

## ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

### MÔN: TOÁN LỚP 8

Thời gian: 150 phút

#### Bài 1.(3đ)

a) Phân tích đa thức  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$  thành nhân tử

b) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để  $A:B$  biết

$$A = 10x^2 - 7x - 5 \text{ và } B = 2x - 3$$

c) Cho  $x + y = 1$  và  $xy \neq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

#### Bài 2. (3đ) Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

#### Bài 3. (2đ)

Cho hình vuông  $ABCD$ ; Trên tia đối của tia BA lấy E, trên tia đối tia CB lấy F sao cho  $AE = CF$

a) Chứng minh  $\triangle EDF$  vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm EF.

Chứng minh  $O, C, I$  thẳng hàng

#### Bài 4.(2đ)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho  $BD = AE$ . Xác định vị trí điểm D, E sao cho

a) DE có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

## ĐÁP ÁN

### Bài 1.

$$a) x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$$

$$= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 1)(x - 2)^2$$

$$b) \text{ Xét } \frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$$

$$\text{với } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } A:B \text{ khi } \frac{7}{2x - 3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7 : (2x - 3)$$

$$\text{Mà } U(7) = \{-1; 1; -7; 7\} \Rightarrow x \in \{5; -2; 2; 1\} \text{ thì } A:B$$

c) Biến đổi:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} \quad (x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ \& } x - 1 = -y)$$

$$= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)}{xy(x^2 y^2 + y^2 x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2 y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2]}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2 y^2 + (x + y)^2 + 2]} = \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 y^2 + 3)}$$

$$= \frac{(x - y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2 y^2 + 3)} = \frac{(x - y)(-2xy)}{xy(x^2 y^2 + 3)}$$

$$= \frac{-2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \Rightarrow dfcm$$

**Bài 2.**

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12, \text{ đặt } y = x^2 + x$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y + 6)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = -6 \\ x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} VN \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 1\}$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

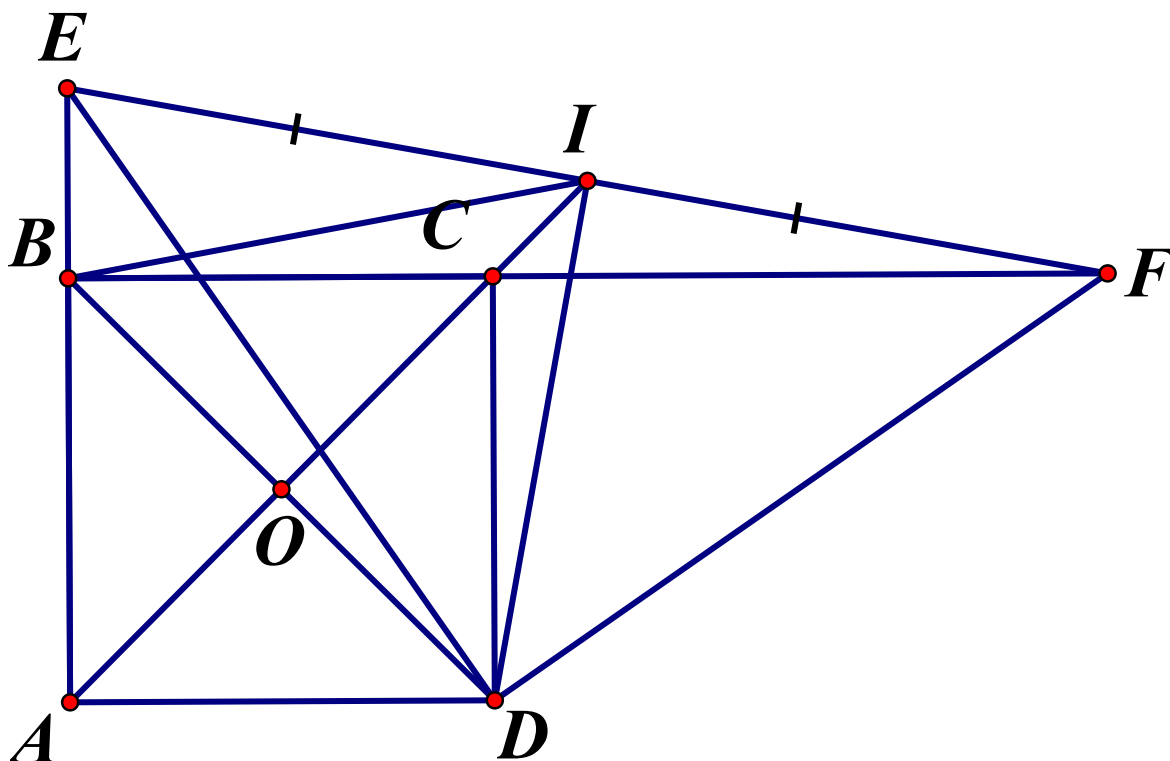
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2008} + 1 + \frac{x+2}{2007} + 1 + \frac{x+3}{2006} + 1 = \frac{x+4}{2005} + 1 + \frac{x+5}{2004} + 1 + \frac{x+6}{2003} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left( \frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2009$$

Bài 3.



a) Ta có  $\triangle ADE = \triangle CDF (cgc) \Rightarrow \triangle EDF$  cân tại D

Mặt khác  $\triangle ADE = \triangle CDF (cgc) \Rightarrow \angle E_1 = \angle F_2$

Mà  $\angle E_1 + \angle E_2 + \angle F_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle F_2 + \angle E_2 + \angle F_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$

Vậy  $\triangle EDF$  vuông cân

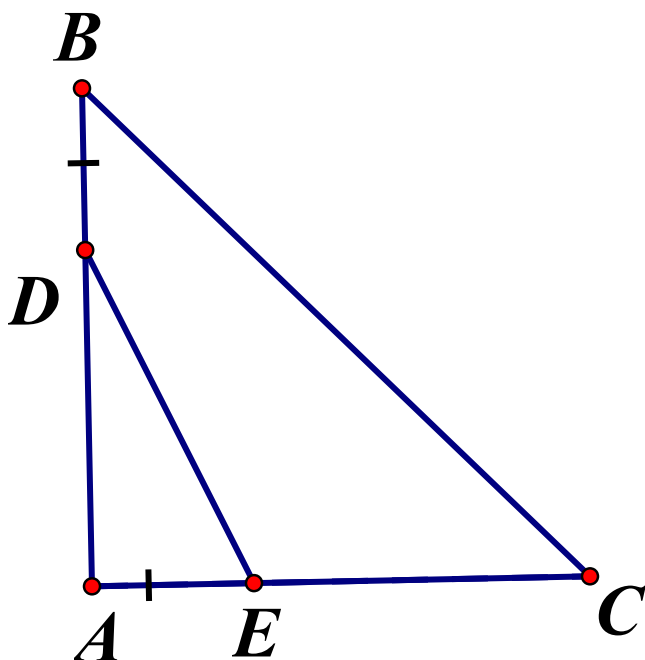
b) Theo tính chất đường chéo hình vuông  $\Rightarrow CO$  là trung trực BD

Mà  $\triangle EDF$  vuông cân  $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$ , tương tự:  $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$  thuộc đường trung trực của DB  $\Rightarrow I$  thuộc đường thẳng CO

Hay  $O, C, I$  thẳng hàng

**Bài 4.**



a) Đặt  $AB = AC = a$  không đổi ;  $AE = BD = x (0 < x < a)$

Áp dụng định lý Pytago với  $\triangle ADE$  vuông tại A có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

$$= 2(x^2 - ax) - a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$$

Ta có  $DE_{\min} \Leftrightarrow DE^2_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E$  là trung điểm AB, AC

b) Tứ giác  $BDEC$  có diện tích nhỏ nhất .

Ta có:  $S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{2} AD \cdot (AB - AD) = \frac{1}{2} \cdot (AD^2 - AB \cdot AD)$

$$= -\frac{1}{2} \left( AD^2 - 2 \frac{AB}{2} AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2} \left( AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$$

Vậy  $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2$  (Không đổi)

Do đó  $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2$  khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC