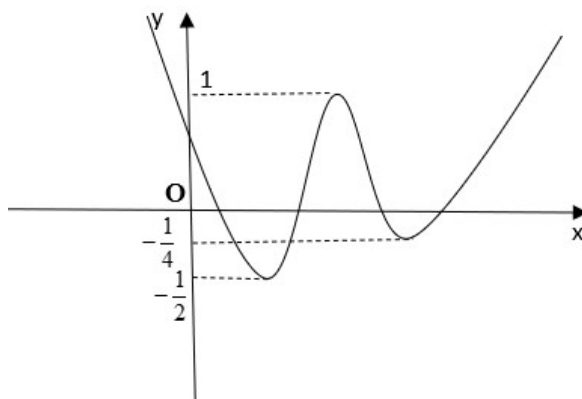


ĐỀ VDC SỐ 14

Mín max của hàm hợp

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Cho $a = |f(x) - f(x)|$, $b = -a^2 + a + \frac{3}{4}$ và $S = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(b+1)^2 [1+b^2 \cdot (2-b)^2]} - \frac{2}{1+b \cdot \sqrt{2-b}}$.

Có giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{m}{n}$ và $k = \frac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là

- A. $k = 1$. B. $\frac{49}{6}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{9}{4}$.

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

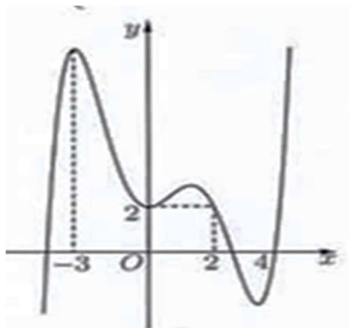
- A. -16 . B. 16 . C. -12 . D. -2 .

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(x+m^2) - \frac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho

$\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| = \frac{9}{4}$ là $S = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (với $a, b \in \mathbb{N}$). Giá trị $\frac{b}{a}$ bằng

- A. $\frac{5}{18}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{36}{5}$. D. $\frac{18}{5}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng



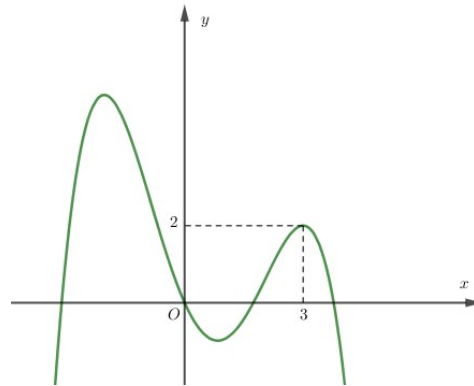
A. $f(0)$.

B. $f(-3)+6$.

C. $f(2)-4$.

D. $f(4)-8$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x) = \frac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x+m}{x+1} \right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\min_{[1;2]} f(x) + \max_{[1;2]} f(x) = \frac{16}{3}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 7: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	4	-5	3

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x) = \left| f(x^3 + 2x) + 3f(m) \right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 12.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 8x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

A. 60.

B. 75.

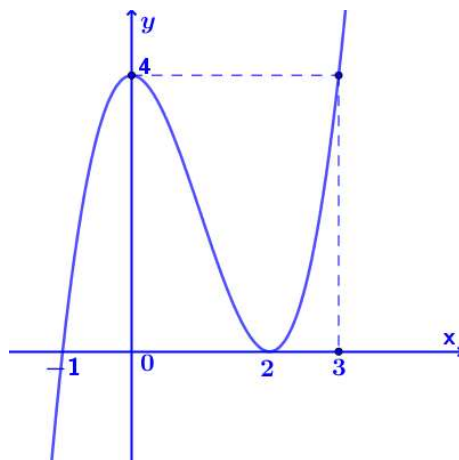
C. 70.

D. 65.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + |4x-2| + |6-4x|}{|2x-1| + |2x-3|}$.

Đặt $h(x) = f(g(x)) - f(3-2x+x^2) + f(2-\sqrt{4-m^2})$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h(x)$.

Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây:



- A. $(0; 2)$. B. $(2; 4)$. C. $(4; 5)$. D. $(5; 10)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 - mx - 4}{x + 2}$, với m là tham số. Tìm tham số m để $\min_{[-1;1]} |f(x)| > \frac{3}{4}$?

- A. $m > \frac{1}{4}$. B. $m < \frac{1}{5}$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $\frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}$.

Câu 11: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$ là

- A. $\min P = \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2}$. B. $\min P = 9 + 3\sqrt{15}$. C. $\min P = -63$. D. $\min P = -91$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = |f(2 - \cos x) + m|$ (m là tham số thực) gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max_{\mathbb{R}} g(x) + \min_{\mathbb{R}} g(x) = 100$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A. -16 . B. 12 . C. -32 . D. -28 .

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a, b) với $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $M^2 + m^2 \leq 5$?

- A. 51 . B. 89 . C. 198 . D. 102 .

Câu 14: Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (3-3m^2)x + 1 \right|$. Tìm $m \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4 .

- A. $m = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. B. $m = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$. C. $m = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$. D. $m = \frac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Câu 15: Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 6mx^2 + 12mx + m|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 18 .

- A. 0 . B. 3 . C. 1 . D. 2 .

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$[f(x) - x] \cdot f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

- A. 33. B. -3. C. 4. D. -28.

Câu 17: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 4x$ bằng -1.

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

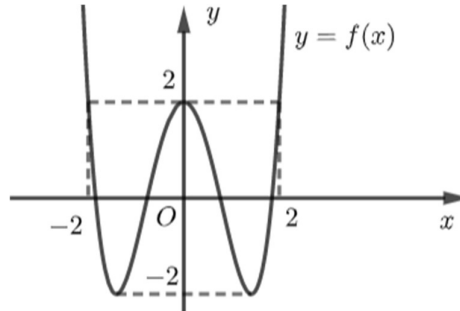
Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m|$ trên $[1; 3]$ không vượt quá 20.

- A. 33. B. 34. C. 35. D. 36.

Câu 19: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ khi M nhỏ nhất là

- A. 3. B. -4. C. 2. D. 4.

Câu 20: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = ||2f(x) + m + 4| - f(x) - 3|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 1?



- A. 18. B. 19. C. 20. D. 21.

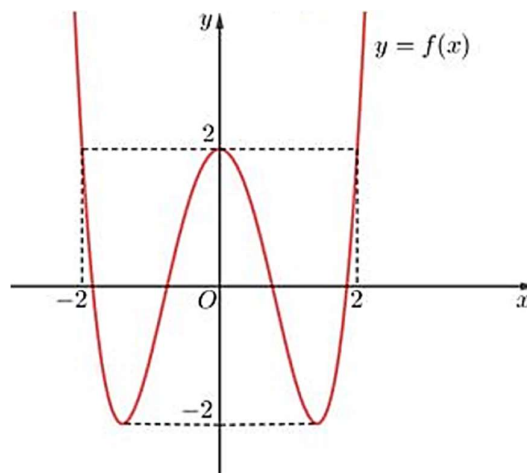
Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ lớn hơn 2?

- A. $a > \frac{1}{2}$ B. $a < -1$ C. $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ D. $a < 0$

Câu 22: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là a thỏa mãn $0 < a < 1$.

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Câu 23: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| + |f(x) + 3m - 2|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

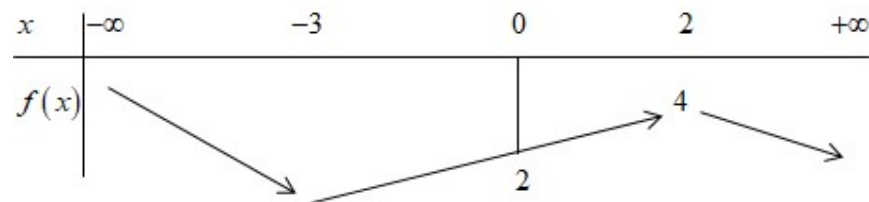


- A. 207. B. 209. C. 210. D. 212.

