**BÀI 4: PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM**

**A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**I) ĐỊNH NGHĨA**

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M’ sao cho I trug điểm của đoạn thẳng MM’ được gọi là phép đối xứng tâm I.

Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu Đ



Từ định nghĩa ta suy ra:

1) Đ. Từ đó suy ra:



Nếu thì



Nếu thì Đlà trung điểm của MM’.



2) Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó H được gọi là hình có tâm đối xứng.

**II) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho , gọi và là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó:



**III) CÁC TÍNH CHẤT**

Phép đối xứng tâm

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.

4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

**B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

**DẠNG 1: Xác định ảnh của một điểm hoặc một hình qua phép đối xứng tâm I.**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI:**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho , gọi và là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó:



Từ đó tìm được tọa độ của ảnh M.

Từ đó ta suy ra được phương trình ảnh của một đường.

**Câu 1:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm và đường thẳng d có phương trình :. Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O .



**LỜI GIẢI**

- Gọi là ảnh của A qua phép đối xứng tâm . Theo công thức tọa độ của phép đối xứng ta có:



- Gọi là một điểm bất kỳ thuộc d và là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O. Theo công thức tọa độ của phép đối xứng ta có : .



Do đó ảnh của d là d’ có phương trình là : .



**Câu 2:** Tìm ảnh qua phép đối xứng tâm của:



a). Điểm .



b). Đường tròn



**LỜI GIẢI**

với  .



a) biến thành.



b) Đường tròn tâm và bán kính 



Gọi 

Gọi  có tâm  và bán kính . Do đó (C’) có phương trình: 

**Câu 3:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng và . Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d’ và biến trục Ox thành chính nó .

**LỜI GIẢI**

Gọi  là tâm đối xứng cần tìm.

Gọi  (1)

Gọi 

Ngoài ra có 

 (2).

Thay (1) vào (2) được: 

- Để trục Ox thành chính nó thì tâm đối xứng phải thuộc trục Ox

- Từ hai kết quả trên ta có : .

Kết luận tâm đối xứng cần tìm là 

**Câu 4:** Cho đường thẳng và điểm phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng . Viết phương trình của .



**LỜI GIẢI**

Cho và là ảnh của M qua phép đối xứng tâm với tâm thì nên . Thế vào phương trình thành:



Hay:



Vậy



**Câu 5:**  Cho đường thẳng và Tìm phép đối xứng tâm biến d thành và biến trục Oy thành chính nó.



**LỜI GIẢI**

Giao của d, với trục Oy là



Theo giả thiết d thành và biến trục Oy thành chính nó thì A biến thành nên tâm đối xứng I là trung điểm của là .



**DẠNG 2: Dùng phép đối xứng tâm để giải một số bài toán hình học.**

**Câu 1:** Qua phép đối xứng tâm , những điểm nào biến thành chính nó, những đường thẳng nào biến thành chính nó? Những đường tròn nào biến thành chính nó?



**LỜI GIẢI**

Điểm O biến thành chính nó. Mọi đường thẳng đi qua O đều biến thành chính nó. Mọi đường tròn có tâm O đều biến thành chính nó.

**Câu 2**: giả sử phép đối xứng tâmbiến đường thẳng d thành đường thẳng . Chứng minh:



a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì song song với d, O cách đều d và .



b) Hai đường thẳng d và trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.



**LỜI GIẢI**

a) Hạ , vì d không đi qua O nên H không trùng với O. Phép đối xứng tâmbiến H thành thì O là trung điểm của và biến đường thẳng d thành đường thẳng vuông góc với tại . Suy ra d và song song, cách đều điểm O.



b) Nếu d không đi qua O thì theo câu a), nên không trùng d. Nếu d đi qua O thì mọi điểm biến thành điểm . Vậy trùng với d.



**Câu 3:** Cho phép đối xứng tâmvà đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh của đường thẳng d qua. Tìm cách dựng mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.



**LỜI GIẢI**



Dựng đường tròn sao cho nó cắt d tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng các đường thẳng AO và BO, chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại và .



Dựng đường thẳng đi qua và . Phép dựng trên đây chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.



**Câu 4:** Tìm tâm đối xứng của các hình sau đây; tam giác đều, hình bình hành, lục giác đều, đường tròn, hình gồm hai đường tròn bằng nhau.

**LỜI GIẢI**

- Tam giác đều không có tam đối xứng

- Hình bình hành có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

- Lục giác đều có một tâm đối xứng là tâm của chúng.

- Đường tròn có một tâm đối xứng là tâm của chúng.

- Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có một tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm.

**Câu 5:** Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì đó là hình bình hành.

**LỜI GIẢI**

Giả sử tứ giác ABCD có tâm đối xứng là I. Đỉnh A chỉ có thể biến thành A,B,C hay D.



- Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì A là tâm đối xứng của tứ giác: vô lí.

- Nếu A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác: vô lí

Vậy A chỉ có thể biến thành đỉnh C.

Lí luận tương tự đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác ABCD phải là hình bình hành.

**Câu 6:**  Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

**LỜI GIẢI**



Giả sử hình có hai trục đối xứng d và vuông góc với nhau tại O. Lấy M là điểm bất kì thuộc hình , là điểm đối xứng M qua d. là điểm đối xứng với qua vì d và đều là trục đối xứng của hình nên và đều thuộc .



Gọi I, J là trung điểm của ta có:



đpcm.



**Câu 7:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA. Hạ lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.



a). Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Phép đối xứng tâm biến các đường thẳng thành những đường thẳng nào?



b). Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I,O?.



**LỜI GIẢI**



Vì MNPQ là hình bình hành nên I là trung điểm MP và NQ.

Phép đối xứng tâm biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng thành đường thẳng đi qua P và song song với , tức là vuông góc với DC



Do đó đường thẳng được biến thành đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự; đường thẳng biến thành đường thẳng QO, đường thẳng biến thành đường thẳng MO, đường thẳng biến thành đường thẳng NO.



b) Vì bốn đường thẳng MO,NO,PO,QO đồng quy tại O nên bốn đường thẳng đồng quy tại đối xứng với tâm O qua I.



**Câu 8:** Cho hình bình hành ABCD và đường tròn bàng tiếp của tam giác ABD, tiếp xúc với phần kéo dài của AB Và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.



**LỜI GIẢI**

Gọi K là tiếp điểm của với BD; là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại với AD tại và BD tại H; gọi I là trung điểm BD. Từ và suy ra ta có phép đối xứng qua : .



Tam giác AMN cân tại A và vì nên tam giác DQN cân tại D suy ra Do đó, Q là ảnh của trong phép, phép : đi qua ba điểm K,Q,P. Vì là các điểm chung duy nhất của với AB,AD và BC do đó K,Q,P cũng là điểm chung duy nhất của với BD, CD, CB suy ra đpcm.



**Câu 9:** Cho hai điểm B,C cố định trên đường tròn và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.



**LỜI GIẢI**



Vẽ đường kính AM của đường tròn thì có và nên BHCM Là hình bình hành. Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cố định và cũng là trung điểm của MH. Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H. Khi A chạy trên đường tròn thì M chạy trên đường tròn . Do đó H nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn qua phép đối xứng với tâm I.



**Câu 10:**  Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn và một điểm M thay đổi trên . Gọi là điểm đối xứng M qua A, là điểm đối xứng qua B, là điểm đối xứngqua C. Chứng minh phép biến hình F biến điểm M thànhlà một phép đối xứng tâm. Suy ra quỹ tích điểm.



**LỜI GIẢI**



Gọi I là trung điểm của , ta có:



như vậy điểm I cố định,do đó phép biến hình F biến điểm M thành là phép đối xứng qua điểm I.Vì M thay đổi trên nên quỹ tích điểm là đường tròn , ảnh của đường tròn qua phép đối xứng tâm với tâm I.



**Câu 11:** Cho đường trònvà dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên, M không trùng A,B. Hai đường tròn qua M theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích các điểm N là giao điểm thứ hai của và



**LỜI GIẢI**



Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

là trung điểm của AB cố định.



Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với ta có:



nên I là trung điểm của PN, do đó phép đối xứng tâm I biến P thành N. Vì quỹ tích N là đường tròn là ảnh của qua phép đối xứng tâm I, bỏ đi hai điểm A và B.



**Câu 12:** Cho đường tròn , đường thẳng và điểm I. Tìm điểm A trên và điểm B trên sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.



**LỜI GIẢI**

Giả sử có điểm A trên đường tròn và điểm B trên sao cho I là trung điểm AB, phép đối xứng tâm biến B thành A nên biến đường thằng thành đường thẳng đi qua A.



Mặt khác A lại nằm trên nên A phải là giao điểm của và suy ra cách dựng đường thẳnglà ảnh của qua phép đối xứng tâm . Lấy A là giao điểm của và , còn B là giao điểm của đường thẳng AI và đường thẳng.



Số nghiệm hình là số giao điểm của và .



**Câu 13:** Cho 5 điểm dựng một hình ngũ giác ABCDE sao cho trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE và EA lần lượt là .



**LỜI GIẢI**

Giả sử đã dựng ngũ giác ABCDE theo yêu cầu. Lấy một điểm tùy ý, và gọi là điểm đối xứng của qua , là điểm đối xứng của qua , là điểm đối xứng của qua , là điểm đối xứng của qua và là điểm đối xứng của qua .



Khi đó



Tương tự



Do đónên A là trung điểm. Từ đó suy ra cách dựng: Lấy một điểm bất kì, rồi dựng các điểm như trên. Cuối cùng dựng trung điểm A của đoạn thẳngthì A là một đỉnh của ngũ giác cần tìm. Các đỉnh còn lại dựng dễ dàng.



Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Thật vậy nếu có hai ngũ giác ABCDE và cùng thỏa mãn điều kiện của bài toán thì lập luận như trên ta có nêntức là trùng với và B,C,D,E trùng với



**BÀI 5: PHÉP QUAY**

**A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**I) ĐỊNH NGHĨA**

Cho điểm O và góc lượng giác . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M’ sao cho và góc lượng giác bằng được gọi là phép quay tâm O góc quay .



Điểm O được gọi là tâm quay, được gọi là góc quay.



Phép quay tâm O góc thường được kí hiệu là .



Nhận xét:

Phép quay tâm O góc quay , chính là phép đối xứng tâm O.



Phép quay tâm O góc quay , chính là phép đồng nhất.



**II) TÍNH CHẤT**

Phép quay

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.

4) Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý:



Giả sử phép quay tâm I góc quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d’ (hình 2). Khi đó:



Nếu thì góc giữa d và d’ bằng .



Nếu thì góc giữa d và d’ bằng .



**B) PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

**DẠNG 1: Xác định ảnh của một hình qua một phép quay**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Dùng định nghĩa phép quay.

**Câu 1:** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng và đường tròn .



a). Viết phương trình d’ là ảnh của d qua phép .



b). Viết phương trình (C’) là ảnh của (C) qua phép .



**LỜI GIẢI**



a) Vì  phương trình d’ có dạng: 

Chọn . Gọi



Vì 

Vậy .

b) Đường tròn (C) có tâm  bán kính 

**Cách 1:**

Gọi 





Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều dương nên 

Gọi  có tâm  và bán kính . Nên:

.

**Cách 2:**

Gọi 



Từ đó suy ra .

**Câu 2:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm , đường thẳng  và đường tròn (C):. Tìm ảnh của M, d, (C) qua:

a) Phép quay tâm O góc quay .

b) Phép quay tâm  góc quay .

**LỜI GIẢI**

a) **Tìm ảnh của M**



Gọi 

Giải (1):  (1’)

Giải (2):



 thay vào (1’) được 

Suy ra x’, y’ là nghiệm của phương trình 



Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều dương nên 

Cách 2: 



**Tìm ảnh của đường thẳng d:**

Dễ thấy 

Chọn điểm . Tìm ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 

Gọi 



Gọi d’ ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay , suy ra d’ đi qua hai điểm A’ và M’ do đó d’ có vec tơ chỉ phương . Phương trình đường thẳng .

**Tìm ảnh của đường tròn (C):**

Đường tròn (C) có tâm  bán kính 

**Tìm ảnh của K**

Gọi 

Giải (1):  (1’)

Giải (2):



 thay vào (1’) được 

Suy ra x’, y’ là nghiệm của phương trình 



Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều dương nên 

Cách 2: 



Ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C’) có tâm  bán kính 

Phương trình .

b) **Tìm ảnh của M**



Gọi 

Giải (1): 

 (1’)

Giải (2):



 thay vào (1’) được 

Suy ra x’, y’ là nghiệm của phương trình 



Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều dương nên 

Cách 2: 



**Tìm ảnh của đường thẳng d:**

Dễ thấy 

Chọn điểm . Tìm ảnh của A qua phép quay tâm I góc quay 

Gọi 



Gọi d’ ảnh của d qua phép quay tâm I góc quay , suy ra d’ đi qua hai điểm A’ và M’ do đó d’ có vec tơ chỉ phương . Phương trình đường thẳng .

**Tìm ảnh của đường tròn (C):**

Đường tròn (C) có tâm  bán kính 

**Tìm ảnh của K**

Gọi 

Giải (1):  (1’)

Giải (2):



 thay vào (1’) được 

Suy ra x’, y’ là nghiệm của phương trình 



Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều dương nên 

Cách 2: 



Ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C’) có tâm  bán kính .

Phương trình .

**Câu 3:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm  và đường tròn (C): . Tìm ảnh của A, (C) qua phép quay tâm O góc quay 

**LỜI GIẢI**

**Tìm ảnh của A**

Gọi 

Giải (1):  (1’)

Giải (2):



 thay vào (1’) được:





Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều âm nên 

Cách 2: 



**Tìm ảnh của đường tròn (C):**

Đường tròn (C) có tâm  bán kính 

**Tìm ảnh của K**

Gọi 

Giải (1):  (1’)

Giải (2):



 thay vào (1’) được:



Do góc quay bằng  có nghĩa quay theo chiều âm nên 

Cách 2: 



Ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C’) có tâm  bán kính 

Phương trình .

**DẠNG 2: Sử dụng phép quay để chứng minh một số bài toán hình học.**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Chọn tâm quay và góc quay thích hợp rồi sử dụng tính chất phép quay.

**Câu 1:** Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A. Gọi I, M, J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC, CF. Chứng minh tam giác IMJ vuông cân.



**LỜI GIẢI**

Có  ,

 và .

Có  vuông cân tại M.

**Câu 2:** Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác đó các hình vuông ABEF và ACIK. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với FK và .



**LỜI GIẢI**

Gọi .

Có  và

 nên

 (1).

Có AM là đường trung bình của

 (2).

Từ (1) và (2) suy ra  và .

**Câu 3:** Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự. Lấy các đoạn thẳng AB, BC làm cạnh, dựng các tam giác đều ABE và BCF nằm cùng về một phía so với đường thẳng AB. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của các đoạn thẳng AF và CE. Chứng minh tam giác BMN đều.

**LỜI GIẢI**



Gọi  là phép quay tâm B góc quay .  biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F nên  biến đường thẳng EC thành đường thẳng AF. Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên  và

góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng .

 cũng biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF nên  và , do đó tam giác BMN đều.

**Câu 4:** Cho tam giác ABC. Lấy các cạnh của tam giác đó làm cạnh, dựng ra phía ngoài tam giác các tam giác đều . Chứng minh rằng:

a). Ba đoạn thẳng AA’, BB’, CC’ bằng nhau.

b). Ba đường thẳng AA’, BB’, CC’ đồng qui.

**LỜI GIẢI**



Gọi  là phép quay tâm A góc quay .  biến các điểm C’, C lần lượt thành các điểm B, B’ nên  biến đường thẳng C’C thành đường thẳng BB’. Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên  (1).

Gọi  là phép quay tâm B góc quay .  biến các điểm A, A’ lần lượt thành các điểm C’, C nên  biến đường thẳng AA’ thành đường thẳng CC’. Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên  (2).

Từ (1) và (2) suy ra .

Gọi .

Lấy trên CC’ điểm E sao cho , có  đều.

Xét:  .

Vì C, E, C’ thẳng hàng nên suy ra ba điểm B, I ,B’ thẳng hàng.

Kết luận 3 đường thẳng AA’, BB’, CC’ đồng quy tại điểm I.

**Câu 5:** Cho hình bình hành ABCD tâm O. Dựng bên ngoài ABCD các hình vuông ABEF và BCGH. Gọi I và J lần lượt là tâm của hai hình vuông trên. Chứng minh tam giác IOJ vuông cân.



**LỜI GIẢI**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Dựng các hình bình hành OMIK và ONJL.

Ta có  .

Mà .

Tương tự chứng minh được 

Xét phép quay  biến hình bình hành OLJN thành hình bình hành OMIK và

 vuông cân tại O.

**Câu 6:** Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACIJ sao cho C và D nằm khác phía với AB. Chứng minh giao điểm của BI và CD nằm trên đường cao AH của tam giác ABC.

**LỜI GIẢI**



Gọi M, O lần lượt là tâm của hai hình vuông ABDE và ACIJ. Trên tia đối của tia AH dựng , gọi  là phép quay tâm M góc quay , gọi  là phép quay tâm O góc quay 

 Có ,

.

Ngoài ra . Từ đó suy ra BI là ảnh của KC qua phép quay tâm O góc quay  nên  (1).

 Có , .

Ngoài ra . Từ đó suy ra CD là ảnh của KB qua phép quay tâm O góc quay  nên  (2).

Gọi  P là trực tâm của tam giác KBC hay .

**Câu 7:** Cho tứ giác lồi ABCD. Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABM và CDP. Về phía trong tứ giác, dựng hai tam giác đều BCN và ADK. Chứng minh MNPK là hình bình hành.



**LỜI GIẢI**

Xét phép quay tâm B góc quay , biến hai điểm A và C thành hai điểm M và N. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên  (1)

Xét phép quay tâm D góc quay , biến hai điểm A và C thành hai điểm K và P. Do phép

quay bảo toàn khoảng cách nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  .

Xét phép quay tâm A góc quay , biến hai điểm B và D thành hai điểm M và K. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên  (3)

Xét phép quay tâm C góc quay , biến hai điểm B và D thành hai điểm N và P. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  

Từ  và  suy ra tứ giác MNPK là hình bình hành.

**Câu 8:** Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các hình vuông ABDE và ACFG. Gọi H trung điểm của BC. Chứng minh .

**LỜI GIẢI**



Gọi 



 thẳng hàng và A trung điểm của EB’ (1).

Lại có 

Gọi   và J là trung điểm của B’G (Vì H trung điểm của BC) (2).

Từ (1) và (2) suy ra AJ là đường trung bình của 

**Câu 9:** Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi K và H lần lượt là chân các đường phân giác trong của các tam giác ABE và ACE. Gọi I trung điểm của AK. Chứng minh .

**LỜI GIẢI**



Ta có  đều



Ta có  đều



Suy ra 

Suy ra  đều.

Suy ra (trong tam giác đều đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

**Câu 10:** Cho hai đường thẳng a, b và điểm C không thuộc a, b. Hãy tìm trên a và b lần lượt hai điểm A và B sao cho tam giác ABC đều.

**LỜI GIẢI**



Nếu xem B là ảnh của A qua phép quay tâm C góc quay  thì B sẽ là giao điểm của đường thẳng b và đường thẳng a’ là ảnh của a qua phép quay nói trên.

Số nghiệm của bài toán tùy thuộc vào số giao điểm của đường thẳng b với đường thẳng a’.

**Câu 11:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh E chạy trên nữa đường tròn cố định.



**LỜI GIẢI**

E là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay . Khi A chạy trên nửa đường tròn (O) thì E chạy trên nữa đường tròn (O’) là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B góc quay .

**Câu 12:** Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P , Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DOP là tam giác vuông cân tại đỉnh D.

b) Chứng minh AO vuông góc với PQ và .

**LỜI GIẢI**

a) Phép quay tâm C góc quay , biến điểm I thành điểm B, biến điểm A thành điểm M. Theo tính chất phép quay suy ra  (1).



Có DO là đường trung bình của  (2).

Có DP là đường trung bình của  (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra  vuông cân tại D.

b) Phép quay tâm D góc quay , biến điểm Q thành điểm A, biến điểm P thành điểm O. Theo tính chất phép quay suy ra .

**Câu 13:** Cho hai đường tròn  và  cắt nhau ở A và B. Từ điểm I cố định kẻ cát tuyến di động IMN với (O) , MB và NB cắt (O’) tại M’ và N’. Chứng minh đường thẳng M’N’ luôn đi qua một điểm cố định.



**LỜI GIẢI**

Xét phép quay Q tâm A góc quay  biến O thành O’. Vì MM’ và NN’ qua B nên

.

Phép quay Q biến điểm M thành điểm M’; N biến thành N’. Từ đó biến đường thẳng MN thành đường thẳng M’N’. Đường thẳng MN qua điểm I cố định nên đường thẳng M’N’ qua điểm I’ cố định là ảnh của I qua phép quay Q nói trên.