=\frac{2m-3\pm\sqrt{(2m-3)(2m-9)}}{2}$$

Ta có $(2m-3)(2m-9)=h(h+6)<(h+3)^2<(h+6-2\sqrt{2})^2$,

$h=2m-9\geq 0 \Rightarrow 2m-3-2\sqrt{2}>\sqrt{(2m-3)(2m-9)} \Rightarrow u,v\geq\sqrt{2}$.

Như vậy (I) có nghiệm u, v, w $\geq \sqrt{2}$.

Tóm lại $m \ge \frac{9}{2}$ là tất cả các giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 3.

Tổng của m số dương chẵn khác nhau không bé hơn

$$2 + 4 + \dots + 2m = 2.\frac{m(m+1)}{2} = m^2 + m.$$

Tổng của n số dương lẻ khác nhau $\ge 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$.

Vì vậy từ giả thiết suy ra $2001 \ge m^2 + m + n^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \le 2001 + \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Ta có A = 5m + 2n =

$$5(m + \frac{1}{2}) + 2n - \frac{5}{2} \le \sqrt{(5^2 + 2^2)\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2\right]} - \frac{5}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le \sqrt{29\left(2001 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{5}{2} \Rightarrow A \le 238,407$ (3)

Vì m, n nguyên dương nên A = 5m + 2n là nguyên dương. Vì thế từ (3) ta có $A \le 238$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 5m + 2n = 238 \ (5) \\ m^2 + m + n^2 = 2001 \ (6) \end{cases}$

Giải (5) : $(m_0, n_0) = (0, 119)$ là một nghiệm riêng của (5).

Do đó (5) có vô số nghiệm (m, n) xác định bởi:

$$\begin{cases} m = 2t \\ n = 119 - 5t \end{cases} \quad (t \in Z)$$

Vì m, n > 0 nên ta có $\begin{cases} 2t > 0 \\ 119 - 5t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < \frac{119}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 23, t \in Z$.

Thay vào (6) ta được :

$4t^2 + 2t + (119 - 5t)^2 = 2001 \Leftrightarrow 29t^2 - 1188t + 12160 = 0$

$\Leftrightarrow t = 20$. Khi đó $\begin{cases} m = 40 \\ n = 19 \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 238 khi m = 40, n = 19.

Bài 4.

Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

Gọi S là diện tích tam giác, ta có:

$S=\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)}$ hay $16S^2=(1-2a)(1-2b)(1-2c)$ (1)

Vì $16S^2>0$ nên từ (1) suy ra:

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c)>0$$
$$\Leftrightarrow 1+4(ab+bc+ca)-8abc-2(a+b+c)>0$$
$$\Leftrightarrow -1+4(ab+bc+ca)-8abc>0$$
$$\Leftrightarrow -1+2\left[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right]-8abc>0$$
$$\Leftrightarrow 1-2(a^2+b^2+c^2)-8abc>0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$$

Chứng minh: T= $a^2+b^2+c^2+4abc\geq\frac{13}{27}$.

Ta dễ dàng chứng minh được:

$abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ (2)

Từ (2) ta có:

$$\Leftrightarrow abc\geq(1-2a)(1-2b)(1-2c)$$
$$\Leftrightarrow abc\geq 1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8abc$$
$$\Leftrightarrow 9abc\geq -1+4(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow abc\geq -\frac{1}{9}+\frac{4}{9}(ab+bc+ca)$$

Do đó:

$$T\geq(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-\frac{4}{9}+\frac{16}{9}(ab+bc+ca)=\frac{5}{9}-\frac{2}{9}(ab+bc+ca)$$

Mà $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ nên:

$$T\geq\frac{5}{9}-\frac{2}{27}(a+b+c)^2=\frac{13}{27}.$$

Dấu " =" xảy ra khi a = b = c =1/3.

24

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG, TỈNH TIỀN GIANG

Bài 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{a_1^8}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^2} + \frac{a_2^8}{\left(a_2^2+a_3^2\right)^2} + ... + \frac{a_n^8}{\left(a_n^2+a_1^2\right)^2},$$

với $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số dương và $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1 = K$ (K là hằng số).

Bài 2.

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = n^{2005} + n^{2006} + n^2 + n + 2$ là một số nguyên tố.

Bài 3.

1) Chứng minh rằng phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \qquad (*)$$

2) Gọi x_1 , x_2 , x_3 là ba nghiệm của phương trình (*) và ba điểm M_1, M_2, M_3 có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 nằm trên đường cong (C) có phương trình $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$. Chứng minh rằng gốc tọa độ O là trọng tâm của tam giác $M_1M_2M_3$.

Bài 4.

Chứng minh:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski:

$$\left(\frac{a_1^8}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^2} + \frac{a_2^8}{\left(a_2^2+a_3^2\right)^2} + ... + \frac{a_n^8}{\left(a_n^2+a_1^2\right)^2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{\left(\frac{a_1^4}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_2^4}{a_2^2+a_3^2}+...+\frac{a_n^4}{a_n^2+a_1^2}\right)^2}{n}=\frac{B^2}{n}.$$

Ta cũng có :

$$\left[\left(a_1^2+a_2^2\right)+\left(a_2^2+a_3^2\right)+...+\left(a_n^2+a_1^2\right)\right].\left(\frac{a_1^4}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_2^4}{a_2^2+a_3^2}+...+\frac{a_n^4}{a_n^2+a_1^2}\right)$$

$$\geq\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)^2$$

suy ra $B \geq \frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{2}$.

do đó: $A \geq \frac{\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)^2}{4n} \geq \frac{\left(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1\right)^2}{4n}=\frac{K^2}{4n}$

Vậy Min $A=\frac{K^2}{4n}$, đạt khi $a_1=a_2=...=a_n=\sqrt{\frac{K}{n}}$.

Bài 2.

Với $n = 0$ thì $A = 32$ là hợp số. Khi $n = 1$ thì $A = 42$ là hợp số.

Với $n > 1$ ta có:

$$A = (n^{2005} - n) + (n^{2006} - n^2) + n^2 + n + n^2 + n + 2$$
$$= n(n^{2004} - 1) + n^2 (n^{2004} - 1) + 2(n^2 + n + 1).$$

Do $n^{2004} - 1 = \left(n^3\right)^{668} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ nên $n^{2004} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$. Suy ra A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để A là số nguyên tố.

Bài 3.

1) Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Ta có : $f(-2).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 và $-2 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$.

2) Gọi $G(x_o, y_o)$ là trọng tâm tam giác $M_1M_2M_3$.

Theo định lí Vi-ét : $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_o = 0$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3.$$

Với $i = 1, 2, 3$ ta có :

$$x_i^3-3x_i+1=0 \Rightarrow x_i^4=x_i\left(3x_i-1\right)=3x_i^2-x_i$$

$$\Rightarrow x_1^4+x_2^4+x_3^4=3\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)=3\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)$$

Ta có: $y_1+y_2+y_3=\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4\right)-6\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4\left(x_1+x_2+x_3\right)+18$

$$= -3\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+18=0 .$$

Suy ra: $y_0=0$

Vậy $G \equiv O$ nên gốc O là trọng tâm tam giác $M_1M_2M_3$.

Bài 4.

Xét phương trình : Cos 4x = Cos 3x

$\Leftrightarrow \ (\cos x-1)\left(8\cos^3 x+4\cos^2 x-4\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ 8\cos^3 x+4\cos^2 x-4\cos x-1=0\end{array}\right.$

Nhận thấy : $t_1=2\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $t_2=2\cos\dfrac{4\pi}{7}$, $t_3=2\cos\dfrac{6\pi}{7}$

là 3 nghiệm của PT : $t^3+t^2-2t-1=0$.

Theo Viét : $\begin{cases} t_1+t_2+t_3=-1\\ t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3=-2\\ t_1t_2t_3=1\end{cases}$

Đặt : $A=\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}+\sqrt[3]{t_3}$

$B=\sqrt[3]{t_1t_2}+\sqrt[3]{t_2t_3}+\sqrt[3]{t_3t_1}$

Ta có : $A^3=3AB-4$ và $B^3=3AB-5$ suy ra

$A^3B^3=(3AB-4)(3AB-5)$

$\Rightarrow \ (AB-3)^3+7=0 \ \Rightarrow \ AB=3-\sqrt[3]{7}$

$\Rightarrow \ A^3=5-3.\sqrt[3]{7} \ \Rightarrow \ A=\sqrt[3]{5-3.\sqrt[3]{7}}.$

25

TRƯỜNG THPT THỊ XÃ CAO LÃNH, TỈNH ĐỒNG THÁP

Bài 1.

Đường phân giác trong và ngoài của góc C của tam giác ABC cắt đường thẳng AB ở L và M. Chứng minh rằng nếu CL = CM thì $AC^2+BC^2=4R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Bài 2.

Cho a, b, c > 0 . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^{2006}}+\frac{1}{b^{2006}}+\frac{1}{c^{2006}}\ge$$

$$\ge 4^{2006}\left(\frac{1}{(2a+b+c)^{2006}}+\frac{1}{(a+2b+c)^{2006}}+\frac{1}{(a+b+2c)^{2006}}\right)$$

Bài 3.

Cho tam giác ABC nhọn thoả điều kiện:

$$1+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$=2\cos A\cos B\cos C.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

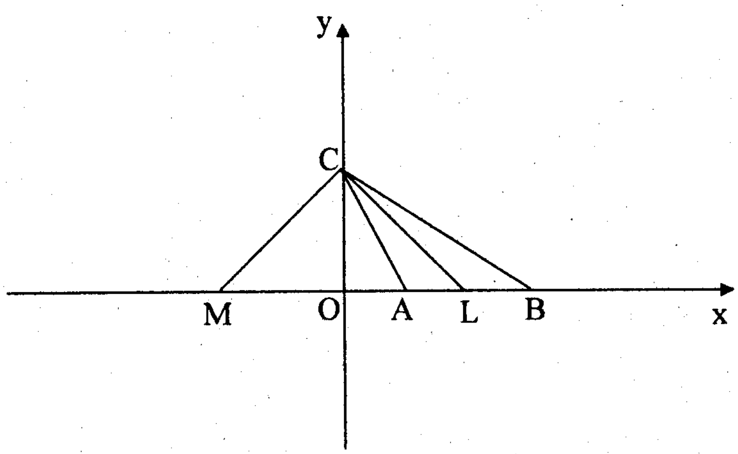
Bài 4.

Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x;y) của: $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Nếu CL = CM thì tam giác CML vuông cân (do CL vuông góc CM, theo tính chất hai đường phân giác của 1góc). Chọn hệ trục như hình vẽ (O trung điểm ML), O(0;0), A(a ; 0), B(b ; 0), C(0 ; c), L(c ; 0), M(–c ; 0).



Theo tính chất đường phân giác: $\frac{AL}{LB}=\frac{AC}{CB}$

$$\frac{AL^2}{LB^2}=\frac{AC^2}{CB^2}\Leftrightarrow\frac{(c-a)^2}{(b-c)^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}\Leftrightarrow b=\frac{c^2}{a}\Rightarrow B\left(\frac{c^2}{a};0\right)$$

$$AC^2 + BC^2 = (a^2 + c^2) + (c^2 + \frac{c^4}{a^2}) = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2 \quad (1)$$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ AI = BI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = BI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-c)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax - 2cy = a^2 - c^2 \\ x = \frac{a^2 + c^2}{2a} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a^2 + c^2}{2a}; c\right)$$

Từ đó : $4R^2 = 4CI^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2$ (2).

(1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 2.

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có:

$$\frac{1}{a^{2006}} + \frac{1}{b^{2006}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^{2006}} \cdot \frac{1}{b^{2006}}} \geq 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2006}} = \frac{2^{2007}}{(a+b)^{2006}} \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^{2006}} + \frac{1}{c^{2006}} \geq \frac{2^{2007}}{(b+c)^{2006}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^{2006}} + \frac{1}{a^{2006}} \geq \frac{2^{2007}}{(c+a)^{2006}} \quad (3)$$

Cộng (1)(2)(3) vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{a^{2006}} + \frac{1}{b^{2006}} + \frac{1}{c^{2006}} \geq 2^{2006}\left[\frac{1}{(a+b)^{2006}} + \frac{1}{(b+c)^{2006}} + \frac{1}{(c+a)^{2006}}\right] \quad (4)$$

Tương tự, áp dụng (4) cho ta:

$$A \geq 2^{2006}\left[\frac{1}{(a+b+b+c)^{2006}} + \frac{1}{(b+c+c+a)^{2006}} + \frac{1}{(c+a+a+b)^{2006}}\right] (5)$$

với $A = \frac{1}{(a+b)^{2006}} + \frac{1}{(b+c)^{2006}} + \frac{1}{(c+a)^{2006}}$.

