

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 13

Câu I: Giải các phương trình:

a) $(1 + \tan x)\cos^3 x + (1 + \cot x)\sin^3 x = \sqrt{2}\sin 2x.$

b) $\sin^3 x + \cos^3 x - \sqrt{3}\sin 2x(\sin x - \cos x) = \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$

Câu II:

1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó có 3 số chẵn và 3 số lẻ ?
2. Cho k là số tự nhiên thỏa mãn $5 \leq k \leq 2018$.

Chứng minh rằng: $C_5^0 \cdot C_{2018}^k + C_5^1 \cdot C_{2018}^{k-1} + \dots + C_5^5 \cdot C_{2018}^{k-5} = C_{2019}^k.$

3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm công thức tính u_n theo n .

Câu IV:

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC=2a$, $AB=AD=DC=a$ ($a>0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi $O = AC \cap BD$. Biết SD vuông góc với AC .

a) Tính SD .

b) Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) . Biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 14

Câu I (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $2\sqrt{3} \cdot \sin^3 x + (\cos x + 1)(6\cos x - 9) + 3\sin 2x \cdot \sin x + 6 = 0$
2. b) $\frac{4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - 2\sqrt{3}\sin 2x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1.$

Câu II (4,0 điểm) Cho hai đường thẳng song song a, b . Trên a lấy 17 điểm phân biệt, trên b lấy n điểm phân biệt. Tìm n để có 5950 tam giác có các đỉnh là ba trong các điểm đã cho.

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh nam và 20 học sinh nữ thành một hàng dọc sao cho giữa hai học nam bất kỳ luôn có ít nhất 1 học sinh nữ?

Câu III.(3 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1} + 1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

Tính tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}$.

Câu 4.(3,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có A(1;3). Biết M(6;4) thuộc cạnh BC và N $\left(\frac{17}{2}; \frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng DC. Tìm tọa độ B,C,D.

b) Tìm m để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{3x+1} - x - 1 \geq 0 \\ (x^2 + 2)^2 + m \geq x\sqrt{x^2 + 4} + 1 \end{cases}$$

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 15

Câu 1.

a, Giải phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Giải phương trình: $1 - \tan x \cdot \tan 2x = \cos 3x$

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5x+y} + \sqrt{2x+y} = 3 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 1 \end{cases}$$

Câu 2. a, Một hộp đựng 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ, 7 viên bi vàng(các viên bi được xem là khác nhau). Chọn ngẫu nhiên từ hộp đó 8 viên bi. Tính xác suất để 8 viên bi được chọn có đủ cả ba màu.

b, Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2^n} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn dãy số (u_n) ?

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của SC . Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại các điểm B', D' khác S .

Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}$.

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 16

Bài 1 (6 điểm). Giải các phương trình:

$$a) \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x.$$

$$b) \sqrt{3} \cos 2x(2 \sin x - 1) + 2 \cos x(2 \sin^2 x + 1) = 3 \sin 2x.$$

Bài 2 (2 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

Bài 3 (3 điểm). Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 18\}$. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 số trong tập A sao cho hiệu của hai số bất kì trong 5 số đó không nhỏ hơn 2.

Bài 4 (2 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} = \sqrt{2(x+y+1)} + 4 \\ (x^2 + y - 2)\sqrt{2x+1} = x^3 + 2y - 5. \end{cases}$$

b). Cho $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt chọn từ các phần tử của tập hợp A . Xác định số phần tử của tập hợp S . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S , tính xác suất để số được chọn là số không chia hết cho 5.

Bài 5. (3,0 điểm) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M lần lượt là trung điểm của AC ; N là điểm thuộc AD sao cho $AN = 2ND$. Xác định và tính theo a diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua MN và song song với AB .

Bài 6 (4,0 điểm) 1) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .

b) Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 17

Câu I (6,0 điểm) Giải các phương trình

$$a) \sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0. \quad b) 2 \sin x + \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Câu II (3,0 điểm) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} y(x^4 + y^4) = (x^2 - 1)^5 + x^6 - x^4 \\ \left(\sqrt{5x^3 - 4} + 2\sqrt[3]{7y + 8} \right)(y + 2) = 2(x^2 + 4) \end{cases}$$

Câu III (3,0 điểm) a) Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

Câu IV (5,0 điểm) Cho tam giác đều ABC cạnh có độ dài bằng a nằm trên mặt phẳng (P). Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P), S là điểm di động trên d và không trùng với A, K là hình chiếu vuông góc của C lên SB.

a, Chứng minh rằng khi S di động trên d thì BK.BS không thay đổi.

b, Xác định vị trí của S trên d để tam giác KAB có diện tích lớn nhất.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2-x)(2+y)=8 \\ x\sqrt{4-y^2}+y\sqrt{4-x^2}=4. \end{cases}$$

Câu V (3,0 điểm)

Cho tứ diện SABC có tất cả các cạnh có độ dài bằng 1. Gọi I, K là trung điểm của các cạnh AC và SB.

a) Gọi D là đỉnh của hình thoi ABDC. Chứng minh rằng $IK \parallel (SCD)$.

b) Trên đường thẳng AS và CK lấy các điểm P, Q sao cho $PQ \parallel BI$. Tính độ dài PQ.

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 18

Câu 1 (6,0 điểm) Giải các phương trình, bất phương trình sau:

a) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1 + \sqrt{3}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Câu 2 (6,0 điểm) Gọi S là tập các số tự nhiên lẻ có 5 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập S. Tính xác suất để số được chọn

a) là số có các chữ số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

b) là số có tổng các chữ số bằng 10 c) là số có tích các chữ số bằng 1400

Câu 3 (5,0 điểm) a) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M là trung điểm của AC; N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Xác định và tính theo a diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua MN và song song với AB.

b) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, O là trung điểm của AG. Mặt phẳng thay đổi đi qua O cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Tính

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} \text{ theo } a$$

Câu 4 (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1) \\ x\sqrt{2x^2 - y^2} + y + 3 = -y^2 + 2x + 2 \end{cases}$$

ĐỀ ÔN HSG ĐỀ SỐ 19

Câu 1 Giải các phương trình sau:

$$2(x-2)(x+3)+18 \leq 5\sqrt{x^2+x+2}$$

Câu 2 Cho d: $2x + y + 1 = 0$ và đường tròn (T) có phương trình $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

a) Gọi d_1, d_2 lần lượt là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc quay 90° và góc quay -90° . Viết phương trình d_1 và d_2

b) Tìm tọa độ điểm A thuộc d, điểm B thuộc đường tròn (T) sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

Câu 3

a) Khảo sát tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn và tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sin(\pi|\sin x|)$.

b) Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong năm cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào.

c) Giải bất phương trình $5(x^2 - x - 6)\sqrt{5x-19} \geq (x+2)(x+5+4\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}+2)$

Câu 4. (2,0 điểm) Tính tổng: $T = \frac{1}{2}C_{2014}^0 + \frac{1}{4}C_{2014}^2 + \frac{1}{6}C_{2014}^4 + \dots + \frac{1}{2016}C_{2014}^{2014}$.

(Trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu 5. (2,0 điểm) Cho $x, y, z \in [0; 4]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \sqrt{xy}(x-y) + \sqrt{yz}(y-z) + \sqrt{zx}(z-x).$$

CÂU 6. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. M là điểm tùy ý trên cạnh AB, (P) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD cắt BC, CD, DA lần lượt tại N, P, Q. Tìm vị trí của M và điều kiện của a, b, c để thiết diện MNPQ là hình vuông, tính diện tích thiết diện trong trường hợp đó.

Câu 7. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+1}{8-\sqrt{a}} + \frac{c+1}{8-\sqrt{b}} + \frac{a+1}{8-\sqrt{c}} \leq \frac{6}{7}$$

-----Hết-----

ĐỀ SỐ 20

Bài 1 (2 điểm).

1. Giải phương trình: a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x.$

2. Giải phương trình: $\frac{2 \sin^2 \left(x - \frac{25\pi}{4} \right) - 2 \cos^2 \left(x + \frac{9\pi}{2} \right) + \tan x}{(\sqrt{2} \cos x + 1)(\sqrt{2} \sin x + 1)} = 0$

Bài 2 (3 điểm).

1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{9} \left(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

2. Cho n là số tự nhiên, $n \geq 2$. Chứng minh đẳng thức sau:

$$n^2 C_n^0 + (n-1)^2 C_n^1 + (n-2)^2 C_n^2 + \dots + 2^2 C_n^{n-2} + 1^2 C_n^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

3. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

Bài 3 (2 điểm).

1. Cho dãy số $\{x_k\}$ xác định bởi: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$

Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_{2012}^n}$

Bài 4 (3 điểm).

Cho tam giác đều ABC

1. M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$. Hãy tính góc $\widehat{BMC}$

2. Một điểm S nằm ngoài (ABC) sao cho tứ diện SABC đều, gọi I, K là trung điểm của các cạnh

AC và SB. Trên đường thẳng AS và CK ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BI

Tính độ dài PQ biết cạnh của tứ diện có độ dài bằng 1.