

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

1/ Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

2/ Chứng minh rằng $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10>0$ với mọi a .

Bài 2. (6 điểm)

- Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{100} - 2x^{51} + 1$ cho $x^2 - 1$
- Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{8}$$
$$B = \frac{27 - 12}{x^2 + 9}$$

- Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

Bài 3. (4 điểm)

- Tìm các số nguyên tố x và y sao cho $x^2 - 2y^2 = 1$
- Chứng minh tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O . M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ($M \neq B, M \neq C$). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$

- Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân
- Chứng minh $ME \parallel BN$
- Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng

Bài 5. (2 điểm)

Qua M thuộc cạnh BC của tam giác ABC ($M \neq B, C$), kẻ ME song song với AB (E thuộc AC), Kẻ MD song song với AC (D thuộc AB). Tìm vị trí của M để tứ giác $MDAE$ có diện tích lớn nhất.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1) a) ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(4 + x^2)(2 - x)} \right) \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{x(x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x + 1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

b) $\frac{x + 1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 : 2x \Rightarrow 2x + 2 : 2x \Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (TMDKXD)}$

2) $(a - 1)(a - 3)(a - 4)(a - 6) + 10 = (a^2 - 7a + 6)(a^2 - 7a + 12) + 10$

Đặt $t = a^2 - 7a + 6$. Khi đó ta có:

$$(a - 1)(a - 3)(a - 4)(a - 6) + 10 = (a^2 - 7a + 6)(a^2 - 7a + 12) + 10 = (t + 3)^2 + 1 > 0.$$

Bài 2.

1) Gọi đa thức dư trong phép chia là $ax + b$. Khi đó ta có:
 $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1).H(x) + ax + b \quad (1)$

Thay $x = 1$ vào (1) ta có: $0 = a + b \quad (2)$

Thay $x = -1$ vào (1) ta có: $4 = a - b \quad (3)$

Từ đó suy ra $a = 2; b = -2$. Vậy số dư là $2x - 2$

2) Ta có điều kiện $x \neq 2, 3, 4, 5, 6$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases} (TM) \end{aligned}$$

Vậy $S = \{-2; 10\}$

3) Ta có: $B = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{-x^2 - 9 + x^2 - 12x + 36}{x^2 + 9} = -1 + \frac{(x-6)^2}{x^2 + 9} \geq -1$
 $Min B = -1 \Leftrightarrow x = 6$

Ta có: $B = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{4x^2 + 36 - 4x^2 - 12x - 9}{x^2 + 9} = 4 - \frac{(2x+3)^2}{x^2 + 9} \leq 4$
 $Max B = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Bài 3.

1) Ta có: $x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 = x^2 - 1; 2 \Rightarrow (x-1)(x+1); 2$

Xét trường hợp: $x+1; 2 \Rightarrow x+1 = 2k (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = 2k - 1$

Khi đó ta có $2y^2; 4 \Rightarrow y^2; 2 \Rightarrow y = 2$ (do y nguyên tố). Từ đó suy ra $x = 3$

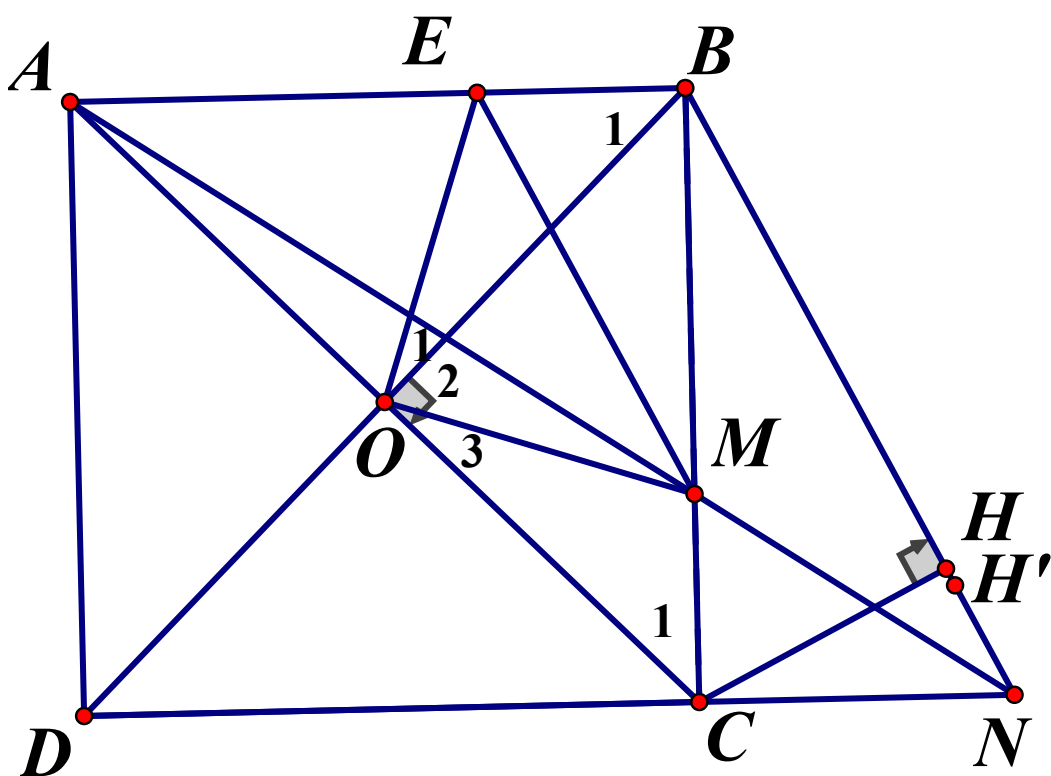
Xét trường hợp $x-1; 2 \Rightarrow x+1 = 2t (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = 2t + 1$

Khi đó ta có: $2y^2; 4 \Rightarrow y^2; 2 \Rightarrow y = 2$ (do y nguyên tố) suy ra $x = 3$

2) Ta có ba số nguyên liên tiếp là $n, n+1, n+2 (n \in \mathbb{N})$

Khi đó ta có: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3(n-1)n(n+1) + 9n; 9$

Bài 4.



a) Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$ có:

$$OB = OC(gt); \angle EOB = \angle MOC(gt); \angle EOB = \angle MOC = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle OEB = \triangle OMC(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} OE = OM \\ \angle EOB = \angle MOC \end{cases}$$

Lại có $\angle EOB + \angle MOC = \angle BOC = 90^\circ$ (vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

Suy ra $\angle EOB + \angle MOC = \angle EOM = 90^\circ$, kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ gt tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$

$$+ AB // CD \Rightarrow AB // CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC} \text{ (Theo định lý Ta let) } (*)$$

Mà $BE = CM(gt)$ và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào $(*)$

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME // BN \text{ (Định lý Ta let đảo)}$$

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

$$\text{Từ } ME // BN \Rightarrow \angle ME = \angle H'B \text{ (cặp góc đồng vị)}$$

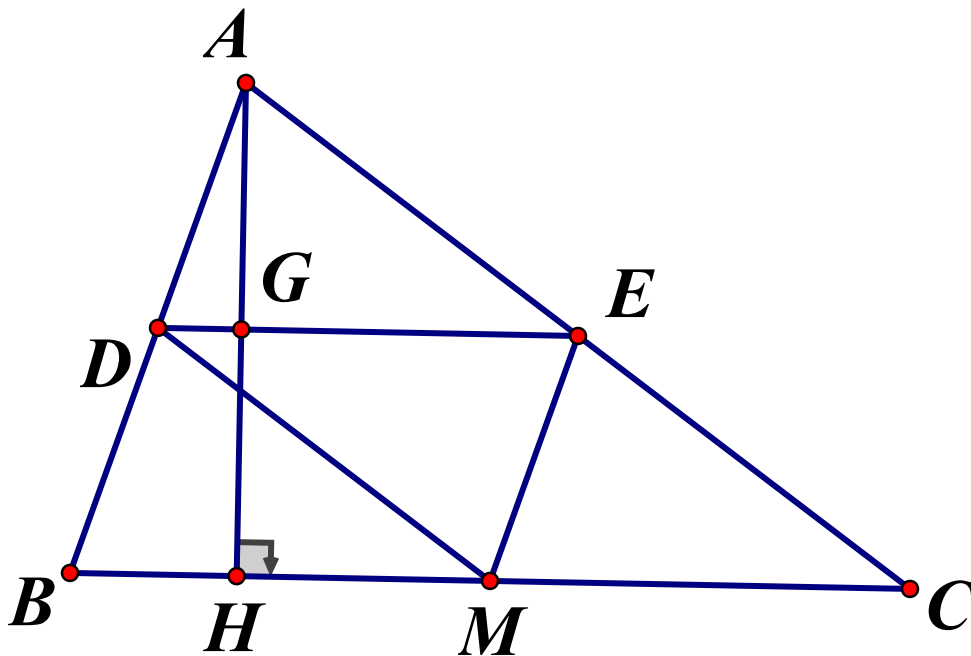
$$\text{Mà } \angle ME = 45^\circ \text{ vì } \triangle OEM \text{ vuông cân tại O} \Rightarrow \angle H'B = 45^\circ = \angle_1$$

$$\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH' (g.g) \Rightarrow \frac{OM}{BM} = \frac{MC}{MH'}, \text{ kết hợp } \angle OMB = \angle MH' \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH' (c.g.c) \Rightarrow \angle BH'C = \angle BH'M + \angle MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$$

Mà $CH \perp BN (H \in BN) \Rightarrow H \equiv H'$ hay ba điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Bài 5.



Ta có $MDEA$ là hình bình hành. Khi đó $S_{MDEA} = 2S_{ADE} = AG \cdot DE$. Diện tích tứ giác $MDAE$ có diện tích lớn nhất thì DE lớn nhất. Mà để DE lớn nhất thì:

*Nếu $AB > AC$ thì $M \equiv B$

*Nếu $AC > AB$ thì $M \equiv C$

*Nếu $AB = AC$ thì $\begin{cases} M \equiv B \\ M \equiv C \end{cases}$