Câu 24: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là:

- A. 7. B. 6. C. 8. D. 3.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và $f'''(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$.



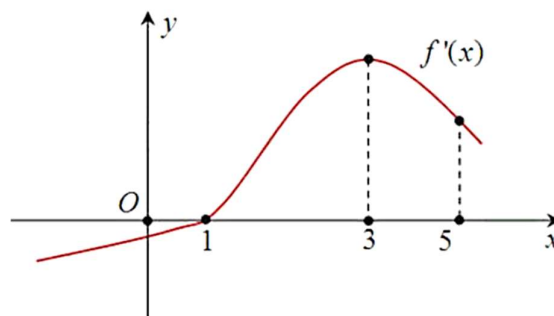
Biết a, x thay đổi trên đoạn $[0; 2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{\left[(f'(x))^2 + 1 \right] \left[2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6 \right]}{\left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(x) \right]^2 \left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(a) \right]} \text{ bằng } \frac{m}{n} \text{ (phân số tối giản, } m, n \in \mathbb{Z}_+).$$

Tổng $m + n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. (20; 25). B. (95; 145). C. (45; 75). D. (75; 95).

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $f(x) = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) - f(3) = f(5) - f(1)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Đáp án đúng là



A. $M = f(5); m = f(1)$.

B. $M = f(0); m = f(1)$.

C. $M = f(3); m = f(0)$.

D. $M = f(1); m = f(5)$.

Câu 27: Đặt $M = \max \left| \sqrt{4x - x^2} - mx \right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

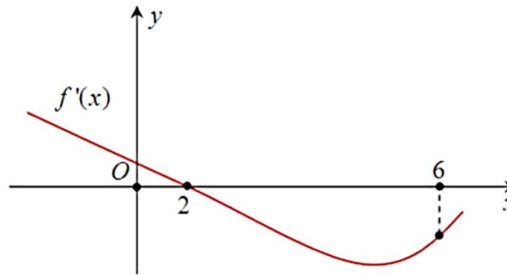
A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. 2.

Câu 28: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6) = f(0) + f(2)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$. Đáp án đúng là



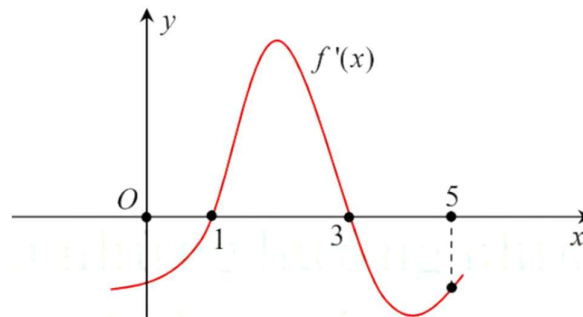
A. $M = f(6); m = f(0)$.

B. $M = f(2); m = f(6)$.

C. $M = f(2); m = f(0)$.

D. $M = f(6); m = f(0)$.

Câu 29: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(2) = f(1) + f(3)$ và $f(0) + f(1) = f(3) + f(5)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Đáp án đúng là



A. $M = f(3); m = f(1)$.

B. $M = f(0); m = f(1)$.

C. $M = f(0); m = f(5)$.

D. $M = f(3); m = f(5)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m . Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^2 - 2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\min g(x) \geq 3m$.

B. $\min g(x) = 3m - 2$.

C. $\min g(x) \leq 3m - 2$.

D. $\min g(x) \geq 3m - 1$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?

A. $f(2) = 3$.

B. $f(2) > 3$.

C. $f(3) < 3$.

D. $f(3) \geq 4$.

Câu 32: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3f(x) + 2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

- A. $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$. B. $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 24$.
C. $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 30$. D. $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 21$.

Câu 33: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y = g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2f(x) - 3g(x) + 2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

- A. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 5$. B. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 3$.
C. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$. D. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 2$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y = 2f(x) - x^2 + 6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau?

- A. $f(0) \leq 4$. B. $f(3) \leq -1$. C. $f(2) \geq 0$. D. $f(2) \leq -2$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có $\min f(x) = 4$. Khi đó kết luận đúng về nghiệm của bất phương trình $f(x) > 4$ sẽ là:

- A. luôn có nghiệm. B. luôn vô nghiệm.
C. có thể có nghiệm có thể vô nghiệm. D. luôn có đúng một nghiệm duy nhất.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2ax + 6a - 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m . Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?

- A. $m \geq -3$. B. $m < -3$. C. $m \leq 78$. D. $m \leq 3$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m . Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là **luôn đúng**?

- A. $m \leq 3$. B. $M \geq 9$. C. $m \leq 5$. D. $M \geq 6$.

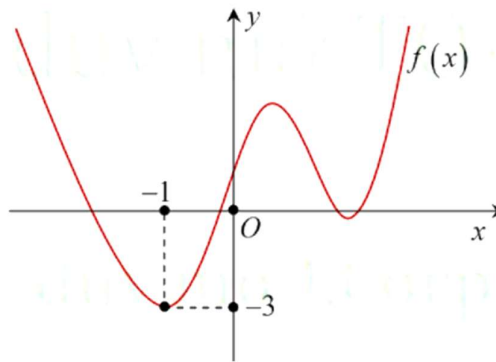
Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m . Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M - 2)(m - 5)$ có thể bằng

- A. -1 . B. -3 . C. 0 . D. 10 .

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2ax + 4a - 7$, có giá trị nhỏ nhất là m . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

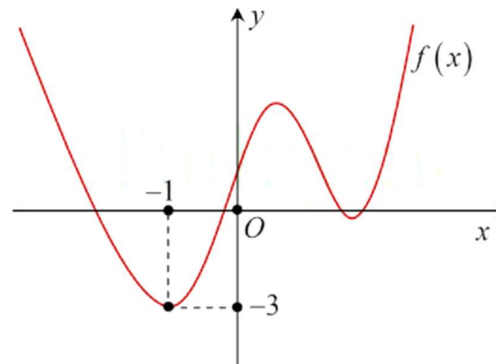
- A. 11 . B. 8 . C. 9 . D. 10 .

Câu 40: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1$ tương ứng bằng:



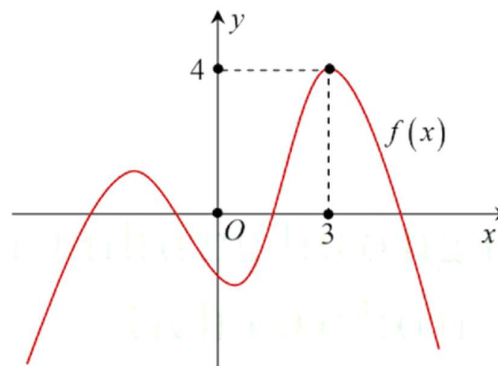
- A. 1. B. 3. C. -1. D. -2.