Từ (4), (5) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3.

Đề đã cho được viết lại:

$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=\cos A\cos B\cos C$.

Ta chứng minh:

$$\left(\frac{1-\cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1-\cos B}{\cos B}\right)\left(\frac{1-\cos C}{\cos C}\right)\geq 1 \qquad (1)$$

Đặt: $x=\operatorname{tg}\frac{A}{2}, y=\operatorname{tg}\frac{B}{2}, z=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ (x,y,z>0)$.

Thế $\cos A=\frac{1-x^2}{1+x^2}, \cos B=\frac{1-y^2}{1+y^2}, \cos C=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ vào (1) ta được:

$$\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)\geq\frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tgAtgBtgC}\geq\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tgA}+\operatorname{tgB}+\operatorname{tgC}\geq\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tgA}+\operatorname{tgB}+\operatorname{tgC}\geq\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \qquad (2)$$

Tiếp theo: $0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \operatorname{tgx}+\operatorname{tgy}\geq 2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$.

Dấu = xảy ra khi x = y. Ta có:

$$\operatorname{tgA}+\operatorname{tgB}\geq 2\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$\operatorname{tgB}+\operatorname{tgC}\geq 2\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$$

$$\operatorname{tgA}+\operatorname{tgC}\geq 2\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}$$

Cộng vế theo vế ta được (2). Đẳng thức ở (2) xảy ra khi A = B = C. Vậy tam giác ABC thoả điều kiện đã cho là tam giác đều.

Bài 4.

Đề đã cho được viết lại: $y[2y^2+(x^2-3x)y+(x+3x^2)]=0$ (1)

Nếu y = 0 thì x bất kì thuộc **Z**.

Nếu $y\neq 0$: (1) $\Rightarrow 2y^2+(x^2-3x)y+(x+3x^2)=0$

$$\Delta=x(x^3-6x^2-15x-8)=x(x-8)(x+1)^2$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là :

$$x(x-8)=a^2 \Leftrightarrow (|x-4|-|a|)(|x-4|+|a|)=16$$

Do $\begin{cases} |x-4|+|a| \ge |x-4|-|a| \\ |x-4|+|a|+|x-4|-|a| = 2|x-4| \end{cases}$ nên ta có các trường hợp :

1) $\begin{cases} |x-4|+|a|=16 \\ |x-4|-|a|=1 \end{cases} \Rightarrow |x-4| = 8,5$ (loại)

2) $\begin{cases} |x-4|+|a|=8 \\ |x-4|-|a|=2 \end{cases} \Rightarrow |x-4|=5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1 \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} |x-4|+|a|=4 \\ |x-4|-|a|=4 \end{cases} \Rightarrow |x-4|=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=0 \end{array}\right.$

Thay vào phương trình, ta có các nghiệm nguyên là

$(t; 0)$ $(t \in \mathbf{Z})$,

$(9; -6)$, $(9; -21)$, $(-1; -1)$, $(8; -10)$.

26

TRƯỜNG THPT TX SA ĐÉC, TỈNH ĐỒNG THÁP

Bài 1.

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x^2+xy)(y+2z) = \dfrac{1}{8} \\ x^2+y^2+3xy+4xz+2yz = -\dfrac{3}{4} \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad (x<0<y,z).$$

Bài 2.

Tìm những cặp số nguyên (x, y) thoả phương trình:

$$x^3-3x^2+3(y^3+1)x-(y^3+1)^2=0.$$

Bài 3.

Cho tam giác ABC, gọi m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các góc có đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, đường tròn này tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại K, L, M tương ứng. Qua B kẻ đường thẳng song song với MK, đường thẳng này cắt LM, LK tại S và R.

Chứng minh góc RIS là góc nhọn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt $u = x$, $v = x + y$, $t = y + 2z$ suy ra $u < v < t$.

$$\Rightarrow \begin{cases} uvt = \frac{1}{8} \\ uv + vt + tu = \frac{-3}{4} \\ u + v + t = 0 \end{cases} \Rightarrow u, v, t \text{ là nghiệm phương trình: } 4X^3 - 3X = \frac{1}{2}$$

Đặt $X = \cos\alpha \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$ $(0 < \alpha < \pi)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ vì } u < v < t$$

$$\Rightarrow u = \cos\frac{7\pi}{9} \quad v = \cos\frac{5\pi}{9} \quad t = \cos\frac{\pi}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos\frac{7\pi}{9} \\ y = \cos\frac{5\pi}{9} - \cos\frac{7\pi}{9} \\ z = \cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{5\pi}{9} - \cos\frac{7\pi}{9} = -\cos\frac{5\pi}{9} \end{cases}$$

Vậy:

$$\begin{cases} x = \cos\dfrac{7\pi}{9} \\ y = \cos\dfrac{5\pi}{9} - \cos\dfrac{7\pi}{9} \\ z = -\cos\dfrac{5\pi}{9} \end{cases}$$ là ba nghiệm cần tìm.

Bài 2.

TH1 : Nếu $y = -1$ thì ta được phương trình:

$$x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 3$$

Vậy $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

TH2 : Nếu $y \neq -1$ thì nhân 2 vế phương trình cho $(y^3 + 1) \neq 0$:

$$(y^3 + 1) x^3 - 3x^2 (y^3 + 1) + 3(y^3 + 1)^2x - (y^3+1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3 + (x-y^3-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow yx = y^3 + 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^3+1}{y+1} = y^2 - y + 1$$

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} ; \begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y \in Z \end{cases}$$

Bài 3.

Ta có:

$$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Do đó:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = \frac{S^2}{(p-a)^2} + \frac{S^2}{(p-b)^2} + \frac{S^2}{(p-c)^2}$$

$$= p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a} + \frac{(p-a)(p-c)}{p-b} + \frac{(p-b)(p-a)}{p-c}\right]$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Đặt $\begin{cases} x = p - a \\ y = p - b \\ z = p - c \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} x + y = c \\ x + z = b \\ y + z = a \end{cases}$ và $x + y + z = p$.

Ta cần chứng minh:

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right) \geq \frac{3}{4}\left[(y+z)^2+(x+z)^2+(x+y)^2\right].$$

Ta có:

$$x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y^2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \geq 2(x^2+y^2+z^2)$$

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right) \geq 2\left[x^2+y^2+z^2\right]+xy+yz+xz$$

Theo bất đẳng thức Cô–si:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{1}{2}(xy+yz+xz)$$

Do đó:

$$VT \geq \frac{3}{2}\left[x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz\right] = \frac{3}{4}\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2\right]$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z \Rightarrow a = b = c$, hay tam giác ABC đều.

Bài 4.

Dễ thấy BI là trục đối xứng của MK hay $BI \perp MK \Rightarrow BI \perp RS$.

Trong ΔBKR, ta có:

$$\widehat{BRK} = \frac{C}{2}+\frac{B}{2},\ \widehat{BKR} = 90^0 - \frac{C}{2} \Rightarrow BR = \frac{BK\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

Tương tự như vậy : $BS = \dfrac{BM\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$.

$BR.BS = BM.BK = BK^2$

$\Rightarrow IR^2 + IS^2 - RS^2 = 2BI^2 + BR^2 + BS^2 - (BR+BS)^2$

$= 2(BI^2 - BR.BS) = 2(BI^2 - BK^2) = 2KI^2 > 0.$

Theo định lí cosin, ta suy ra $\widehat{RIS} < 90^0$.

27

TRƯỜNG THPT BẾN TRE, TỈNH BẾN TRE

Bài 1.

Cho tam giác ABC có các góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAC, OAB ; p là nửa chu vi của tam giác ABC. Chứng minh :

$$R_1R_2R_3 \geq \frac{729R^7}{16p^4}.$$

Bài 2.

Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 6x^2.\sqrt{x^3-6x+5} = (x^2+2x-6)(x^3+4) & (1) \\ x+\dfrac{2}{x} \geq 1+\dfrac{2}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Bài 3.

Giải phương trình : $3\left[1+\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}\right]^4 + 4tg^6x = 7$.

Bài 4.

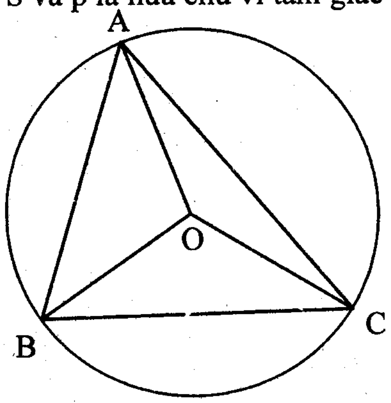
Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$2x^7+5x^4y^2+7x^4-2x^3y-5y^3-7y = 2006.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt BC = a , AC = b , AB = c , S_{ABC} = S và p là nửa chu vi tam giác ABC.



Ta có: $S_{OBC} = \dfrac{OB.OC.BC}{4R_1} = \dfrac{R^2a}{4R_1}$

$\Rightarrow R_1 = \dfrac{a.R^2}{4S_{OBC}}$

Tương tự: $R_2 = \dfrac{b.R^2}{4S_{OAC}}$; $R_3 = \dfrac{c.R^2}{4S_{OAB}}$

$$\Rightarrow R_1R_2R_3 = \frac{R^6.abc}{64.S_{OBC}.S_{OAC}.S_{OAB}} \geq \frac{R^6abc}{64\left(\frac{S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow R_1R_2R_3 \geq \frac{27R^6abc}{64S^3} = \frac{27R^7}{16S^2}$$

Mà $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{P^4}{27}$

nên: $R_1R_2R_3 \geq \dfrac{729R^7}{16p^4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 2.

Từ (2) ta suy ra: $x+\dfrac{2}{x}>1 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x^3+4>0$. Do đó:

$$x^2+2x-6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>-1+\sqrt{7} \\ x<-1-\sqrt{7} \end{array}\right. \Rightarrow x>\sqrt{7}-1$$

Kết hợp điều kiện $x^3-6x+5\geq 0$ ta được:

$$x \geq \frac{-1+\sqrt{21}}{2}. \quad (3)$$

Khi đó ta lần lượt có các nhận xét sau:

$$\sqrt{x^3-6x+5} = \sqrt{(x-1)(x^2+x-5)} \leq \frac{1}{2}\left(x-1+x^2+x-5\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+2x-6\right)$$

$$x^2 = \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2}.\frac{x^3}{2}.4} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+4\right) = \frac{1}{3}(x^3+4),$$

từ đó ta suy ra:

$$6x^2\sqrt{x^3-6x+5} \leq (x^2+2x-6)(x^3+4).$$

Vậy (1) tương đương với:

$$\begin{cases} x-1=x^2+x-5 \\ \dfrac{x^3}{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, \text{ thỏa mãn (2).}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x=2$.

Bài 3.

Đặt $u = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 1$ và $v = tg^2 x$.

Phương trình có dạng: $3u^4 + 4v^3 = 7$. Ta có:

$$u + v = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + (1 + tg^2 x) = \frac{\cos 2x + 1}{\cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\begin{cases} u^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4u \\ v^3 + 1 + 1 \quad \geq 3v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(u^4 + 3) \geq 12u \\ 4(v^3 + 2) \geq 12v \end{cases} \Rightarrow 3u^4 + 4v^3 \geq 7$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 = 1 \\ v^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow v = 1 \Leftrightarrow tgx = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 4.

Phương trình đã cho tương đương:

$(x^4 - y).(5y^2 + 2x^3 + 7) = 1.2.17.59$

Do $(x^4 - y) > 0 \Rightarrow x \geq 2$

$\Rightarrow 5y^2 + 2x^3 + 7 \geq 5 + 16 + 7 = 28$

$\Rightarrow (x^4 - y) \in \{1; 2; 17; 34; 59\}$

Nếu $x = 2$ thì $\left[\begin{array}{l} 16 - y = 1 \\ 16 - y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 15 \\ y = 14 \end{array}\right.$

Chỉ có cặp (2 ; 14) thỏa phương trình.

Nếu $x \geq 3$:

$59 \geq (x^4 - y) \geq (81 - y) \Rightarrow y \geq 22$

$5y^2 + 2x^3 + 7 > 2006$: không thỏa phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (2 ; 14).

28

TRƯỜNG THPT LƯU VĂN KIỆT, TỈNH VĨNH LONG

Bài 1.

a) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình:

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49).$$

b) Tìm các giá trị nguyên dương khác nhau $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1.$$

Bài 2.

a) Giả sử phương trình $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0$ có nghiệm.
Chứng minh : $b^2 + (c - 2)^2 > 3$.

b) Giải phương trình : $x^3 + 3x - 3 = 0$.

Bài 3.

Tìm các hàm số f(x) và g(x) xác định bởi hệ sau :

$$\begin{cases} f(x-1) + g(2x+1) = 2x \\ f(2x+2) + 2g(4x+7) = x - 1 \end{cases}.$$

Bài 4.

a) Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong (O, R). Vẽ Ax vuông góc AD cắt BC tại E, vẽ Ay vuông góc AB cắt CD tại F. Chứng minh EF qua O.

b) Cho tam giác ABC cố định, vẽ hình thoi BCDE. Từ D, E vẽ đường vuông góc AB và AC, các đường này cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích điểm M.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki :

$$\left[1.x^2 + 4.(y^2+7)\right]^2 \le (1^2 + 4^2)\left[x^4 + (y^2+7)^2\right]$$

$$\le 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49).$$

Do đó $4x^2 = y^2 + 7 \Leftrightarrow (2x + y)(2x - y) = 7$.

Vì $x, y \in N$ nên $2x + y \ge 2x - y \ge 0$.

Ta có $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$. Vậy $S=\{(2,3)\}$.

b) Ta có $x_1, x_2, \ldots, x_n$ không bé hơn 2 nên:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2} \le \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$< 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} < 1$$

Vậy $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2} < 1$.

Do đó, không có các giá trị nguyên dương khác nhau thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2} = 1.$$

Bài 2.

a) Ta có $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+b(x+\frac{1}{x})+c=0$$

Ta có $t^2+bt+c-2=0$ với $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ và $|t|\ge 2$

$$\Leftrightarrow t^2=(2-c)-bt$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki:

$$t^4=[(2-c).1-b.t]^2 \le [(2-c)^2+b^2](t^2+1)$$

$$\frac{t^4}{t^2+1} \le (2-c)^2+b^2$$

Mà $x^2+\frac{1}{x^2} \ge 2 \Rightarrow t^2 \ge 4 \Rightarrow t^4 \ge 16$ nên

$$t^4-3(t^2+1)=t^4-3t^2-3 \ge 16-12-31>0$$

$$t^4>3(t^2+1) \Leftrightarrow \frac{t^4}{t^2+1}>3$$

Vậy : $b^2 + (c-2)^2 > 3$.

b) Đặt $x=y-\frac{1}{y}$

Ta được $(y-\frac{1}{y})^3-3(y-\frac{1}{y})-3=0 \Leftrightarrow y^3-\frac{1}{y^3}-3=0$.

Đặt $t = y^3$, ta có $t - \frac{1}{t} - 3 = 0$

$$t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13}) \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})}$$

Vậy $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})} - \sqrt[3]{\frac{2}{3 \pm \sqrt{13}}}$.

Bài 3.

Đặt $x - 1 = 2u + 2 \Rightarrow x = 2u + 3, 2x = 4u + 6$

$$f(x-1) + g(2x+1) = 2x \Rightarrow f(2u+2) + g(4u+7) = 4u + 6$$

$$\Rightarrow f(2x+2) + g(4x+7) = 4x + 6$$

Khi đó ta có $\begin{cases} f(2x+2) + g(4x+7) = 4x + 6 \\ f(2x+2) + 2g(4x+7) = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2x+2) = 7x + 13 \\ g(4x+7) = -3x - 7 \end{cases}$

Đặt $u = 2x + 2 \Rightarrow x = \frac{u-2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{2}x + 6$

Đặt $t = 4x + 7 \Rightarrow x = \frac{t-7}{4} \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

Bài 4.

a) Thực hiện $Đ_{EF}$: $A \mapsto M$

Chứng minh $M \in (O)$.

Ta có:

$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^0$

mà $\widehat{EAF} + \widehat{BAD} = 180^0$ nên

$\widehat{BCD} = \widehat{EAF}$

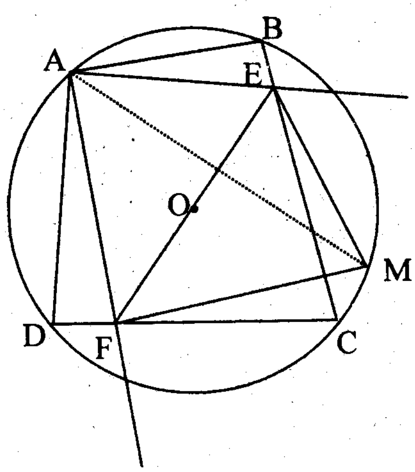
Vì $\widehat{EAF} = \widehat{EMF}$ nên $\widehat{BCD} = \widehat{EMF}$

Suy ra tứ giác EFCM nội tiếp, suy ra:

$\widehat{MCE} = \widehat{MFE}$,

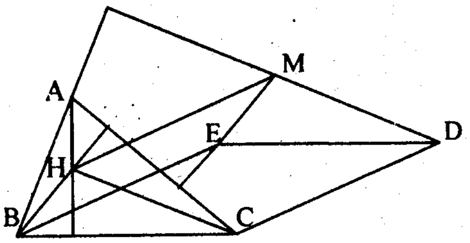
$\widehat{MFE} = \widehat{EFA}$

$\widehat{EFA} = \widehat{MAB}$.



Do đó $\widehat{MCE} = \widehat{MAB} \Rightarrow$ ABMC nội tiếp, suy ra EF nằm trên đường kính hay EF qua O.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, đặt BC = a.



$\Delta HBC = \Delta MED \Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DM}$

$T_{\overrightarrow{CH}} : D \mapsto M$, mà $D \in (C, a)$ nên $M \in (H, a)$.

29

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM, TỈNH VĨNH LONG

Bài 1.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + 27xy + 2009 = y^3$.

Bài 2.

Chứng minh rằng tổng các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\cot g^3 x}{\cot g 3x}$ là một số hữu tỉ, trong đó $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 3.

Cho ABC tam giác nhọn. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} + \frac{\cos C \cos A}{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)} + \frac{\cos A \cos B}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \le \frac{3}{4}.$$

Bài 4.

Cho tam giác bất kì ABC. Trên ba cạnh của nó dựng ba tam giác đều, sao cho mỗi tam giác đều đó nằm khác phía với tam giác ABC với cạnh chung. Gọi Δ là tam giác có các đỉnh là tâm của các tam giác đều đó. Tương tự trên ba cạnh của tam giác ABC dựng ba tam giác đều sao cho mỗi tam giác đều nằm cùng phía với tam giác ABC đối với cạnh chung. Gọi Δ' là tam giác có các đỉnh là tâm của các tam giác đều vừa dựng. Chứng minh rằng $S_{ABC} = S_{\Delta} - S_{\Delta'}$.

Bài 5.

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}} \le 1.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt $y = x + a$, $a \in \mathbb{Z}$. Phương trình trở thành:

$$(27-3a)x^2 + (27a - 3a^2)x - a^3 + 2009 = 0 \quad (*)$$

Điều kiện để (*) có nghiệm là:

$$(27a - 3a^2)^2 - 4(27-3a)(-a^3 + 2009) \geq 0$$

hay $-3(a-14)(a-9)(a^2 + 41a + 574) \geq 0$.

Vì $a^2 + 41a + 574 > 0$ với mọi a nên $9 \leq a \leq 14$.

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

Khi $a = 9$, ta được phương trình $1280 = 0$ (vô nghiệm). Tương tự, khi cho a lần lượt nhận các giá trị 10, 11, 12, 13, phương trình đều vô nghiệm.

Khi $a = 14$, ta được phương trình:

$$-15x^2 - 210x - 735 = 0 \Leftrightarrow x = -7.$$

Với $a = 14$, $x = -7$, suy ra $y = 7$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên duy nhất là $(-7, 7)$.

Chứng minh rằng tổng các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\cot g^3 x}{\cot g 3x}$ là một số hữu tỉ, trong đó $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 2.

Ta có $y = \dfrac{3tgx - tg^3x}{(1 - 3tg^2x)tg^3x} = \dfrac{3 - tg^2x}{(1 - 3tg^2x)tg^2x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{6}\right).$

Đặt $t = tg^2x$, ta được phương trình $3yt^2 - (y+1)t + 3 = 0 (1)$

Phương trình (1) có nghiệm khi:

$(y+1)^2 - 36y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 34y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 17 - 12\sqrt{2} \leq y \leq 17 + 12\sqrt{2}$

Suy ra $y_{min} = 17 - 12\sqrt{2}$ khi $t = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow tgx = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8}$

$y_{max} = 17 + 12\sqrt{2}$ khi $t = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow tgx = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{8}$.

Vậy $y_{min} + y_{max} = 34$ là số hữu tỉ.

Bài 3.

Vì ABC là tam giác nhọn nên $\cos A > 0,\ \cos B > 0,\ \cos C > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được

$$\frac{2\cos B\cos C}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{4\cos B\cos C}{\cos B+\cos C}.\sin\frac{A}{2}$$

$$\le 2\sqrt{\cos B\cos C}.\sin\frac{A}{2} \le \left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right).$$

Chứng minh tương tự, được

$$\frac{2\cos C\cos A}{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)} \le \left(\cos C\cos A+\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\frac{2\cos A\cos B}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \le \left(\cos A\cos B+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta thu được bất đẳng thức

$$2\left[\frac{\cos B\cos C}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}+\frac{\cos C\cos A}{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}+\frac{\cos A\cos B}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}\right] \le \left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+$$

$$+\left(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\right) \le \frac{1}{3}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[3-\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\right] \le$$

$$\le \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)+\frac{1}{2}\left[3-\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\right] = \frac{3}{2}.$$

Vậy $\dfrac{\cos B\cos C}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}+\dfrac{\cos C\cos A}{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}+\dfrac{\cos A\cos B}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \le \dfrac{3}{4}.$

Bài 4.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta,\ \Delta'$ là những tam giác đều.

Đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$. Xét tam giác O_1AO_2 ta có:

$$O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2 - 2O_1A.\cos\widehat{O_1AO_2}$$

$$=\left(c\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-2.c\frac{\sqrt{3}}{3}.b\frac{\sqrt{3}}{3}.\cos\left(\alpha+60^0\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[c^2+b^2-2bc.\cos\left(\alpha+60^0\right)\right].$$

Vậy $S_\Delta=\frac{\sqrt{3}}{4}.O_1O_2^2=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(c^2+b^2-2bc.\cos\left(\alpha+60^0\right)\right)$.

Tương tự, ta chứng minh được:

$$S_{\Delta'}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(c^2+b^2-2bc.\cos\left(\alpha-60^0\right)\right).$$

Suy ra:

$$S_\Delta-S_{\Delta'}=\frac{\sqrt{3}}{12}.2bc.\left[\cos\left(\alpha-60^0\right)-\cos\left(\alpha+60^0\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}bc.2\sin 60^0.\sin\alpha=S_{ABC}.$$

Bài 5.

Ta có:

$$\sqrt[3]{\left(a^6+b^6\right)\left(a^3+c^3\right)^2}=\sqrt[3]{\left(a^6+b^6\right)\left(a^6+2a^3c^3+c^6\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(a^{12}+2a^3b^6c^3\right)+\left(2a^9c^3+b^6c^6\right)+\left(a^6b^6+a^6c^6\right)}\geq$$

$$\geq\sqrt[3]{a^6b^6+3a^6b^4c^2+3a^6b^2c^4+a^6c^6}=\sqrt[3]{\left(a^2b^2+a^2c^2\right)^3}=\left(a^2b^2+a^2c^2\right).$$

Suy ra:

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{\left(a^6+b^6\right)\left(a^3+c^3\right)^2}}\leq\frac{a^4}{a^4+a^2b^2+a^2c^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{\left(b^6+c^6\right)\left(b^3+a^3\right)^2}}\leq\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{\left(c^6+a^6\right)\left(c^3+b^3\right)^2}}\leq\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta thu được bất đẳng thức:

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{\left(a^6+b^6\right)\left(a^3+c^3\right)^2}}+\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{\left(b^6+c^6\right)\left(b^3+a^3\right)^2}}+$$

$$+\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{\left(c^6+a^6\right)\left(c^3+b^3\right)^2}}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1.$$

30

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG, TP. CẦN THƠ

Bài 1.

Giải phương trình $|2005-x|^{2006}+|2006-x|^{2005}=1$.

Bài 2.

Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\max\{A,B,C\}\ge\frac{\pi}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$.

Bài 3.

Cho tập hợp A gồm các số tự nhiên có 2006 chữ số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(j) Mỗi số tự nhiên của A không có số 0 trong các chữ số của nó,

(jj) Nếu $a=\overline{a_1a_2...a_{2006}}$ thuộc A thì $b=\overline{b_1b_2...b_{2006}}$, trong đó, $b_i\equiv 3a_i$ (mod10) ($i=\overline{1,2006}$) cũng thuộc A và $\sum_{i=1}^{2006}a_i=\sum_{i=1}^{2006}b_i$.

1) Chứng minh rằng tổng các chữ số của mỗi số tự nhiên của A luôn bằng một hằng số.

2) Tìm số tự nhiên bé nhất của tập A.

Bài 4.

Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích S không đổi nội tiếp đường tròn (O) và sao cho tâm O luôn nằm trong tứ giác ấy. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD; M, N, P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng của I qua các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Xác định giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác MNPQ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Nhận xét rằng phương trình có các nghiệm là:

$x = 2005$ và $x = 2006$.

Nếu $x > 2006$, thì phương trình vô nghiệm vì:

$2005 - x < -1$ nên VT > 1.

Nếu $x < 2005$, thì phương trình vô nghiệm vì:

$2006 - x > 1$ nên VT > 1.

Nếu $2005 < x < 2006$, thì $0 < |2005 - x| < 1$, $0 < |2006 - x| < 1$,

do đó $|2005 - x|^{2006} < |2005 - x| = x - 2005$,

$|2006 - x|^{2005} < |2006 - x| = 2006 - x$, suy ra VT < 1.

Bài 2.

Ta biến đổi biểu thức T về dạng $T = \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}$.

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABC: $T = \dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $c = \max\{a,b,c\}$

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ge a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow \sqrt{ab} \le \dfrac{c}{\sqrt{2}}$

$$T = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a+b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) \ge 2 + 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} + 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}}$$

$$\ge 4 + 3\sqrt[3]{\frac{2c\sqrt{ab}}{ab}} \ge 4 + 3\sqrt{2}\ (2,5).$$

Vậy $T_{min} = 4 + 3\sqrt{2}$ khi và chỉ khi ΔABC vuông cân.

Bài 3.

1) Xét các số sau đây của tập A: $a = \overline{a_1a_2...a_{2006}}$, với $\sum_{i=1}^{2006} a_i = S$

$b = \overline{b_1b_2...b_{2006}}$, với $b_i \equiv 3a_i \pmod{10}$

$c = \overline{c_1c_2...c_{2006}}$, với $c_i \equiv 3c_i \pmod{10}$

$d = \overline{d_1d_2...d_{2006}}$, với $d_i \equiv 3c_i \pmod{10}$ $(i = \overline{1,2006})$

Theo giả thiết ta có $\sum_{i=1}^{2006} a_i = \sum_{i=1}^{2006} b_i = \sum_{i=1}^{2006} c_i = \sum_{i=1}^{2006} d_i = S$.

Vì $1 \le a_i \le 9$ $(i = \overline{1,2006})$ nên bằng phương pháp thử trực tiếp ta có:

$$a_i + b_i + c_i + d_i = 20$$

Từ đó:

$$4S = \sum_{i=1}^{2006} a_i + \sum_{i=1}^{2006} b_i + \sum_{i=1}^{2006} c_i + \sum_{i=1}^{2006} d_i$$

$$= \sum_{i=1}^{2006} (a_i + b_i + c_i + d_i) = 20 \times 2006$$

Suy ra: S = 10.030 (đpcm).

2) Xét số tự nhiên $a = \overline{a_1a_2...a_{2006}}$, trong đó:

$a_1 = a_2 = \ldots = a_{1003} = 1$ và $a_{1004} = a_{1005} = \ldots = a_{2006} = 9$.

Rõ ràng $a \in A$. Ta chứng minh a là số tự nhiên bé nhất của A.

Thật vậy, giả sử $\exists c \in A$ thỏa $c \le a$ và $c = \overline{c_1c_2...c_{2006}}$

Khi đó, do $c \le a$, $\forall c_i \ne 0$ $(i = \overline{1,2006})$ nên $c_1 = c_2 = \ldots = c_{1003} = 1$

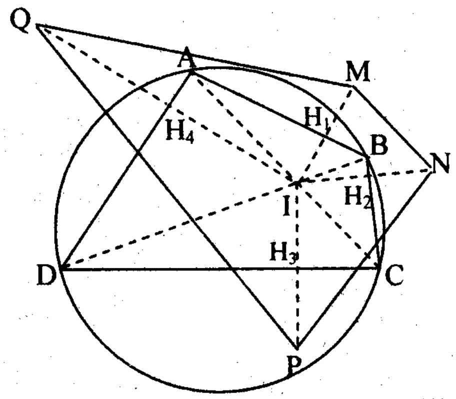
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2006} c_i = \sum_{i=1}^{1003} c_i + \sum_{i=1004}^{2006} c_i = 10.030 \text{ (theo câu 1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1004}^{2006} c_i = 10.030 - 1003 = 1003 \times 9$$

$$\Rightarrow c_i = 9 \ (i = \overline{1004,2006}) \Rightarrow c = a \text{ (đpcm)}.$$

Bài 4.

Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Do O nằm trong tứ giác ABCD nên H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt thuộc các đoạn AB, BC, CD, DA.



Ta có:

$$S_{\Delta MIN} = \frac{1}{2} IM.IN.\sin\widehat{MIN} = 2.IH_1.IH_2.\sin B \quad (1)$$

$$IH_1.IH_2 = \frac{4.S_{\Delta AIB}.S_{\Delta BIC}}{AB.BC} \le \frac{(S_{\Delta AIB} + S_{\Delta BIC})^2}{AB.BC} = \frac{S^2_{\Delta ABC}}{AB.BC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}.\sin B \quad (2)$$

(1) và (2) $\Rightarrow$ $S_{\Delta MIN} \le S_{\Delta ABC}.\sin^2 B \le S_{\Delta ABC}$.

Tương tự: $S_{\Delta NIP} \le S_{\Delta BCD}$

$S_{\Delta PIQ} \le S_{\Delta CDA}$

$S_{\Delta QIM} \le S_{\Delta DAB}$

Từ đó:

$S_{MNPQ} = S_{\Delta MIN} + S_{\Delta NIP} + S_{\Delta PIQ} + S_{\Delta QIM}$

$\leq S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD} + S_{\Delta CDA} + S_{\Delta DAB} = 2S.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} S_{\Delta AIB} = S_{\Delta BIC} = S_{\Delta CID} = S_{\Delta DIA} \\ \sin A = \sin B = \sin C = \sin D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD là hình chữ nhật.}$$

Vậy $\max S_{MNPQ} = 2S$, đạt được khi ABCD là hình chữ nhật.

31

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẠC LIÊU, TỈNH BẠC LIÊU

Bài 1.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2 \quad (1)$$

Bài 2.

Giải phương trình

$$(16\cos^4 x + 3)^4 = 2048\cos x - 768 \quad (*)$$

Bài 2.

Cho x, y, z là ba số thực dương thoả x + y + z = 1. Tìm GTLN của

$$P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{\sqrt{xyz}}{z+xy}.$$

Bài 4.

Cho $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn tâm I, có BC = a ; CA = b ; Ab = c. Chứng minh rằng

$$\frac{A.IB.IC}{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt $t = x + 4$, ta có $(1) \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 - 16) = y^2$ (2)

Lại đặt $u = t^2 - \frac{25}{2}$, $2u \in Z$, (2) $\Rightarrow$ $(2u + 2y)(2u - 2y) = 49$.

* Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2u + 2y = 49 \\ 2u - 2y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u + 2y = 1 \\ 2u - 2y = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u = 25 \\ y = 12 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u = 25 \\ y = -12 \end{cases}$$

$2u = 25 \Rightarrow t = \pm 5 \Rightarrow x = 1$ hay $x = -9$

Từ đó, $(x, y) = (1; \pm 12), (-9; \mp 12)$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2u + 2y = -49 \\ 2u - 2y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u + 2y = -1 \\ 2u - 2y = -49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u = -25 \\ y = -12 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u = -25 \\ y = 12 \end{cases}$$

$2u = -25 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow (x; y) = (-4; \pm 12)$.

Trường hợp 3:

$$\begin{cases} 2u + 2y = 7 \\ 2u - 2y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u + 2y = -7 \\ 2u - 2y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u = 7 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u = -7 \\ y = 0 \end{cases}$$

$2u = 7 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = \pm 4$

$\Rightarrow x = 0$ hay $x = -8$

$2u = -7 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3$

$\Rightarrow x = -1$ hay $x = -7$

$\Rightarrow (x, y) = (0,0), (-1,0), (-7,0), (-8;0)$

Tóm lại, phương trình có các nghiệm nguyên là:

$(0; 0)$, $(-1; 0)$, $(-7; 0)$, $(-8; 0)$, $(1; 12)$, $(1; -12)$,

$(-4; -12)$, $(-4; -12)$, $(-9; 12)$, $(-9; -12)$.

Bài 2.

Đặt $u = 2\cos x$, điều kiện : $|u| \le 2$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow (u^4 + 3)^4 = 4^4(4u - 3)$

$\Leftrightarrow u^4 + 3 = 4\sqrt[4]{4u - 3}$ với $u \ge \dfrac{3}{4}$

Đặt $v = \sqrt[4]{4u - 3}$ với $v \ge 0$. Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} u^4 + 3 = 4v \quad (1) \\ v^4 + 3 = 4u \quad (2) \end{cases}$$

Lấy pt (1) trừ pt (2) vế theo vế:

$u^4 - v^4 = 4(v - u) \Leftrightarrow (u - v)[(u + v)(u^2 + v^2) + 4] = 0$

$\Leftrightarrow u = v$ (do $u \ge \dfrac{3}{4}$ và $v \ge 0$)

Khi $u = v$ khi đó (2) $\Leftrightarrow u^4 + 3 = 4u$

$$\Leftrightarrow (u - 1)^2 (u^2 + 2u + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u^2 + 2u + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$u = 1 \Leftrightarrow 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z.$$

Bài 3.

$$P = \frac{1}{1+\frac{yz}{x}} + \frac{1}{1+\frac{xz}{y}} + \frac{\sqrt{\frac{xy}{z}}}{1+\frac{xy}{z}}.\ \text{Đặt}\ \frac{yz}{x} = \text{tg}^2\frac{A}{2},\quad \frac{zx}{y} = \text{tg}^2\frac{B}{2}\quad \text{với} \begin{cases} 0 < A < \pi \\ 0 < B < \pi \end{cases}$$

Ta có:

$$1 = x + y + z = \sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{xz}{y}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{yz}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy}}{z}\left(\sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}\right) = 1 - \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{yz}{x}} \Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{z}} = \frac{1 - \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}}{\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}} = \cot g\frac{A+B}{2} = \text{tg}\frac{C}{2}$$

(do $A + B < \frac{\pi}{2}$; $C = \pi - (A+B) \in (0\ ;\pi)$)

$$\Rightarrow P = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \text{tg}^2\frac{B}{2}} + \frac{\text{tg}\frac{C}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{C}{2}} = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \frac{\sin C}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C).$$

Mặt khác:

$$\cos A + \cos B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}.\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2} + 2\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \le 4\cos\frac{A+B+C-\frac{\pi}{3}}{4} = 4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

Do đó $P \le 1 + \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} A = B \\ C + \frac{\pi}{3} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{yz}{x}} = \sqrt{\frac{zx}{y}} = \text{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}\quad ; \sqrt{\frac{xy}{z}} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = y = 2\sqrt{3} - 3 \; ; \; z = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Bài 4.

Áp dụng định lí sin trong tam giác BCI, ta có:

$$\frac{IC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = \frac{BC}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow IC = \frac{a.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Tương tự: $IA = \dfrac{b.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$; $IB = \dfrac{c.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$.

Do đó: $IA.IB.IC = abc\,.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}$

Mà: $1 = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} \geq 3\sqrt[3]{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}}$

$$\Rightarrow tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2} \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Theo BĐT Cô-si cho 3 số ta có:

$a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 \geq 3\sqrt[3]{abc.IA^2.IB^2.IC^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc.IA^2.IB^2.IC^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2}\right)^3 \leq \frac{1}{27abc.IA^2.IB^2.IC^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{IA.IB.IC}{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2}\right)^3 \leq \frac{IA.IB.IC}{27abc} \leq \frac{abc}{27abc.3\sqrt{3}} = \frac{1}{27.3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IA.IB.IC}{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = B = C \\ a.IA^2 = b.IB^2 = c.IC^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.