



Chương

Bài 4.

TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTO



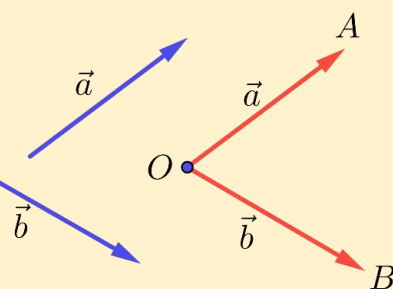
Lý thuyết

1. Góc giữa hai vectơ



Định nghĩa

- » Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.
- » Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.
Góc $\angle AOB$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- » Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.
- » Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



2. Tích vô hướng hai vectơ



Định nghĩa

- » Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$
- » Kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức
- » Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Chú ý

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.



3. Tính chất của tích vô hướng



Các tính chất:

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán). (2) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối)

(3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

(4) $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(5) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn.

(6) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

► **Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:



$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

► **Chú ý:**



$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} AB^2 + AC^2 - BC^2$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} BA^2 + BC^2 - AC^2$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2} CA^2 + CB^2 - AB^2$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính tích vô hướng hai vectơ



Phương

(1) Dựa vào định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

► **Kí hiệu** là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(2) Tính chất:

Với ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối).
3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

(3) Chú ý:

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$



Ví dụ 1.1.

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ với $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$

(3) $(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$

Lời giải

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -3$$

(2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^2 + 2^2 + 2 \cdot (-3) = 7 \\ (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot (-3) = 19 \end{cases} \Rightarrow 7 + 19 = 26$$

(3) $(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$

$$(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2 \cdot 3^2 - (-3) + 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2^2 = 1$$



Ví dụ 1.2.

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $\angle C=30^\circ$. Tính các tích vô hướng sau

Lời giải

$$\tan \angle C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan \angle C} = a\sqrt{3}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$$

(1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

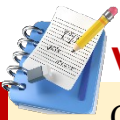
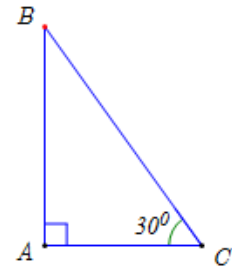
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\angle B) = a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

(2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\angle C) = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = 3a^2$$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A) = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0$$



Ví dụ 1.3.

Cho tam giác ABC đều cạnh $AB=2a$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

(2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 0$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = -2a^2$$

(2) $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) = 3\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= 3BA \cdot AC \cdot \cos(\angle A) - 2AB^2 = 3 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ + 2 \cdot (2a)^2 = 2a^2$$



▮ Dạng 2. Xác định góc giữa hai vectơ



Phương

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(1) Tính góc:

(2) Tính độ dài:

$$BC^2 = |\vec{BC}|^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2$$



Ví dụ 2.1.

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Định góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ biết:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(4) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}; |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

👉 Lời giải

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$

♦ Ta có:

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

♦ Ta có:

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

♦ Ta có:

(4) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}; |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 3 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 3 \Leftrightarrow 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \cdot 1^2 = 3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

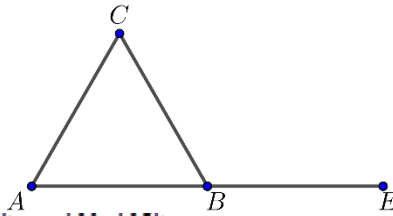
Ta có:



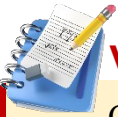
Ví dụ 2.2.

Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\vec{AB}, \vec{BC})$

👉 Lời giải



Vẽ $\overline{BE} = \overline{AB}$. Khi đó
 $(\overline{AB}, \overline{BC}) = (\overline{BE}, \overline{BC}) = \angle CBE = 180^\circ - \angle CBA = 120^\circ$
 $\rightarrow \cos(\overline{AB}, \overline{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.



Ví dụ 2.1.

Cho tam giác ABC có $AB=5, BC=7, CA=8$.

- (1) Tính $\cos A, \cos B, \cos C$
- (2) Tính $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$
- (3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC .

Lời giải

(1) Tính $\cos A, \cos B, \cos C$

$$\begin{cases} \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{2} \\ \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{1}{7} \\ \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{11}{14} \end{cases}$$

♦ Áp dụng định lý Cosin trong tam giác, ta có:

(2) Tính $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$

$$\begin{cases} (\overline{AB}, \overline{BC}) = 180^\circ - B \Rightarrow \cos(\overline{AB}, \overline{BC}) = \cos(180^\circ - B) = -\frac{1}{7} \\ (\overline{BC}, \overline{CA}) = 180^\circ - C \Rightarrow \cos(\overline{BC}, \overline{CA}) = \cos(180^\circ - C) = -\frac{11}{14} \\ (\overline{CA}, \overline{AB}) = 180^\circ - A \Rightarrow \cos(\overline{CA}, \overline{AB}) = \cos(180^\circ - A) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

♦ Ta có

♦ Do đó: $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$

$$\begin{aligned} &= |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cos(\overline{AB}, \overline{BC}) + |\overline{BC}| \cdot |\overline{CA}| \cos(\overline{BC}, \overline{CA}) + |\overline{CA}| \cdot |\overline{AB}| \cos(\overline{CA}, \overline{AB}) \\ &= 5 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{11}{14}\right) + 8 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -69 \end{aligned}$$

(3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC .

♦ Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$m_a^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{129}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{129}}{2}$$



Dạng 3. Chứng minh đẳng thức liên quan tích vô hướng



Phương

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

► **Kí hiệu** là $\vec{a}\vec{b}$ được xác định bởi công thức

(2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (tính chất giao hoán). 2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (tính chất phân phối).

3. $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(k\vec{b})$

4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(a) $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$



Ví dụ 3.1.

Cho tam giác $DABC$, Chứng minh rằng: với điểm M tùy ý ta có:

$$\vec{MA}\vec{BC} + \vec{MB}\vec{CA} + \vec{MC}\vec{AB} = 0$$

Lời giải

♦ Ta có $\vec{MA}\vec{BC} + \vec{MB}\vec{CA} + \vec{MC}\vec{AB}$
 $= \vec{MA}(\vec{MC} - \vec{MB}) + \vec{MB}(\vec{MA} - \vec{MC}) + \vec{MC}(\vec{MB} - \vec{MA})$
 $= \vec{MA}\vec{MC} - \vec{MA}\vec{MB} + \vec{MB}\vec{MA} - \vec{MB}\vec{MC} + \vec{MC}\vec{MB} - \vec{MC}\vec{MA} = 0$



Ví dụ 3.2.

Cho O là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\vec{MA}\vec{MB} = \vec{OM}^2 - \vec{OA}^2$$

Lời giải

♦ Ta có: $\vec{MA}\vec{MB} = (\vec{OA} - \vec{OM})(\vec{OB} - \vec{OM}) = \vec{OA}\vec{OB} - \vec{OM}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OM}^2$
 $= \vec{OA}\vec{OB} + \vec{OM}^2 = \vec{OM}^2 - \vec{OA}^2$, (do O là trung điểm của đoạn thẳng AB).



Ví dụ 3.3.

Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

Lời giải

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\vec{MA}\vec{MB} = \vec{IM}^2 - \vec{IA}^2$
 $\vec{MA} = (\vec{MI} + \vec{IA}), \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} + \vec{IA})$
 Sử dụng quy tắc ba điểm:



$$\vec{IM} - \vec{IA} = \vec{VP} \text{ (đpcm).}$$



Ví dụ 3.4.

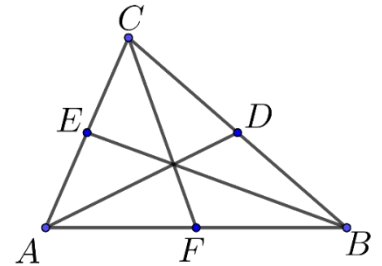
Cho $\triangle ABC$ có 3 trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng:

$$\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} = 0$$

Lời giải

♦ Do $\triangle ABC$ có 3 trung tuyến AD, BE, CF nên ta có:

$$\begin{aligned} & \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} \\ &= \frac{1}{2} \vec{BC} (\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2} \vec{CA} (\vec{BA} + \vec{BC}) + \frac{1}{2} \vec{AB} (\vec{CA} + \vec{CB}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{CA} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{CB}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB} (\vec{BC} + \vec{CB}) + \frac{1}{2} \vec{BC} (\vec{AC} + \vec{CA}) + \frac{1}{2} \vec{CA} (\vec{BA} + \vec{AB}) = 0 \end{aligned}$$



Ví dụ 3.5.

Cho nửa đường tròn đường kính AB .

Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E .

$$\vec{AE} \cdot \vec{AC} + \vec{BE} \cdot \vec{BD} = AB^2$$

Lời giải

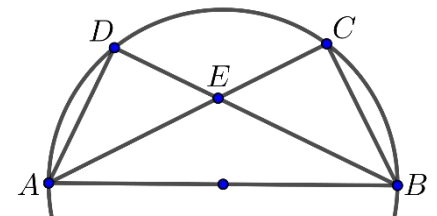
$$\begin{aligned} \text{Ta có } VT &= \vec{AE} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{BE} \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{AE} \cdot \vec{BC} + \vec{BE} \cdot \vec{BA} + \vec{BE} \cdot \vec{AD} \end{aligned}$$

Vì AB là đường kính nên $\angle ADB = 90^\circ, \angle ACB = 90^\circ$

Suy ra $\vec{AE} \cdot \vec{BC} = 0, \vec{BE} \cdot \vec{AD} = 0$

$$VT = \vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{BE} \cdot \vec{BA} = \vec{AB} (\vec{AE} + \vec{EB}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2$$

Do đó (đpcm).