Câu 41: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x+3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng:



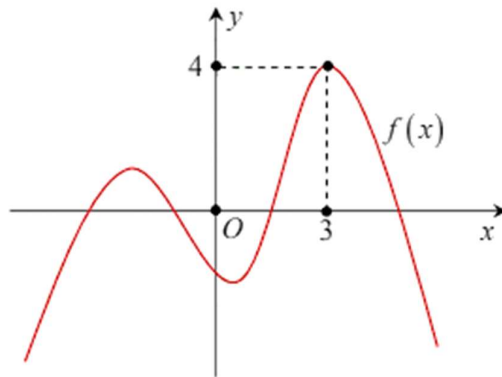
- A. -1. B. 0. C. $-\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m) + 2f(x^2-2x)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc tập S bằng:



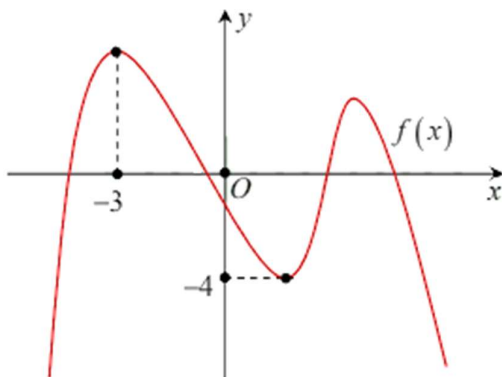
- A. 6. B. 3. C. 0. D. -2.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $(2m-n)$ bằng



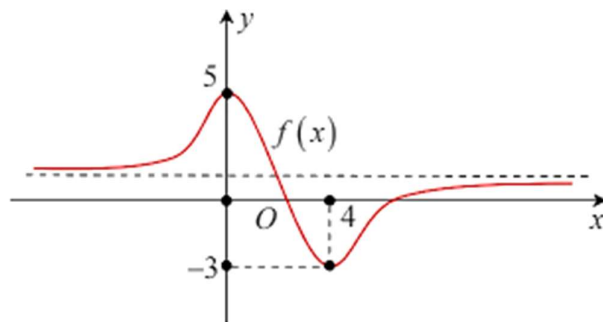
- A. 3. B. 0. C. 5. D. 1.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x))$ đạt giá trị nhỏ nhất?



- A. 6. B. 4. C. 3. D. 8.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x-m) - f(3x+n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T = 2m + 3n$ bằng



- A. -11. B. -7. C. -13. D. 5.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1; 3)$?

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2(2m-1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3; 11]$?

- A. 6. B. 31. C. 4. D. 5.

Câu 48: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1; 3)$?

A. 8.

B. 9.

C. 7.

D. 11.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-2; 3)$?

A. 30.

B. 18.

C. 32.

D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.C	5.D	6.D	7.C	8.D	9.D	10.D
11.A	12.A	13.B	14.D	15.D	16.A	17.D	18.B	19.B	20.B
21.C	22.D	23.C	24.A	25.C	26.B	27.B	28.C	29.D	30.D
31.A	32.A	33.C	34.A	35.C	36.C	37.D	38.B	39.D	40.D
41.A	42.C	43.C	44.A	45.C	46.A	47.B	48.C	49.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Ta có: $f(x) - |f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ 2f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow a = |f(x) - |f(x)|| \in [0; 1], \forall x \in \mathbb{R}$.

Có $b = -a^2 + a + \frac{3}{4} \in \left[\frac{3}{4}; 1\right], \forall a \in [0; 1]$. Xét $g(b) = (b+1)^2 [1 + b^2 \cdot (2-b)^2]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(b) &= 2(b+1) [1 + b^2 \cdot (2-b)^2] + (b+1)^2 [2b \cdot (2-b) - 2b^2 \cdot (2-b)] \\ &= 2(b+1) [1 + b^2 \cdot (4 - 4b + b^2) + (b+1) \cdot (4b - 4b^2 + b^3) - (b+1) \cdot (2b^2 - b^3)] \\ &= 2(b+1) [1 + 4b^2 - 4b^3 + b^4 + 4b^2 - 4b^3 + b^4 + 4b - 4b^2 + b^3 - 2b^3 + b^4 - 2b^2 + b^3] \\ &= 2(b+1) [3b^4 - 8b^3 + 2b^2 + 4b + 1] \\ &= 2(b+1) [b(b-2)(3b^2 - 2b - 2) + 1] \end{aligned}$$

Ta có $b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \Rightarrow b-2 < 0; 3b^2 - 2b - 2 < 0 \Rightarrow g'(b) > 0, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(b) = (b+1)^2 [1 + b^2 \cdot (2-b)^2]$ đồng biến trên $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$

$$\Rightarrow g(b) \leq g(1) = 8, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$$

$$\text{Xét } h(b) = -\frac{2}{1+b\sqrt{2-b}} \Rightarrow h'(b) = -\frac{4-3b}{\sqrt{2-b}(1+b\sqrt{2-b})^2}$$

$$\Rightarrow h'(b) > 0, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \quad \Rightarrow h(b) \leq h(1) = -1, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(b+1)^2 [1 + b^2 \cdot (2-b)^2]} - \frac{2}{1+b\sqrt{2-b}} \leq \frac{3}{8} \sqrt[3]{8} - 1 = -\frac{1}{4}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } b = 1.$$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của S bằng $-\frac{1}{4}$ và $k = \frac{9}{4}$.

Câu 2: Ta có :

$$|x^3 - 3x + m| \leq 16 \quad \forall x \in [0; 3]$$

$$\Leftrightarrow -16 \leq x^3 - 3x + m \leq 16 \quad \forall x \in [0; 3]$$

$$\Leftrightarrow -16 - m \leq x^3 - 3x \leq 16 - m \quad \forall x \in [0; 3]$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ với $x \in [0; 3]$. Khi đó : $\begin{cases} \max_{[0;3]} g(x) = 18 \\ \min_{[0;3]} g(x) = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18 \leq 16 - m \\ -2 \geq -16 - m \end{cases} \Leftrightarrow -14 \leq m \leq -2.$$

Dấu '=' xảy ra khi $\begin{cases} m = -14 \\ m = -2 \end{cases}$. Tổng tất cả các phân tử của S bằng -16 .

Câu 3: $f'(x) = (x-1)(3x+2m^2-1)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+2m^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (1; 2) \\ x = \frac{1-2m^2}{3} \notin (1; 2) \forall m \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	1	2
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	$-\frac{3}{2}m$	$m^2 + 2 - \frac{3}{2}m$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min_{[1;2]} f(x) = -\frac{3}{2}m$ và $\max_{[1;2]} f(x) = m^2 - \frac{3}{2}m + 2 > 0 \forall m$.

Xét phương trình $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| = \frac{9}{4}$ (1).

Trường hợp 1: $-\frac{3}{2}m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$(1) \Leftrightarrow m^2 - \frac{3}{2}m + 2 - \frac{3}{2}m = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m^2 - 3m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3+\sqrt{10}}{2} \\ m = \frac{3-\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Do $m < 0$ nên $m = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$.

Trường hợp 2: $-\frac{3}{2}m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \max |f(x)| = \frac{9}{4}$$

$$\max |f(x)| = \max \left\{ \frac{3m}{2}; m^2 - \frac{3m}{2} + 2 \right\}$$

$$\max |f(x)| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3m}{2} = \frac{9}{4} \\ \frac{3m}{2} \geq m^2 - \frac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\max |f(x)| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \frac{3m}{2} + 2 = \frac{9}{4} \\ \frac{3m}{2} \leq m^2 - \frac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 + \sqrt{13}}{4} \text{ (ktm)} \\ m = \frac{3 - \sqrt{13}}{4} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy $S = \frac{3 - \sqrt{10}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{36} - \sqrt{10})$ nên $a = 36, b = 10$ giá trị $\frac{b}{a} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Câu 4: Xét $g(x) = f(2x) - 4x$ (*)

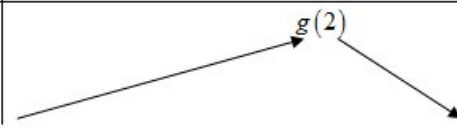
Đặt $u = 2x, x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right] \Rightarrow u \in [-3; 4]$

Khi đó theo cách đặt (*) trở thành: $g_1(u) = f(u) - 2u \Rightarrow g'_1(u) = f'(u) - 2$,

$$g'_1(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \in [-3; 4] \\ u = 2 \in [-3; 4] \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g_1(u)$ trên $[-3; 4]$

u	-3		0		2		4
$g'_1(u)$		+	0	+	0	-	
$g(u)$					$g(2)$		



Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3; 4]} g_1(u) = g_1(2) = f(2) - 4$.

Câu 5: Đặt $f(x) = t, t \in (-\infty; a], a > 2$

Ta có $g(x) = \frac{2f(x) - 2}{f^2(x) - 2f(x) + 2} = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}$.

Đặt $h(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}, t \in (-\infty; a], a > 2$.

$$h'(t) = \frac{-2(t^2 - 2t)}{(t^2 - 2t + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$.

t	$-\infty$	0	2	a
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0
$h(t)$	0	-1	1	$h(a)$

Ta có $h(a) = \frac{2a-2}{a^2-2a+2} > 0 \quad \forall a > 2$ nên từ bảng biến thiên suy ra:

$$\max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{(-\infty; a]} h(t) = 1 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hay } f(x) = 2 \text{ (phương trình này có 3 nghiệm).}$$

$$\min_{\mathbb{R}} g(x) = \min_{(-\infty; a]} h(t) = -1 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hay } f(x) = 0 \text{ (phương trình này có 4 nghiệm).}$$

Vậy có tất cả 7 giá trị của x sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6: Ta có: $\min_{[1;2]} f(x) + \max_{[1;2]} f(x) = \frac{16}{3}$ (1). Đặt $h(x) = \frac{x+m}{x+1}$ có đạo hàm: $h'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m = 1$ thì $\min_{[1;2]} f(x) = \max_{[1;2]} f(x) = 1$ (loại)

$$\text{Nếu } m = 1 \text{ thì } h'(x) \neq 0, \forall x \neq 1 \text{ và } h(1) = \frac{m+1}{2}; h(2) = \frac{m+2}{3}$$

Trường hợp 1: $h(1), h(2) \geq 0$ khi đó $m \geq -1$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 5 \text{ (TM)}$$

Trường hợp 2: $h(1), h(2) \leq 0$ khi đó $m \leq -2$

$$\text{Phương trình 1 (1)} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = -\frac{16}{3} \Rightarrow m = \frac{-39}{5} \text{ (TM)}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} h(1) \cdot h(2) < 0 \\ \left| \frac{m+1}{2} \right| \leq \left| \frac{m+2}{3} \right| \end{cases} \text{ khi đó } -\frac{7}{5} < m < -1$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 14 \text{ (không TM)}$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} h(1) \cdot h(2) < 0 \\ \left| \frac{m+2}{3} \right| < \left| \frac{m+1}{2} \right| \end{cases} \text{ khi đó } -2 < m < -\frac{7}{5}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow -\frac{m+1}{2} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = -\frac{35}{3} \text{ (không TM)}$$

Vậy $m = 5, m = \frac{-39}{5}$ nên có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 7: Cách 1:

Đặt $t = f(x^3 + 2x)$. Vì $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [-6; 5]$. Khi đó, $g(x) = |t + n|$ với $n = 3f(m)$.

$$\text{Do đó, } \max_{[-1;1]} g(x) = \max \{|n+5|; |n-6|\} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |n+5| = 8 \\ |n+5| \geq |n-6| \end{cases} \Leftrightarrow n = 3$$

$$\begin{cases} |n-6| = 8 \\ |n-6| > |n+5| \end{cases} \Leftrightarrow n = -2$$

Với $n = 3 \Leftrightarrow 3.f(m) = 3 \Leftrightarrow f(m) = 1$, suy ra có 5 giá trị của m .

Với $n = -2 \Leftrightarrow 3.f(m) = -2 \Leftrightarrow f(m) = -\frac{2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m .

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Vì $x \in [-1;1]$ nên $-3 \leq x^3 + 3x \leq 3 \Rightarrow -6 \leq f(x^3 + 3x) \leq 5$.

Ta có: $|f(x^3 + 3x) + 3f(m)| \leq 8, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow -8 \leq f(x^3 + 3x) + 3f(m) \leq 8, \forall x \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 + 3x) \leq 8 - 3f(m) \\ -8 - 3f(m) \leq f(x^3 + 3x) \end{cases} \forall x \in [-1;1] \Rightarrow \begin{cases} 5 \leq 8 - 3f(m) \\ -8 - 3f(m) \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) \leq 1 \\ f(m) \geq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \max |f(x^3 + 3x) + 3f(m)| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $f(m) = 1$, có 5 giá trị của m . Với $f(m) = -\frac{2}{3}$, có 6 giá trị của m .

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8: Ta có:
$$\begin{cases} |f(-1)| \leq 1 \\ \left| f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right| \leq 1 \\ |f(0)| \leq 1 \\ \left| f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right| \leq 1 \\ |f(1)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |8 - a + b - c + d| \leq 1 \\ \left| 2 - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d \right| \leq 1 \\ |d| \leq 1 \\ \left| 2 + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d \right| \leq 1 \\ |8 + a + b + c + d| \leq 1 \end{cases}$$

$$|4 + b + 2d| \leq \left| 2 - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d \right| + \left| 2 + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d \right| \leq 2 \Rightarrow \left| 2 + \frac{b}{2} + d \right| \leq 1$$

$$\text{Tương tự: } |16 + 2b + 2d| \leq 2 \Rightarrow |8 + b + d| \leq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra kết hợp với } |d| \leq 1 \text{ khi: } \begin{cases} 2 + \frac{b}{2} + d = -1 \\ 8 + b + d = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} |-a-c+1| \leq 1 \\ \left| -\frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} - 1 \right| \leq 1 \\ \left| \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} - 1 \right| \leq 1 \\ |a+c+1| \leq 1 \end{cases} \quad \text{dấu "}" xảy ra khi } a=c=0$$

$$\text{Vậy } f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\text{Suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 65$$

Chú ý: Ta có thể suy luận như sau để được nhanh đáp số:

Vì $\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$ nên nếu đặt $x = \cos t$ thì $\cos(4t) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ và như vậy hàm $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$

Câu 9: Điều kiện: $x \in [0; 2]$. Ta có: $g(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + |4x-2| + |6-4x|}{|2x-1| + |2x-3|} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}{|2x-1| + |2x-3|} + 2$.

$$\text{Do } (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2 = 2 + 2\sqrt{x(2-x)} \leq 4 \text{ vì } \sqrt{x(2-x)} \leq 1, \forall x \in [0; 2].$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2 \leq |2x-1| + |3-2x| \Rightarrow 2 < g(x) \leq 3 \Rightarrow f(g(x)) \leq 4 \quad (1).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Ta có: } 3 - 2x + x^2 \in [2; 3], \forall x \in [0; 2] \Rightarrow -f(3 - 2x + x^2) \leq 0 \quad (2).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Ta có: } 2 - \sqrt{4 - m^2} \in [0; 2] \Rightarrow f(2 - \sqrt{4 - m^2}) \leq 4 \quad (3)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = 0.$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow h(x) \leq 4 - 0 + 4 = 8 \Rightarrow \max h(x) = 8 \Leftrightarrow x = 1; m = 0.$$

Câu 10: Ta có: $\min_{[-1;1]} |f(x)| > \frac{3}{4} \Leftrightarrow |f(x)| > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] & (1) \\ f(x) < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] & (2) \end{cases}$.

Trường hợp 1: $f(x) > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1]$.

Nhận thấy $f(0) = -2 < \frac{3}{4}$. Nên trường hợp (1) không tìm được m .

Trường hợp 2: $f(x) < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1]$.

Ta có: $f(x) < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1]$.

$$\Leftrightarrow \frac{2x^4 - mx - 4}{x + 2} < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] \Leftrightarrow 8x^4 - 4mx - 16 < -3x - 6, \forall x \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow 4mx > 8x^4 + 3x - 10, \forall x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -10, \text{ khi } x = 0 \\ 4m > 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}, \forall x \in (0; 1] \quad (*) \\ 4m < 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}, \forall x \in [-1; 0) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}$ có $g'(x) = 24x^2 + \frac{10}{x^2} = \frac{24x^4 + 10}{x^2} > 0, \forall x \neq 0$.

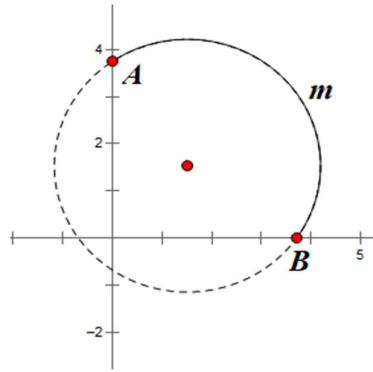
Bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$g'(x)$			
$g(x)$	5	$+\infty$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R} \text{ khi } x = 0 \\ 4m > \max_{(0;1]} g(x) \\ 4m < \min_{[-1;0)} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 1 \\ 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m < \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}.$$

Câu 11: Cách 1:



Đặt $X = \sqrt{x+1}, Y = \sqrt{y+2}$ với $X, Y \geq 0$ suy ra: $x = X^2 - 1, y = Y^2 - 2$

Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \Rightarrow X^2 + Y^2 - 3X - 3Y - 3 = 0$ (1)

Tập hợp các điểm $M(X, Y)$ thỏa mãn phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán

kính $R = \frac{\sqrt{30}}{2}$. Gọi $A = (C) \cap (Oy) \Rightarrow A\left(0; \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right); B = (C) \cap (Ox) \Rightarrow B\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; 0\right)$. Vì

$X, Y \geq 0$ nên ta chỉ xét các điểm $M \in \widehat{AmB}$.

Ta có: $P = x + y = X^2 + Y^2 - 3 = OM^2 - 3$ suy ra $P_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} = OA = OB$.

Mặt khác: $OA = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

$$\text{Vậy } \min P = OA^2 - 3 = \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right)^2 - 3 = \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2}.$$

Cách 2:

ĐK: $x \geq 1; y \geq -2$. Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2}, (x + y > 0)$.

$$\Rightarrow (x + y)^2 = 9(x + y + 3) + 18\sqrt{(x+1)(y+2)}$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 - 9(x + y) - 27 \geq 0 \Rightarrow x + y \geq \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{13 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{13 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

Câu 12: Đặt $t = 2 - \cos x, t \in [1; 3]$. Ta có $f(t) = t^3 - 3t; g_1(t) = |t^3 - 3t + m|$

Xét hàm số $h(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1; 3]$; $h'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (tm) \\ t = -1 & (l) \end{cases}$.

$$h(1) = m - 2, h(3) = m + 18.$$

$$\text{Trường hợp 1 : } m > 2 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} g_1(t) = m - 2 \\ \max_{[1;3]} g_1(t) = m + 18 \end{cases}$$

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có : } 3(m + 18) + m - 2 = 100 \Leftrightarrow m = 12 \text{ (tm)}$$

$$\text{Trường hợp 2 : } m < -18 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} g_1(t) = -m - 18 \\ \max_{[1;3]} g_1(t) = -m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có : } 3(-m + 2) - m - 18 = 100 \Leftrightarrow m = -28 \text{ (tm)}$$

$$\text{Trường hợp 3 : } -18 \leq m \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} g_1(t) = 0 \\ \max_{[1;3]} g_1(t) = \max\{|m - 2|; |m + 18|\} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } |m - 2| \geq |m + 18| \Leftrightarrow m \leq -8.$$

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có : } 3|m - 2| = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{106}{3} & (l) \\ m = \frac{-94}{3} & (l) \end{cases} \text{ vì } -18 \leq m \leq -8$$

$$\text{Nếu } |m + 18| \geq |m - 2| \Leftrightarrow m \geq -8.$$

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có : } 3|m + 18| = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-154}{3} & (l) \\ m = \frac{46}{3} & (l) \end{cases} \text{ vì } -8 \leq m \leq 2$$

Vậy $S = \{12; -28\} \Rightarrow 12 - 28 = -16$

Câu 13: Cách 1:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : y = \frac{ax+b}{2x^2+2} \Leftrightarrow 2yx^2 - ax + 2y - b = 0 \quad (1)$

Để có $\max y, \min y$ thì phương trình (1) phải có nghiệm x

Trường hợp 1: $y = 0$, khi đó $(1) \Leftrightarrow -ax - b = 0$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$.

Với $a = b = 0$ thì $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $\min y + \max y = 0 \leq 5$ (thỏa mãn).

Với $a \neq 0$ thì $y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Trường hợp 2: $y \neq 0$. Xét $\Delta = -16y^2 + 8by + a^2$.

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -16y^2 + 8by + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4} \leq y \leq \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$

$\Rightarrow M = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{4}; m = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$

$M^2 + m^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{8} \leq 5 \Rightarrow a^2 + 2b^2 \leq 40(*)$.

Suy ra $b^2 \leq 20 \Rightarrow -4 \leq b \leq 4$ (do $b \in \mathbb{Z}$).

Nhận xét nếu $a^2 \leq M$ thì có $2 \times [\sqrt{M}] + 1$ số nguyên a thỏa mãn.

Với $b = \pm 4 \Rightarrow a^2 \leq 8$. Có 5 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 10 cặp $(a; b)$.

Với $b = \pm 3 \Rightarrow a^2 \leq 22$. Có 9 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 18 cặp $(a; b)$.

Với $b = \pm 2 \Rightarrow a^2 \leq 32$. Có 11 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 22 cặp $(a; b)$.

Với $b = \pm 1 \Rightarrow a^2 \leq 38$. Có 13 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 26 cặp $(a; b)$.

Với $b = 0 \Rightarrow a^2 \leq 40$. Có 13 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 13 cặp $(a; b)$.

Tổng cộng có 89 cặp $(a; b)$ cần tìm.

Cách 2:

(C): $y = \frac{ax+b}{2x^2+2} \Rightarrow y' = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{2(x^2+1)^2}$

Nếu $a = b = 0$ thì $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $M = m = 0 \Rightarrow M^2 + m^2 \leq 5$ (thỏa mãn).

Xét a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó $y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ (Giả sử $x_1 < x_2$)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên (C) có dạng



hoặc



M, m nhận $y(x_1), y(x_2)$.

Ta có công thức cực trị của hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ là $y(x_{ct}) = \frac{u'}{v'} = \frac{a}{4x_{ct}}$

$$\Rightarrow M^2 + m^2 = \frac{a^2}{4^2 x_1^2} + \frac{a^2}{4^2 x_2^2} = \frac{a^2}{16} \left(\frac{4b^2}{a^2} + 2 \right) \leq 5 \Leftrightarrow 2b^2 + a^2 \leq 40.$$

(đến đây thực hiện tương tự cách 1.)

Câu 14: Đặt $f(x) = \frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + (3-3m^2)x + 1$. Suy ra

$$f'(x) = x^2 - 2(m+2)x + 3 - 3m^2 = (x+m-1)(x-3m-3).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1-m \\ x_2 = 3+3m. \end{cases} \text{ Vì } m \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \text{ nên } \begin{cases} x_1 \in \left(1; \frac{5}{3}\right) \\ x_2 \in (1; 3) \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 \notin [-1; 1].$$

Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[-1; 1]$. Suy ra $\max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max_{[-1; 1]} \{|f(-1)|; |f(1)|\}$.

$$|f(1)| = \left| -3m^2 - m + \frac{7}{3} \right| = -3m^2 - m + \frac{7}{3} \Leftrightarrow |f(-1)| = \left| 3m^2 - m - \frac{13}{3} \right| = -3m^2 + m + \frac{13}{3}.$$

$$\max_{[-1; 1]} y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(1)| = 4 \\ |f(-1)| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 - m + \frac{7}{3} = 4 \\ -3m^2 + m + \frac{13}{3} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1-\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 15: Đặt $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6mx^2 + 12mx + m$. Ta có: $f(1) = 7m - 1$ và $f(2) = m + 16$.

$$\text{Điều kiện cần: giả sử } \max_{[1; 2]} |f(x)| = 18 \Rightarrow \begin{cases} |f(1)| = |7m - 1| \leq 18 \\ |f(2)| = |m + 16| \leq 18 \end{cases} \Rightarrow -\frac{17}{7} \leq m \leq 2.$$

$$\text{Vậy chỉ cần xét } m \in \left[-\frac{17}{7}; 2\right].$$

$$\text{Điều kiện đủ: Ta có: } f'(x) = 12(x-1)(x^2 - m).$$

Trường hợp 1: $-\frac{17}{7} \leq m \leq 1$, khi đó: $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2]$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$, mà $f(2) = m + 16 \in (0; 17)$ nên yêu cầu bài toán tương đương $f(1) = 7m - 1 = -18 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{7}$.

Trường hợp 2: $1 < m \leq 2$, khi đó: $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{m} \in [1; 2]$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$f(1)$		$f(2)$

$f(\sqrt{m})$

Với: $f(\sqrt{m}) = 3m^2 - 4m\sqrt{m} - 6m^2 + 12m\sqrt{m} + m = 3m\sqrt{m}(2 - \sqrt{m}) + 2m\sqrt{m} + m > 0$.

$$\text{Do đó YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 7m - 1 = 18 \\ f(2) = m + 16 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{19}{7} \\ m = 2 \end{cases} \quad (I).$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là: $m = -\frac{17}{7}, m = 2$.

Câu 16: $[f(x) - x] \cdot f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow [f(x) - x] \cdot f(x) = (x^3 + 2x)[x^3 + 2x - x], \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x^3 - 2x] \cdot [f(x) + x^3 - x] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 + x \end{cases}$$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $f(x) = -x^3 + x$.

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(1) = 3 = \min_{[1; 2]} f(x) = m; f(2) = 12 = \max_{[1; 2]} f(x) = M$$

$$\text{Suy ra: } 3M - m = 3 \cdot 12 - 3 = 33$$

Câu 17: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y = -1$ có nghiệm.

$$\text{Ta có } y \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| + 4x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| \geq -4x - 1, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \leq 4x + 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \\ x^2 - 2x + m \geq -4x - 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \left(\text{vì } x > -\frac{1}{4} \text{ thì } (*) \text{ luôn đúng} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 + 6x + 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \\ m \geq -x^2 - 2x - 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0 \quad (1).$$

Ta có $y = -1$ có nghiệm $\Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -4x - 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m = 4x + 1 \\ x^2 - 2x + m = -4x - 1 \end{cases}$ có

nghiệm $x \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 6x + 1 \\ m = -x^2 - 2x - 1 \end{cases}$ có nghiệm $x \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{9}{16} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $m = 0$

Câu 18: Đặt $g(x) = x^3 - 12x + m \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 12, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (1; 3) \\ x = -2 \notin (1; 3) \end{cases}$

Ta có: $g(1) = m - 11; g(2) = m - 16; g(3) = m - 9 \Rightarrow \min_{[1;3]} g(x) = m - 16; \max_{[1;3]} g(x) = m - 9$

Do đó: $\max_{[1;3]} f(x) = \max \{|m - 9|; |m - 16|\}$

$$\begin{cases} |m - 9| \leq 20 \\ |m - 16| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20 \leq m - 9 \leq 20 \\ -20 \leq m - 16 \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11 \leq m \leq 29 \\ -4 \leq m \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 29.$$

Vậy có 34 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ 2M \geq 2f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ 2M \geq 2|1 + a + b| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b| \geq |1 - a + b + 9 + 3a + b - 2 - 2a - 2b|$$

$$\Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2 \Rightarrow M_{\min} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} -a + b + 1 = 2 \\ 3a + b + 9 = 2 \\ -1 - a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$

Thử lại thấy thỏa $M = 2$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Vậy $a + 2b = -4$.

Câu 20: Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $f(x) \in [-2; 2]$ với $x \in [-2; 2]$.

Đặt $t = f(x) + 2$ với $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [0; 4]$ với $x \in [-2; 2]$.

Xét $h(t) = |2t + m| - t - 1 = |2t + m - t - 1| = |t + m - 1|$ (vì $2t + m \geq 0$ do $t \in [0; 4], m \in [0; 20]$).

Trường hợp 1: Xét $m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1 \Rightarrow \min_{[-2;2]} g(x) = \min_{[0;4]} h(t) = m - 1 \geq 1 \Rightarrow m \geq 2 \quad (tm)$

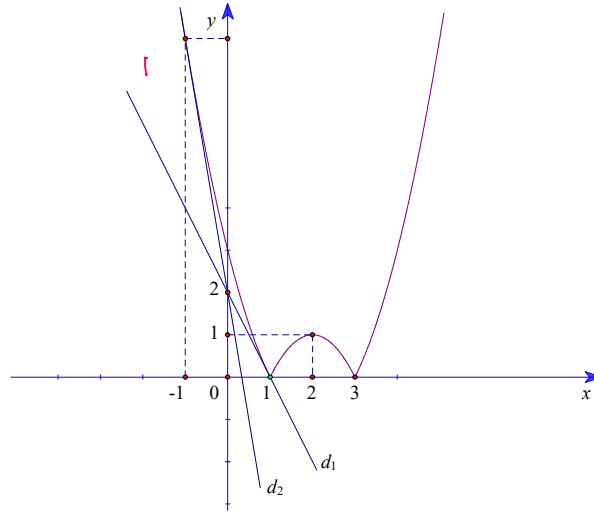
Trường hợp 2: Xét $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$ (do $m \in [0; 20]$) $\Rightarrow \min_{x \in [-2; 2]} g(x) = \min_{t \in [0; 4]} |h(t)| = 0 \geq 1$ (ktm).

Trường hợp 3: Xét $m+3 \leq 0 \Rightarrow m \leq -3$ (không thỏa mãn $m \in [0; 20]$).

Ta có $\min_{[-2; 2]} g(x) \geq 1 \Leftrightarrow m-1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2$ mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 20]$ nên $m \in \{2; 3; \dots; 20\}$.

Suy ra có 19 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 21:



Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ lớn hơn 2 thì:

$$4ax + |x^2 - 4x + 3| > 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } |x^2 - 4x + 3| > 2 - 4ax \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ có đồ thị (C)

Đường thẳng $d: y = 2 - 4ax$ đi qua điểm cố định $(0; 2)$.

Đường thẳng $d: y = 2 - 4ax$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ ($x \leq 1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4ax = x^2 - 4x + 3 \\ -4a = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow d_1: y = 2 - 2x \\ x = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow d_2: y = 2 - 6x \end{cases}$$

Để $|x^2 - 4x + 3| > 2 - 4ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $d: y = 2 - 4ax$ nằm giữa $d_1, d_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$.

Câu 22: Đặt $t = \sqrt{x+2}$ với $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{3}]$ và $x = t^2 - 2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t) = \left| \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t^2} \right|$. Khi đó: $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t)$.

Xét hàm số $h(t) = \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t^2}$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$.

$$h'(t) = \frac{4t^2 + 8mt}{t^4} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{3}] \text{ và } m > 0.$$

$$\text{suy ra } \min_{[1; \sqrt{3}]} h(t) = -2m - 4 \text{ và } \max_{[1; \sqrt{3}]} h(t) = \frac{2m - 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện cần: Ta có: } \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = a \in (0; 1) &\Rightarrow h(1) \cdot h(\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow (-2m - 4) \left(\frac{2m - 4\sqrt{3}}{3} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow -2 < m < 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3\}$.

