**HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TAO ĐÀN 2023-2024**

**Câu 1.** (4 điểm)

 Tính giá trị biểu thức: *A* =($x^{31}+x^{3}-x^{2010})^{2009}$ với x$\frac{\left[3(2+\sqrt{5})\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right]}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

**Câu 2**. *(4 điểm)*

1. Giải phương trình *x*4 +3*x*3 −2*x*2 −6*x +* 4 = 0
2. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\left\{\begin{array}{c}xy+x+y=a+1\\x^{2}y+xy^{2}=a\end{array}\right.$

**Câu 3.** (4 điểm)

1. Giải bất phương trình:

$$\frac{x^{4}+x^{3}+x+1}{x^{4}-x^{3}+2x^{2}-x+1}\leq 0$$

1. Tìm giá trị lớn nhất của: B = $\frac{1}{x^{3}+y^{3}+1}+\frac{1}{y^{3}+z^{3}+1}+\frac{1}{z^{3}+x^{3}+1}$

Với x, y, z là các số dương và xyz = 1

**Câu4**. (6 điểm)

 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). D là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ AC(D khác A và C). Gọi M,N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D tới các đường thẳng AB, AC. Gọi P là giao điểm các đường thẳng MN,BC.

1. Chứng minh DP và BC vuông góc với nhau
2. Đường tròn (I; r) nội tiếp tam giác ABC. Tính IO với R = 5cm, r =1,6 cm.

**Bài 5**. (2 điểm) Tìm x,y nguyên dương để C là một số nguyên dương với *C*= $\frac{x^{3}+x}{xy-1}$

**LỜI GIẢI**

**Câu 1:**

Tính *x* = $\frac{3(2+\sqrt{5})\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}$

= $\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^{3}(17\sqrt{5}-38)}$=$\sqrt[3]{(17\sqrt{5}+38)(17\sqrt{5}-38)}$=1 =>A=1

**Câu 2:**

1. x = 0 không là nghiệm của phương trình.

Xét x ≠ 0 chia hai vế phương trình cho x2 ta được:

$$\left(x^{2}+\frac{4}{x^{2}}\right)+3\left(x-\frac{2}{x}\right)-2=0<=> t^{2}+3t+2=0 <=>\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{t=-1}{t=2} <=>\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x^{2}+x-2=0}{x^{2}+2x-2=0}\right.\right.$$

Giải hệ thống 2 phương trình thu được 4 nghiệm của PT (1) như sau:

{1; -2;-1+$\sqrt{3};-1-\sqrt{3}$}

1. Dễ thấy (x, y) là nghiệm thì (y, x) cũng là nghiệm của hệ.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì x = y.

Từ hệ suy ra *a*∈ $\left\{-2;2;\frac{1}{4}\right\}=>a\in \left\{2;\frac{1}{4}\right\} $thỏa mãn (sau khi thử lại).

**Câu 3:**

1. Bất phương trình đã cho tương đương với



1. Ta có bất đẳng thức : *x*3 + *y*3 ≥ *xy* (x+ *y*) ∀*x y*, > 0 (\*)

 Thật vậy bất đẳng thức (\*) tương đương với: *x*3 + −*y*3 *- xy(x+y)*≥0

⇔ (*x+ y*)($x^{2}-xy+y^{2})-xy(x+y)$≥0

 ⇔ (x+y)($x^{2}-2xy+y^{2}$)≥0

⇔ (x+y)$(x-y)^{2}$ ≥0

 Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng các phép biến đổi là tương đương nên bất đẳng thức (\*) được chứng minh. Dấu “=” xảy ra khi x = y.

Áp dụng (\*) ta được:

 *x*3 + *y*3 + 1= *x*3 +$y^{3}+xyz\geq xy\left(x+y\right)+xyz=xy\left(x+y+z\right)$

=> $\frac{1}{x3 + y3 + 1}$ $\leq \frac{1}{xy(x+y+z)}$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{y^{3}+z^{3}+1}\leq \frac{1}{yz\left(x+y+z\right)};$ $\frac{1}{z^{3}+x^{3}+1}\leq \frac{1}{zx\left(x+y+z\right)}$

Cộng theo vế các bất thức trên ta được:

*B=* $\frac{1}{x^{3}+y^{3}+1}+\frac{1}{y^{3}+z^{3}+1}+\frac{1}{z^{3}+x^{3}+1}\leq \frac{1}{xy\left(x+y+z\right)}+\frac{1}{yz\left(x+y+z\right)}+\frac{1}{zx\left(x+y+z\right)}$

*=*$\frac{x+y+z}{xyz\left(x+y+z\right)}$*=*$\frac{1}{xyz}$*=1*

 Vậy giá trị lớn nhất của B là 1 khi x = y = z = 1.

**Câu 4: (Các bạn tự vẽ hình)**

1. Nhiều cách làm. Xin giới thiệu một cách dễ nghĩ đến.

Kẻ DP’ vuông góc BC. Suy ra P’, M, N thẳng hàng (Đường thẳng Sim son). Dẫn tới P và P’ trùng nhau (do MN và BC chỉ có mọt giao điểm duy nhất).

1. Dễ chứng minh được:

OI2 = R2 – 2Rr (Hệ thức Ơ – le). Từ đó suy ra kết quả.

**Câu 5:**

C thuộc Z thì $y^{2}C=\frac{x^{3}y^{2}+xy^{2}}{xy-1} $= $\frac{\left(x^{3}y^{2}-x^{2}y\right)+\left(x^{2}y-x\right)+\left(xy^{2}-y\right)+(x+y)}{xy-1}$

 =$\frac{x^{2}y+x+y)\left(xy-1\right)+(x+y)}{xy-1}$ = $x^{2}y+x+y$+$\frac{x+y}{xy-1}\in Z$

=> x+y $\geq -1+xy <=>(x-1)(y-1)\leq 2$

Với x = 1 thì y = 3.

 Với x > 1 thì *y*−1≤2 ⇒1 ≤y ≤3 ⇒y ∈{1;2;3}

 Nếu y = 1 thì $\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\in Z=>x=3;2 ( do x>1)$

 Nếu y = 2 thì $\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+2}{2x-1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4x-2}\in Z từ đây tìm được x$

Nếu y=3 thì $\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+3}{3x-1}=\frac{1}{3}+\frac{5}{4x-2}\in Z từ đây tìm được x$