Dạng 4. Tập hợp điểm



Phương

○ **Loại 1:** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B cố định)

▫ Với $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB

▫ Với $k \neq 0$: Gọi I là trung điểm AB :

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 = k + \overrightarrow{IA}^2 = \frac{AB^2}{4} + k$$

(1) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I ;

$$R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + k}$$

(2) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = 0$. Tập hợp các điểm M là một điểm I

(3) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k < 0$: Tập hợp các điểm M là $\emptyset$.

○ **Loại 2:** $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định)

▫ Với $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A , có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$

▫ Với $k \neq 0$: $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} \cdot \vec{v} = k$ với $\overrightarrow{AM'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của $\vec{v} \Rightarrow M'$ cố định

Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua M' , có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$.

○ **Loại 3:** $a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 = k$ (3) (A, B cố định; a, b hằng số, $a+b \neq 0$)

▫ Gọi I thỏa $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ cố định.

$$(3) \Leftrightarrow a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB}) + a\overrightarrow{IA}^2 + b\overrightarrow{IB}^2 = k \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MI}^2 = k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2$$

(1) Nếu $\frac{k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2}{a+b} > 0$. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I ;

$$R = \sqrt{\frac{k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2}{a+b}}$$



Ví dụ 4.1.

Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$(1) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$(2) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Lời giải

$$(1) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$



$$\vec{MA} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{CA} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot (\vec{MA} - \vec{CA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{MC} = 0$$

Ta có:

Do A, B, C cố định nên tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C và vuông góc với đường thẳng AB .

$$(2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$$

$$\text{Ta có: } \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot (\vec{MB} + \vec{MC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot 2\vec{MI} = 0 \quad (\text{với } I \text{ là trung điểm } BC)$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MI} = 0 \Leftrightarrow M \in \text{đường tròn đường kính } AI.$$



Ví dụ 4.2.

Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$(1) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$$

$$(2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2$$

➤ **Lời giải**

$$(1) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$$

Gọi I là trung điểm của AB

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})(\vec{MI} + \vec{IB}) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \quad (\text{Do } \vec{IB} = -\vec{IA}) \Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI = a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

$$(2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MA} \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot (\vec{MB} - \vec{MA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{BA} = 0 \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{BA}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A .



Ví dụ 4.3.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O .

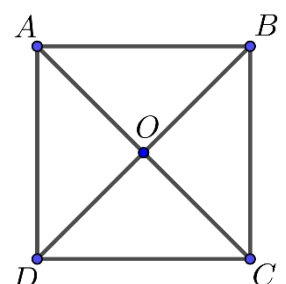
Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$.

➤ **Lời giải**

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 = 3(\vec{MO} + \vec{OD})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OD}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}) = 0$$





$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MO} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng AC .



▮ Dạng 5. Chứng minh vuông góc dùng tích vô hướng



Phương

- (1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a; b})$$

- **Kí hiệu** là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức

- (2) **Tính chất:**

Với ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối).

3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(a) $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



Ví dụ 5.1.

Cho $\vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Biết $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$. Chứng minh rằng:
 $\vec{u} \perp \vec{v}$.

👉 Lời giải

♦ Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2$

$$\begin{cases} \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1 \\ \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 2 \\ \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 2 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

♦ Với



Ví dụ 5.2.

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

👉 Lời giải

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 \\ &= (\overline{AD} + \overline{DB})^2 + (\overline{CB} + \overline{BD})^2 \\ &= AD^2 + 2\overline{DB} \cdot \overline{AD} + \overline{DB}^2 + BC^2 + 2\overline{BD} \cdot \overline{CB} + \overline{BD}^2 \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overline{DB} \cdot (\overline{DB} + \overline{AD} - \overline{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BD}. \end{aligned}$$

Do đó $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.



Ví dụ 5.3.

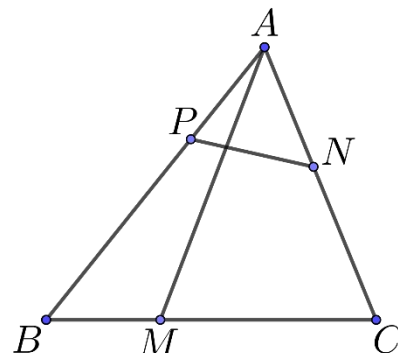
Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a$, $CN = 2a$, $AP = x$, $0 < x < 3a$. Xác định x để AM và PN vuông góc với nhau.

Lời giải

$$\begin{cases} BM = a \Rightarrow \vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ CN = 2a \Rightarrow \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC} \\ AP = x \Rightarrow \vec{AP} = \frac{x}{3a}\vec{AB} \end{cases}$$

♦ Ta có

$$\begin{cases} \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \\ \vec{PN} = \vec{AN} - \vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{x}{3a}\vec{AB} \end{cases}$$



♦ Do đó

♦ AM và PN vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{PN} = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{x}{3a}\vec{AB} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{9}AC^2 - \frac{x}{9a}\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \frac{2x}{9a}AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}.9a^2 - \frac{2x}{9a}.9a^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{9a} \right).3a.3a.\cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ax + (2a - x)a \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4ax + 2a^2 - ax = 0 \Leftrightarrow 4a^2 = 5ax \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}a$$