Điều kiện đủ: $m \in \{1; 2; 3\}$

$$\text{Khi đó: } \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ g(1); g(\sqrt{3}) \right\} = \min \left\{ |2m + 4|; \left| \frac{2m - 4\sqrt{3}}{3} \right| \right\}.$$

$$+ m = 1: \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ 6; \frac{4\sqrt{3} - 2}{3} \right\} = \frac{4\sqrt{3} - 2}{3} > 1 \text{ (loại).}$$

$$+ m = 2: \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ 8; \frac{4\sqrt{3} - 4}{3} \right\} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{3} \in (0; 1) \text{ (nhận).}$$

$$+ m = 3: \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ 10; \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} \right\} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} \in (0; 1) \text{ (nhận).}$$

Vậy $m \in \{2; 3\}$ nên có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Với $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq 20$, ta có $x \in [-2; 2] \Rightarrow t = f(x) \in [-2; 2]$.

$$\text{Khi đó } h(t) = |2t + m + 4| + |t + 3m - 2| - 2 \geq 0, \forall t \in [-2; 2]$$

$$\Rightarrow h(t) = 2t + m + 2 + |t + 3m - 2| \geq 0, \forall t \in [-2; 2]$$

Trường hợp 1: $t \geq 2 - 3m \Rightarrow h(t) = 3t + 4m$

$$+) \begin{cases} 2 - 3m \in [-2; 2] \\ \min_{[-2; 2]} h(t) = h(2 - 3m) = 6 - 5m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{6}{5} \Rightarrow m = 1$$

$$+) \begin{cases} 2 - 3m \leq -2 \\ \min_{[-2; 2]} h(t) = h(-2) = 4m - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \{2; 3; \dots; 20\} \Rightarrow m \in \{1; 2; \dots; 20\}$$

Trường hợp 2: $t < 2 - 3m$ không cần xét nữa vì đã lấy tất cả các giá trị m nguyên thuộc đoạn cho trong đề bài.

$$\text{Vậy tổng các phần tử của } S \text{ là } 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{(1 + 20)20}{2} = 210.$$

$$\text{Câu 24: Ta có } y = |x^2 - 5x + 4| + mx = \begin{cases} x^2 - (5 - m)x + 4, & x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \\ -x^2 + (5 + m)x + 4, & x \in [1, 4] \end{cases}$$

Trường hợp 1: $0 < m < 3 \Rightarrow 1 < \frac{5-m}{2} < \frac{m+5}{2} < 4$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	1	$\frac{5-m}{2}$	$\frac{m+5}{2}$	4	$+\infty$
y	$+\infty$		m		$4m$	$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1 thì $m > 1$, kết hợp với điều kiện $m < 3$ và m nguyên dương ta được $m = 2$.

Trường hợp 2: $m \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{m+5}{2} \geq 4 \\ \frac{5-m}{2} \leq 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	$\frac{5-m}{2}$	1	4	$\frac{m+5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$		$\frac{-m^2+10m-9}{4}$			$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1 thì $\frac{-m^2+10m-9}{4} > 1 \Leftrightarrow -m^2+10m-9 > 4 \Leftrightarrow m^2-10m+13 < 0 \Leftrightarrow 5-2\sqrt{3} < m < 5+2\sqrt{3}$. Kết hợp với điều kiện $m \geq 3$ và m nguyên dương ta được $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Gộp hai trường hợp ta được tập các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 25: Do $f''(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $f(x)$ có đồ thị lõm trên $(0; +\infty)$, tức là tiếp tuyến ở phía trên đồ thị. Suy ra $f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \forall x \in (0; +\infty)$
 $\Rightarrow f(a) \leq f'(0)(a-0) + f(0) = af'(0) + 2$.

Xét trên $[0; 2]$, ta có

x	0	2
$f''(x)$	-	
$f'(x)$		0
$f(x)$	2	4

Suy ra $f(2 - \sqrt{4 - 2x}) \leq f(2) = 4$, do đó $f(a) + f(2 - \sqrt{4 - 2x}) \leq af'(0) + 6$.

Ta chứng minh $2f'(0) + (a - x)f'(a) + 6 \geq af'(0) + 6 \Leftrightarrow (2 - a)f'(0) \geq (x - a)f'(a) (*)$

Thật vậy:

Nếu $x \leq a$ thì $VT(*) \geq 0 \geq VP(*)$.

Nếu $x \geq a$ thì $\begin{cases} 2 - a \geq x - a > 0 \\ f'(0) \geq f'(a) \end{cases}$ nên $(*)$ đúng.

Do đó $\frac{2f'(0) + (a - x)f'(a) + 6}{f(2 - \sqrt{4 - 2x}) + f(a)} \geq 1$.

Lại có $[f'(x)]^2 + 1 \geq 1$ và $f(2 - \sqrt{4 - 2x}) + f(x) \leq 2f(2) = 8$ nên suy ra $S \geq \frac{1}{64}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0; x = 2$. Như vậy $m = 1, n = 64 \Rightarrow m + n = 65$.

Câu 26: Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ như sau:

x	$[0$	1	3	$5]$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$			
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(5)$

Suy ra: $\min_{x \in [0; 5]} f(x) = f(1) = m$ và $\begin{cases} \max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) \\ \max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(5) \end{cases}$.

Từ giả thiết: $f(0) - f(3) = f(5) - f(1) \Leftrightarrow f(5) - f(0) = f(1) - f(3) < 0 \Leftrightarrow f(5) < f(0)$.

Suy ra, $\max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) = M$.

Câu 27: Ta có: $|\sqrt{4x - x^2} - mx| \leq M, \forall x \in [0; 4]$ và $M \geq 0$

Với $x = 0$ thỏa mãn.

Với $x \in (0; 4]$ ta có:

$$-M \leq \sqrt{4x - x^2} - mx \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \sqrt{\frac{4}{x} - 1} + \frac{M}{x} = g(x) \\ m \geq \sqrt{\frac{4}{x} - 1} - \frac{M}{x} = h(x) \end{cases}, \forall x \in (0; 4]$$

+ Ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 4]$ nên: $m \leq \min_{(0; 4]} g(x) = g(4) = \frac{M}{4}$

$$+ \text{Ta có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4M^2}{4+M^2} < 4 \Rightarrow \text{Max } h(x) = \frac{4-M^2}{4M}$$

$$\text{Vậy: } \frac{4-M^2}{4M} \leq m \leq \frac{M}{4} \Leftrightarrow M^2 \geq 2 \Leftrightarrow M \geq \sqrt{2} \Rightarrow M_{\min} = \sqrt{2}$$

Câu 28: Chọn C

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ như sau:

x	$[0$	2	$6]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(6)$

Suy ra: $\max_{x \in [0;6]} f(x) = f(2) = M$

Và $\min_{x \in [0;6]} f(x) = f(0); \min_{x \in [0;6]} f(x) = f(6)$

Từ giả thiết: $2f(6) = f(0) + f(2) \Leftrightarrow f(6) - f(0) = f(2) - f(6) > 0 \Leftrightarrow f(6) > f(0)$

Suy ra: $\min_{x \in [0;6]} f(x) = f(0) = m$

Câu 29: Chọn D

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:

x	$[0$	1	2	3	$5]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(5)$	

Suy ra: $\begin{cases} \max_{x \in [0,5]} f(x) = f(0) \\ \max_{x \in [0,5]} f(x) = f(3) \end{cases}$ và $\begin{cases} \min_{x \in [0,5]} f(x) = f(1) \\ \min_{x \in [0,5]} f(x) = f(5) \end{cases}$

Từ giả thiết: $f(0) + f(2) = f(1) + f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(3) = f(1) - f(2) < 0 \Leftrightarrow f(0) < f(3)$

Suy ra: $\max_{x \in [0,5]} f(x) = f(3) = M$

Từ giả thiết: $f(0) + f(1) = f(3) + f(5) \Leftrightarrow f(1) - f(5) = f(3) - f(0) > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(5)$

Suy ra: $\min_{x \in [0,5]} f(x) = f(5) = m$

Câu 30: Chọn D

Tồn tại một giá trị $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho: $f(x) \geq f(x_0) = m$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $3f(x) \geq 3f(x_0) = 3m$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Lại có: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$

Suy ra: $y = 3f(x) + x^2 - 2x \geq 3m + (-1) = 3m - 1$. Suy ra $\min f(x) \geq 3m - 1$

Câu 31: Chọn A

Ta có: $f(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Mà: $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x = 4f(x) + (x-2)^2 - 4 \geq 4.3 - 4 = 8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 3$.

Câu 32: Chọn A

Ta có: $f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = 3f(x) + 2g(x) \leq 3.3 + 2.6 = 21 \Rightarrow \max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$.

Câu 33: Chọn C

Ta có: $f(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = 2f(x) - 3g(x) + 2 \leq 2.6 - 3.3 + 2 = 5 \Rightarrow \max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$.

Câu 34: Chọn A

Theo giả thiết ta có: $y = g(x) = 2f(x) - x^2 + 6x \leq 8$.

Do đó: $g(0) = 2f(0) \leq 8 \Leftrightarrow f(0) \leq 4$.

$g(3) = 2f(3) + 9 \leq 8 \Leftrightarrow f(3) \leq -\frac{1}{2}$.

$g(2) = 2f(2) + 8 \leq 8 \Leftrightarrow f(2) \leq 0$.

Câu 35: Chọn C

Nếu $f(x) = 4$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x) > 4$ vô nghiệm. (Đáp án A sai)

Nếu $f(x) = x^2 + 4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x) > 4 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ có vô số nghiệm. (Đáp án B, D sai)

Câu 36: Chọn C

Ta có $y = f(x) = x^4 - 2ax + 6a - 3 \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(3) = 3^4 - 2a.3 + 6a - 3 \geq m \Leftrightarrow 78 \geq m$.

Câu 37: Chọn D

Ta có: $m \leq y = f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \geq m \\ f(b) \geq m \end{cases} \Rightarrow 18 = f(a) + 2f(b) \geq m + 2m = 3m \Rightarrow m \leq 6$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} f(a) \leq M \\ f(b) \leq M \end{cases} \Rightarrow 18 = f(a) + 2f(b) \leq M + 2M = 3M \Rightarrow M \geq 6$.

Câu 38: Chọn B

Ta có $m \leq y = f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \geq m \\ f(b) \geq m \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \geq m + 2m = 3m \Rightarrow m \leq 4 \Leftrightarrow (m-5) \leq -1$.

Tương tự, ta cũng có được:

$\begin{cases} f(a) \leq M \\ f(b) \leq M \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \leq M + 2M = 3M \Rightarrow M \geq 4 \Rightarrow M - 2 \geq 2$.

Suy ra $(M-2)(m-5) \leq -2$.

Câu 39: Chọn D

Ta có: $m \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $m \leq f(2) = 9$. Suy ra các giá trị nguyên dương của m thỏa $1 \leq m \leq 9$.

Có 9 giá trị.

Câu 40: Chọn D

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1 = f(x) + (x-m)^2 + 1$.

Có $\begin{cases} f(x) \geq f(-1) = -3 \\ (x-m)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) + (x-m)^2 + 1 \geq (-3) + 0 + 1 = -2$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\min g(x) = g(-1) = -2$.

Câu 41: Chọn A

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \geq -3 + 0 - 1 = -4$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x-2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 42: Chọn C

+) Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow f(x) \leq f(3) = 4, x \in \mathbb{R}$.

+) Ta có $\begin{cases} f(3x-m) \leq f(3) = 4 \\ f(x^2-2x) \leq f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2f(x^2-2x) + f(3x-m) \leq 2.4 + 4 = 12$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} 3x-m = 3 \\ x^2-2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x-3 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6; 6\} = S$.

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng 0.

Câu 43: Chọn C

Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4$ nên

$$\begin{cases} f(3x-m) \leq 4 \\ f(x+n) \leq 4 \\ -x^2 + 4x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x \leq 20.$$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=2 \\ 3x-m=3 \\ x+n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ m=3 \\ n=1 \end{cases}$.

Vậy $2m-n=5$.

Câu 44: Chọn A

Ta thấy $\max f(x) = f(-3)$ nên $-f(f(x)) \geq -f(-3)$.

Mặt khác, $x^2 - 2m^2x + m^4 = (x - m^2)^2 \geq 0$.

Từ đó, ta có $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x)) \geq -f(-3)$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=m^2 \\ f(x)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(m^2)=-3 (*)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và (*) tồn tại $a < 0 < b < c < d$ để $\begin{cases} m^2 = a \\ m^2 = b \\ m^2 = c \\ m^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{b} \\ m = \pm\sqrt{c} \\ m = \pm\sqrt{d} \end{cases}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 45: Chọn C

Ta thấy $\begin{cases} \max f(x) = f(0) = 5 \\ \min f(x) = f(4) = -3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} f(2x-m) \geq -3 \\ f(3x+n) \leq 5 \\ x^2 - 2x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow 2f(2x-m) - f(3x+n) + x^2 - 2x \geq -12$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=1 \\ 2x-m=4 \\ 3x+n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ m=-2 \\ n=-3 \end{cases}$

Vậy $T = 2m + 3n = -13$.

Câu 46: Chọn A

Ta có đạo hàm: $f'(x) = 2x - 2m$.

Bảng biến thiên:

x	$(-1$	m	$3)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(m)$	$f(3)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in (-1; 3) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-30; 30]} 0 \leq m \leq 2$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 47: Chọn B

Ta có đạo hàm: $f'(x) = -2x + 4m - 2$.

Bảng biến thiên:

x	$(-3$	$2m-1$	$11]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-3)$	$f(2m-1)$	$f(11)$

x	$(-3$	$11]$	$2m-1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-3)$	$f(11)$	

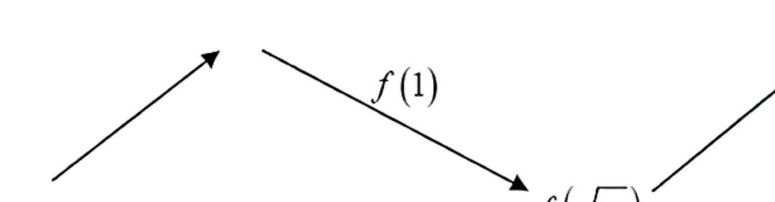
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < 2m - 1 \Leftrightarrow -1 < m \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-30; 30]} 0 \leq m \leq 30$.

Vậy có tất cả 31 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 48: Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1; 3)$ khi có điểm cực tiểu trên $(1; 3)$ và giá trị cực tiểu nhỏ hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m \leq 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(1; 3)$) nên không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1; 3)$.

Khi $m > 0$, hàm số có điểm cực tiểu là $x = \sqrt{m}$

x	$-\sqrt{m}$	$(1$	$\sqrt{m}$	$3)$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$$\text{Khi đó, ta phải có: } \begin{cases} \sqrt{m} \in (1;3) \\ f(\sqrt{m}) \leq f(1) \\ f(\sqrt{m}) \leq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 9 \\ f(\sqrt{m}) \leq f(1) \\ f(\sqrt{m}) \leq f(3) \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{m} \in (1;3) \Leftrightarrow 1 < m < 9 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} 2 \leq m \leq 8$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 49: Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx$. Hàm số $y = x^3 - 3mx^2$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực đại trên $(-2;3)$ và giá trị cực đại lớn hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m = 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(-2;3)$) nên không tồn tại giá trị lớn nhất nhất trên $(-2;3)$.

Khi $m > 0$ thì $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

$$\text{Khi đó ta phải có: } \begin{cases} m > 0 \\ 0 \in (-2;3) \\ f(0) \geq f(-2) \\ f(0) \geq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \geq -8 - 12m \\ 0 \geq 27 - 27m \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Khi $m < 0$ thì $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 2m$

$$\text{Khi đó ta phải có: } \begin{cases} m < 0 \\ 2m \in (-2;3) \\ f(2m) \geq f(-2) \\ f(2m) \geq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ -4m^3 \geq -8 - 12m \\ -4m^3 \geq 27 - 27m \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm}$$

Kết hợp lại ta được: $m \geq 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-30;30]} 1 \leq m \leq 30$.

Vậy có tất cả 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn.