

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG PT NGUYỄN MỘNG TUÂN**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**KINH NGHIỆM CHỌN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ
KHI GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA**

Người thực hiện: Trần Lương Hải

Chức vụ: Giáo viên

Đơn vị: Trường PT Nguyễn Mộng Tuân

SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán

MỤC LỤC

1. Phần mở đầu.....	1
- Lí do chọn đề tài.....	1
- Mục đích nghiên cứu	1
- Đối tượng nghiên cứu.....	1
- Phương pháp nghiên cứu	1
2. Nội dung.....	2
2.1. Cơ sở lí luận của SKKN.....	2
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng SKKN.....	2
2. 3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.....	2
Phần 1: Nhắc lại các bước trong phương pháp tọa độ hóa.	2
Phần 2: Giới thiệu một số dạng bài tập và cách chọn hệ trục tọa độ cho	
dạng đó kèm theo ví dụ minh họa.....	4
Dạng 1. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$	4
Dạng 2. Hình hộp đứng có đáy là hình thoi	6
Dạng 3. Hình chóp tứ giác đều.	7
Dạng 4. Hình chóp tứ giác là hình chữ nhật hoặc hình vuông và một	
cạnh bên vuông góc với đáy.	9
Dạng 5. Hình chóp tứ giác có đáy là hình thoi và một cạnh bên	
vuông góc với đáy.	10
Dạng 6. Hình chóp tam giác có đáy là tam giác đều.	10
Dạng 7. Hình chóp tam giác có đáy là tam giác vuông và một cạnh	
bên vuông góc với đáy.....	11
Dạng 8. Hình chóp tam giác có đáy là tam giác vuông và có một mặt	
bên vuông góc với đáy.....	13
Dạng 9. Hình lăng trụ đứng tam giác.....	26
Phần 3. Một số bài toán luyện tập.	18
2.4. Kết quả thực hiện đề tài:	19
3. Kết luận và kiến nghị.	19
- Kết luận.	19
- Kiến nghị.	20

1. PHẦN MỞ ĐẦU

- Lí do chọn đề tài.

Trong chương trình Toán học nói chung và trong hình học nói riêng, hình học không gian là một trong những nội dung quan trọng, và trong các đề thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào Đại học, cao đẳng trước kia và thi THPT Quốc gia hiện nay luôn có một bài toán hình học không gian. Mặc dù trong những năm gần đây, mức độ khó của nội dung này đã giảm nhiều so với trước kia nhưng nó vẫn là một vấn đề tương đối khó đối với đa số học sinh. Bởi hình học không gian yêu cầu người học phải có tư duy trừu tượng và trí tưởng tượng không gian phong phú cùng với khả năng vận dụng, kết hợp linh hoạt các định lý của hình học không gian vốn đã rất nhiều và khó tưởng tượng. Bên cạnh đó kĩ năng vẽ hình không gian cũng là một vấn đề gây khó khăn cho học sinh, đặc biệt là các bài phải vẽ thêm đường phụ.

Trong khi đó một số bài toán hình học không gian, nếu giải theo phương pháp tọa độ lại trở nên đơn giản hơn. Tuy nhiên phương pháp này không được đề cập nhiều trong chương trình sách giáo khoa THPT nên nhiều em không có kinh nghiệm trong việc vận dụng phương pháp tọa độ hóa.

Để giúp các em có thêm kinh nghiệm trong việc giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ hóa, giúp các em tự tin hơn để bước vào kì thi THPT quốc gia, trong phạm vi đề tài này, tôi xin trình bày một kinh nghiệm nhỏ trong việc sử dụng phương pháp tọa độ hóa trong giải một số bài toán hình học không gian, đó là “ ***phương pháp chọn hệ trục tọa độ trong giải một số bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ hóa***”

Với chút kinh nghiệm nhỏ này hi vọng các em sẽ có thêm kinh nghiệm và hứng thú trong việc giải một số bài toán hình học không gian trong.

- Mục đích nghiên cứu.

Nghiên cứu một số cách chọn hệ trục tọa độ trong giải một số bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ hóa nhằm giúp học sinh có thêm kinh nghiệm trong việc giải các bài toán hình học không gian.

- Đối tượng nghiên cứu.

Một số dạng bài toán hình học không gian có thể giải được bằng phương pháp tọa độ hóa.

- Phương pháp nghiên cứu.

+ Nghiên cứu lí thuyết:

Nghiên cứu các tài liệu về phương pháp tọa độ hóa trong việc giải một số bài toán hình học không gian.

Nghiên cứu một số kinh nghiệm giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ hóa thông qua một số SKKN đã đạt giải cấp tỉnh.

Nghiên cứu các bài toán hình học không gian trong các đề thi ĐH, CĐ trước kia và đề thi THPT Quốc gia những năm gần đây.

+ Nghiên cứu thực nghiệm:

Điều tra về phương pháp thường dùng trong việc giải các bài toán hình học không gian của một số học sinh lớp 12.

Điều tra về những khó khăn trong việc sử dụng phương pháp tọa độ hóa để giải các bài toán hình học không gian.

Điều tra về phương pháp thường dùng trong việc dạy học giải các bài toán hình học không gian của một số giáo viên dạy khối 12; những khó khăn trong việc dạy học sinh sử dụng phương pháp tọa độ hóa để giải các bài toán hình học không gian.

+ **Thông kê:**

Xử lý thống kê toán học và kết luận.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý luận.

- Khách thể: Học sinh lớp 12.
- Đối tượng nghiên cứu: Một số bài toán hình học không gian có thể giải bằng phương pháp tọa độ hóa.
- Phạm vi nghiên cứu: Các bài toán sơ cấp về hình học không gian trong chương trình PTTH.
- Thực hiện đề tài trong thời gian ôn thi tốt nghiệp của học sinh lớp 12 năm học 2015 – 2016.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.

Trước khi thực hiện đề tài, tôi đã khảo sát chất lượng của học sinh thông qua kiểm tra viết sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian để giải quyết các bài toán hình học không gian. Tôi đã tiến hành kiểm tra qua bài toán sau:

Tìm lời giải bằng phương pháp tọa độ: **“Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ ”.**

Kết quả:

- 30% học sinh biết dựa vào giả thiết để lựa chọn gốc tọa độ sao cho tọa độ các điểm trong bài toán được thuận tiện.
 - 10% học sinh biết cách giải bài tập hoàn chỉnh tối ưu
- Chất lượng bài giải của học sinh thấp, kỹ năng giải toán dạng này yếu

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề:

Phần 1: Nhắc lại các bước trong phương pháp tọa độ hóa.

Để giải các bài toán hình học nói chung và hình học không gian nói riêng chúng ta phải dựa vào các yếu tố, các quan hệ về hình học, đồng phẳng, song song, vuông góc, bằng nhau. . . Nếu ta chọn một hệ tọa độ thích hợp thì ta có thể chuyển thể bài toán hình học sang bài toán đại số với những số, những chữ, vector với phép toán trên nó. Với bài toán đại số này chúng ta có sự định hướng rõ ràng hơn và khả năng tìm được lời giải nhanh hơn. Để thực hiện được điều đó, đòi hỏi học sinh phải có sự luyện tập, vận dụng các kiến thức và cần nắm được quy trình giải toán bằng phương pháp tọa độ thích hợp.

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ.

- Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp
- Suy ra tọa độ của các điểm có liên quan.

Bước 2: Chuyển bài toán từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ.

Bước 3: Dùng các kiến thức về tọa độ để giải toán.

Bước 4: Phiên dịch kết quả bài toán từ ngôn ngữ tọa độ sang ngôn ngữ hình học.

Trong các bước trên, bước 2 và bước 4 học sinh có thể hoàn toàn làm được nhờ các kiến thức liên hệ giữa hình học không gian và hệ tọa độ đã biết, ở bước 3 học sinh có thể sử dụng các kiến thức trên hệ tọa độ một cách sáng tạo để giải các bài toán. Bước 1 học sinh gặp khó khăn hơn cả do không có phương pháp cụ thể. Để khắc phục khó khăn đó, học sinh phải tập luyện và phải biết dựa vào một số

đặc điểm của bài toán này. Chọn hệ tọa độ sao cho gốc trùng với điểm cố định đã biết,

dựa vào các đường thẳng vuông góc để gắn với các trục tọa độ, các điểm đã biết

gắn với các tọa độ đơn giản, thuận lợi.

Phần 2: Giới thiệu một số dạng bài tập và cách chọn hệ trục tọa độ cho dạng đó kèm theo ví dụ minh họa.

Dạng 1. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0, 0, 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; b; 0)$ và $A'(0; 0; c)$
 Khi đó ta có $C(a; b; 0)$, $B'(a; 0; c)$, $C'(a; b; c)$ và $D'(0; b; c)$

Đặc biệt trường hợp bài toán cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0, 0, 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$ và $A'(0; 0; c)$
 a)

Khi đó ta có $C(a; a; 0)$, $B'(a; 0; a)$, $C'(a; a; c)$ và $D'(0; a; c)$

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$.

a) Tính diện tích tam giác ACD' theo a, b, c . b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC , tính thể tích tứ diện $D'DMN$ theo $a, b,$

c

Hướng dẫn

a) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$

$B \in Ax$, $D \in Ay$ và $A' \in Az$, khi đó:

$A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; b; 0);$

$D(0; b; c); A'(0; 0; c); D'(0; b; c).$

Ta có: $\vec{AC} = (a; b; 0); \vec{AD} = (0; b; c)$

$$\Rightarrow [\vec{AC}, \vec{AD}] = (bc; -ac; ab)$$

$$\Rightarrow S_{ACD'} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AC}, \vec{AD}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} \quad (\text{đvdt})$$

b) M là trung điểm của $AB \Rightarrow M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); N$ là trung điểm của $BC \Rightarrow N\left(a; \frac{b}{2}; 0\right)$

$$\Rightarrow \vec{DM} = \left(\frac{a}{2}; -b; 0\right); \vec{DN} = \left(a; -\frac{b}{2}; 0\right) \Rightarrow [\vec{DM}, \vec{DN}] = \left(0; 0; \frac{3ab}{4}\right)$$

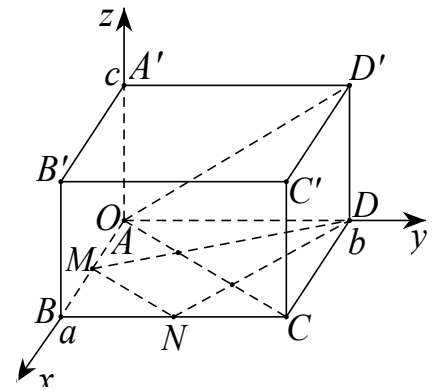
$$\vec{DD'} = (0; 0; c) \Rightarrow [\vec{DM}, \vec{DN}] \cdot \vec{DD'} = \frac{3abc}{4}$$

$$V_{D'DMN} = \frac{1}{6} [\vec{DM}, \vec{DN}] \cdot \vec{DD'} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3abc}{4} = \frac{abc}{8} \quad (\text{đvtt})$$

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a .

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' .

b) Gọi K là trung điểm DD' . Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng CK và $A'D'$.



c) Mặt phẳng (P) qua BB' và hợp với hai đường thẳng BC' , $B'D$ hai góc bằng nhau. Tính sin các góc này.

Hướng dẫn

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $A' \in Az$, khi đó:

$$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0);$$

$$D(0;a;0); A'(0;0;a); B'(a;0;a);$$

$$C'(a;a;a); D'(0;a;a).$$

a) Ta có $\overrightarrow{A'B}(a;0;-a)$ & $\overrightarrow{AC'}(a;a;a)$

Gọi α là góc tạo bởi $A'B$ và AC' ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{A'B}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Gọi d_1 là khoảng cách giữa $A'B$ và AC' . ta có:

$$d_1 = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{AC'}]|}{|[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{AC'}]|} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

b) Ta có: $K\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{KC}\left(a;0;-\frac{a}{2}\right)$ & $\overrightarrow{A'D}(0;a;-a)$.

$$\text{Gọi } \beta \text{ là góc tạo bởi } CK \text{ và } A'D, \text{ ta có: } \cos \beta = \frac{|\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{A'D}|}{|\overrightarrow{KC}| \cdot |\overrightarrow{A'D}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Gọi d_2 là khoảng cách giữa CK và $A'D$, ta có:

$$d_2 = \frac{|\overrightarrow{KD} \cdot [\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{A'D}]|}{|[\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{A'D}]|} = \frac{a}{3}$$

c) Ta có BB' là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$ nên:

$$(BB'): \begin{cases} y=0 \\ x=a \end{cases} \Leftrightarrow (BB'): \begin{cases} x-a=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Mặt phẳng (P) qua BB' có dạng:

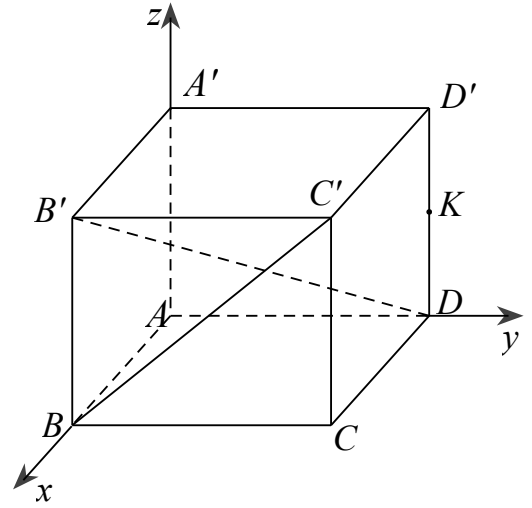
$$(P): x - a + my = 0 \Leftrightarrow (P): x + my - a = 0 \Rightarrow \text{vtpt } n(1;m;0)$$

Vì (P) hợp với BC' , $B'D$ (có vtcp là $\overrightarrow{u_1}(0;1;1)$ và $\overrightarrow{u_2}(1;-1;1)$) hai góc bằng nhau (giả sử là γ) nên:

$$\sin \gamma = \frac{|m|}{\sqrt{2(m^2+1)}} = \frac{|1-m|}{\sqrt{3(m^2+1)}} \Leftrightarrow \sqrt{3}|m| = \sqrt{2}|1-m|$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \pm \sqrt{6}$$

Với $m = -2 + \sqrt{6}$ ta được:



$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{2 \left[(\sqrt{6} - 2)^2 + 1 \right]}} = \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{22 - 8\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{(4 - \sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{6} - 1}{5}$$

Với $m = -2 - \sqrt{6}$ ta được:

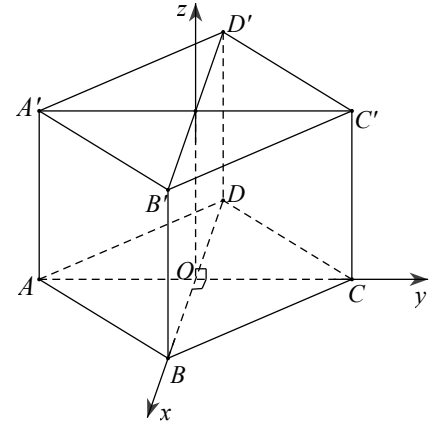
$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{2 \left[(-\sqrt{6} - 2)^2 + 1 \right]}} = \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{22 + 8\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{(4 + \sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{6} + 1}{5}$$

Dạng 2. Hình hộp đứng có đáy là hình thoi

Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$

- Trục Oz đi qua tâm của hai đáy của
- Trục Ox, Oy lần lượt chứa hai đường chéo của đáy.



Ví dụ: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\angle BAD = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CC' .

- a) Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
- b) Tính AA' theo a để tứ giác $BMDN$ là hình vuông.

Hướng dẫn

Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD, A'B'C'D'$. Đặt $AA' = b$

Theo gt, $\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều, ta có:

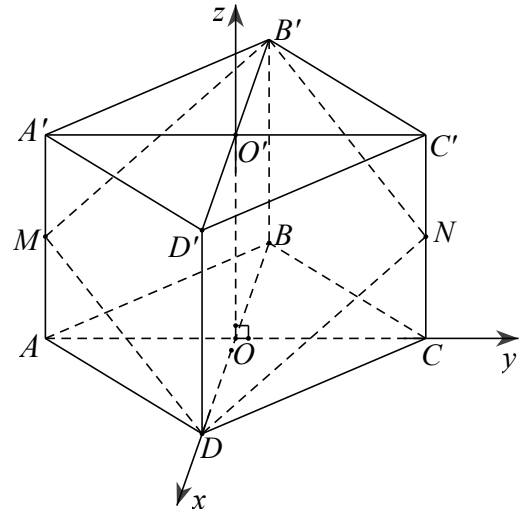
$$OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là gốc tọa độ, $D \in Ox, C \in Oy, O' \in Oz$.

Khi đó $O(0; 0; 0), D(\frac{a}{2}; 0; 0), C(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0),$

$B(-\frac{a}{2}; 0; 0); A(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0); A'(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; b);$

$B'(-\frac{a}{2}; 0; b); C'(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b); D'(\frac{a}{2}; 0; b); M(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2}); N(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2}).$



a) Ta có: $\overrightarrow{DM} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2} \right), \overrightarrow{NB'} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2} \right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \text{ và } \overrightarrow{NB'} \text{ cùng phương} \Rightarrow B', M, D, N, \text{ cùng thuộc một mặt phẳng.}$

b) Theo câu (a), $\Rightarrow \overline{DM} = \overline{NB'} \Leftrightarrow$ tứ giác $B'DMN$ là hình bình hành.

$$\text{Ta có } DM = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$$

$$\overrightarrow{MB'} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2}\right) \Rightarrow MB' = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$$

$\Rightarrow DM = MB' \Rightarrow B'MND$ là hình thoi.

Để hình thoi $B'MND$ là hình vuông thì $DM \perp MB'$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{MB'} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2a^2}{4} = \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow 2a^2 = b^2 \Rightarrow b = a\sqrt{2}$$

Vậy để $B'MND$ là hình vuông thì $A' = a\sqrt{2}$

Dạng 3. Hình chóp tứ giác đều.

Cho hình chóp đều có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh a và đường cao bằng h .

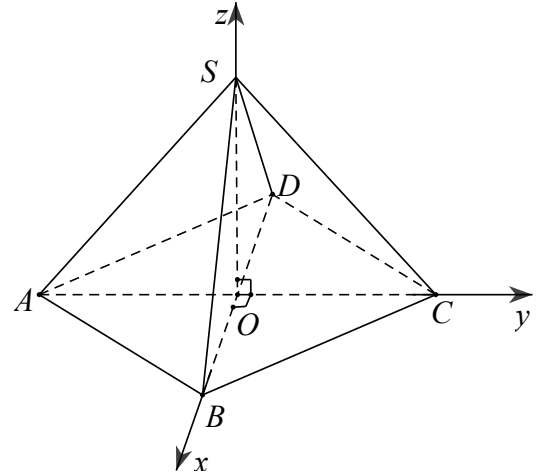
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của hình vuông $ABCD$.

- Trục Oz chứa đường cao SO của hình chóp
- Trục Ox , Oy lần lượt chứa hai đường chéo của đáy.

Khi đó, nếu hình biểu diễn như hình bên thì:

$$A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right),$$

$$C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right) \text{ và } S(0; 0; h)$$



Ví dụ: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, đường cao

$SH = 2a$. M là điểm bất kì thuộc đoạn AH .

Một mặt phẳng (α) qua M , song song với AD và SH đồng thời cắt AB , CD , SD , SA lần lượt tại I , J , K , L .

a) Xác định vị trí điểm M để thiết diện $IJKL$ là tứ giác ngoại tiếp được.

b) Xác định vị trí điểm M để thể tích khối đa diện $DJKLH$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Gọi N là giao điểm của BD với $pm(\alpha)$; E là giao điểm của MK với NL . Gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định vị trí điểm M để $\angle PEQ = 90^\circ$.

Hướng dẫn

Ta có $H = AC \cap BD$ và $AH = a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $H \equiv O$, trục Ox chứa A , trục Oy chứa D , trục Oz chứa S . Khi đó:

$$H(0; 0; 0); A(a; 0; 0); D(0; a; 0); S(0; 0; 2a); B(0; -a; 0) \text{ và } C(-a; 0; 0).$$

a) Gọi $M(m; 0; 0)$, $(0 \leq m \leq a)$

Vector pháp tuyến của $mp(\alpha)$: $\vec{n}_\alpha = [\vec{AD}, \vec{SH}] = (-2a; -2a; 0)$

Phương trình $mp(\alpha)$: $-2a(x - m) - 2ax = 0$
 $x + y - m = 0$.

Để thấy $I\left(\frac{m+a}{2}; \frac{m-a}{2}; 0\right), J\left(\frac{m-a}{2}; \frac{m+a}{2}; 0\right)$

$\vec{SA} = (a; 0; -2a), \vec{SD} = (0; a; -2a)$

Phương trình tham số của đường thẳng SA

là : $\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$; SD là: $\begin{cases} x = 0 + t' \\ y = a + t' \\ z = -2t' \end{cases}$

Để dàng tính được tọa độ các điểm:

$L(m; 0; 2a - 2m)$ và $K(0; m; 2a - 2m)$

Tứ giác $IJKL$ ngoại tiếp được khi $KL + IJ = IL + KJ$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 9(a - m) \Leftrightarrow m = \frac{(9 - \sqrt{2})}{9 + \sqrt{2}} a$$

Vậy $M\left(\frac{9 - \sqrt{2}}{9 + \sqrt{2}} a; 0; 0\right)$

b) Đặt $V = V_{DIJKLH} = V_{D.IJKL} + V_{H.IJKL}$

Ta có: $\begin{cases} LM \perp IJ \\ LK \parallel IJ \end{cases} \Rightarrow S_{IJKL} = LM \cdot \frac{LK \cdot IJ}{2}$

$$\Rightarrow S_{IJKL} = (2a - 2m) \frac{\sqrt{2}(a + m)}{2} = \sqrt{2}(a^2 - m^2) \text{ Khoảng cách từ } H \text{ đến } mp(\alpha):$$

$$d(H, (\alpha)) = \frac{m}{\sqrt{2}}; \quad d(D, (\alpha)) = \frac{a - m}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \sqrt{2}(a^2 - m^2) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} + \frac{a - m}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{3} a(a^2 - m^2) \leq \frac{1}{3} a^3 \Rightarrow V_{Max} = \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy M trùng với H .

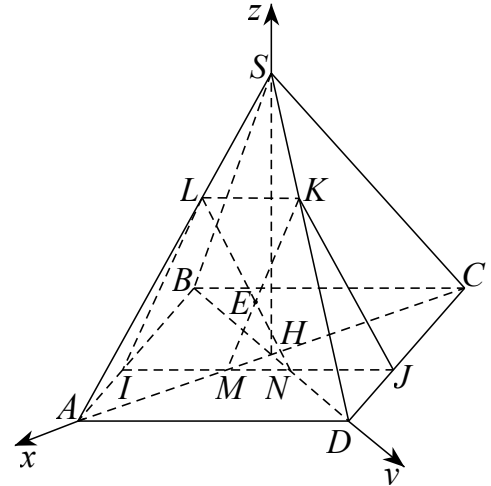
c) Ta có: $P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), Q\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$

Để thấy $MNKL$ là hình chữ nhật $\Rightarrow E$ là trung điểm của $MK \Rightarrow E\left(\frac{m}{2}; \frac{m}{2}; a - m\right)$

$$\square PEQ = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{EP} \cdot \vec{EQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a - m}{2}\right)\left(\frac{-a - m}{2}\right) + \left(\frac{a - m}{2}\right)\left(\frac{-a - m}{2}\right) + (-a + m)(-a + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow -a - m + 2a - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{a}{3}$$



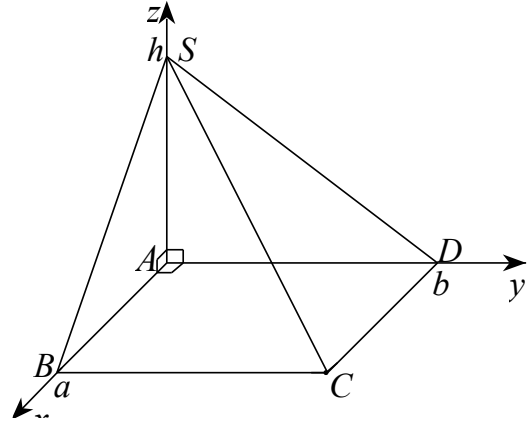
Vậy để $\angle PEQ = 90^\circ$ thì $M\left(\frac{a}{3}; 0; 0\right)$

Dạng 4. Hình chóp tứ giác là hình chữ nhật hoặc hình vuông và một cạnh bên vuông góc với đáy.

Giả sử $AB = a$, $AD = b$ và chiều cao $SA = h$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với A , trục Ox chứa cạnh AB , trục Oy chứa cạnh AD , trục Oz chứa cạnh AS

(Như hình vẽ). Khi đó: $A(0; 0; 0)$; $B(a; 0; 0)$; $C(a; b; 0)$; $D(0; b; 0)$; $S(0; 0; h)$.



Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E là trung điểm của CD .

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBE) .

b) Mặt phẳng (SBE) chia hình chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần.

Hướng dẫn giải

Trong không gian, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A \equiv O$, $AB \equiv Ox$, $AS \equiv Oy$, $AD \equiv Oz$

Khi đó ta có: $B(a; 0; 0)$, $S(0; a; 0)$, $D(0; 0; a)$, $C(a; 0; a)$

a) Ta có E là trung điểm của $CD \Rightarrow E\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$

$$\Rightarrow \vec{SB} = (a; -a; 0); \vec{SE} = \left(\frac{a}{2}; -a; a\right) \Rightarrow [\vec{SB}, \vec{SE}] = \left(-a^2; -a^2; \frac{-a^2}{2}\right)$$

Chọn $\vec{n} = (2; 2; 1) = \frac{-2}{a^2} [\vec{SB}, \vec{SE}]$ làm vectơ pháp tuyến của $mp(SBE)$

Phương trình mặt phẳng (SBE) qua $B(a; 0; 0)$ và nhận $\vec{n} = (2; 2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến: $(SBE): 2(x - a) + 2y + z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 2a = 0$

Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBE) là:

$$d(C; (SBE)) = \frac{|2a + a - 2a|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{a}{3}$$

$$\text{b) } [\vec{SB}, \vec{SE}] = \left(-a^2; -a^2; \frac{-a^2}{2}\right); \vec{SC} = (a; -a; a);$$

$$\Rightarrow V_{SCBE} = \frac{1}{6} \left| \vec{SC} \cdot [\vec{SB}, \vec{SE}] \right| = \frac{1}{6} \left| -a^3 + a^3 - \frac{a^3}{2} \right| = \frac{a^3}{12}$$

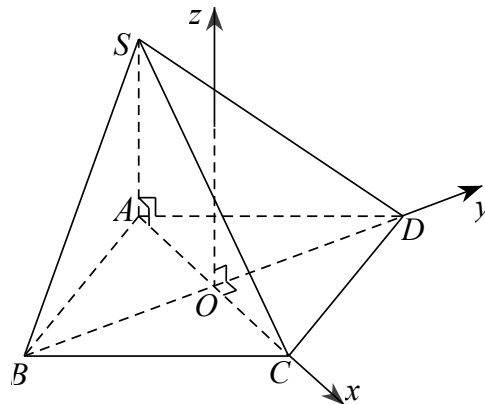
$$\Rightarrow V_{S.BEDA} = V_{S.ABCD} - V_{SBCE} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow \frac{V_{SBCE}}{V_{S.BEDA}} = \frac{\frac{a^3}{12}}{\frac{a^3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Dạng 5. Hình chóp tứ giác có đáy là hình thoi và một cạnh bên vuông góc với đáy.

Giả sử $ABCD$ là hình thoi có cạnh a và chiều cao $SA = h$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với giao điểm của hai đường chéo, trục Ox chứa cạnh BD , trục Oy chứa cạnh AC , trục Oz đi qua giao điểm hai đường chéo và vuông góc với $mp(ABCD)$

(Như hình vẽ). Khi đó, tùy theo từng bài cụ thể mà ta suy ra tọa độ của các điểm khác.



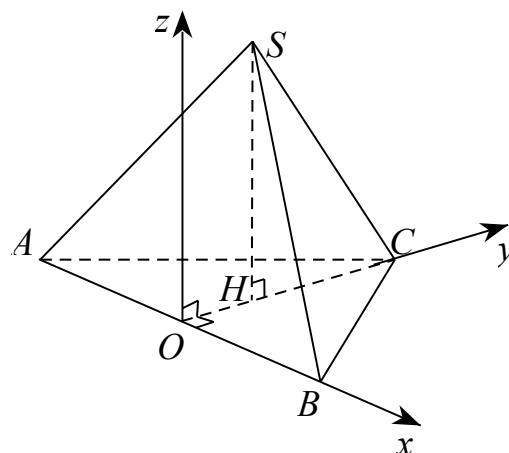
Dạng 6. Hình chóp tam giác có đáy là tam giác đều.

Giả sử hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và đường cao bằng h .

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với trung điểm của một cạnh (chẳng hạn cạnh AB), trục Ox chứa cạnh AB , trục Oy trung tuyến OC . Khi đó:

$A(-\frac{a}{2}; 0; 0); B(\frac{a}{2}; 0; 0);$

$C(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0); S(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; h).$



Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Biết $(AMN) \perp (SBC)$, tính theo a diện tích ΔAMN .

Hướng dẫn

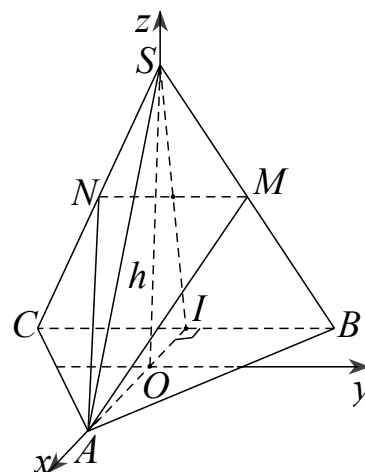
Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) , ta suy ra O là trọng tâm ΔABC . Gọi I là trung điểm của BC , ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Trong $mp(ABC)$, ta vẽ tia Oy vuông góc với OA .

Đặt $SO = h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$$O(0; 0; 0), S(0; 0; h), A(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0)$$



$$\vec{IM} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0 \quad \vec{BN} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0 \quad \vec{CN} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0$$

$$\vec{MC} = \frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2} \quad \text{và} \quad \vec{NC} = \frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}$$

$$\vec{n}_{(AMN)} = \vec{AM} \times \vec{AN} = \frac{ah}{4}; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}; 0 \quad \vec{n}_{(SBC)} = \vec{SB} \times \vec{SC} = ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

$$(AMN) \perp (SBC) \Leftrightarrow \vec{n}_{(AMN)} \cdot \vec{n}_{(SBC)} = 0 \Leftrightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12}$$

$$S_{D_{AMN}} = \frac{1}{2} |\vec{AM} \times \vec{AN}| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$$

Dạng 7. Hình chóp tam giác có đáy là tam giác vuông và một cạnh bên vuông góc với đáy (Ta xét hai trường hợp)

Trường hợp 1: Đáy ABC là tam giác vuông tại A và $SA \perp (ABC)$.

Giả sử ABC là tam giác vuông tại A , có cạnh $AB = a$, $AC = b$ và chiều cao $SA = h$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với A , trục Ox chứa cạnh AB , trục Oy chứa cạnh AC , trục Oz chứa cạnh SA

(Như hình vẽ). Khi đó: $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$ và $S(0; 0; h)$.

Ví dụ: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ đôi một vuông góc với nhau. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách đến các mặt phẳng (OBC) , (OCA) , (OAB) lần lượt là: 1cm, 2cm và 3cm. Tính a , b , c

để thể tích hình chóp $O.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Chọn hệ trục tọa độ sao cho O trùng với gốc tọa độ, $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$. Ta có:

$$O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).$$

$$mp(OAB) \equiv Oxy, mp(OBC) \equiv Oyz, mp(OCA) \equiv Oxz$$

$$d(M; (OAB)) = 3 \Rightarrow d(M; (Oxy)) = 3 \Rightarrow z_M = 3$$

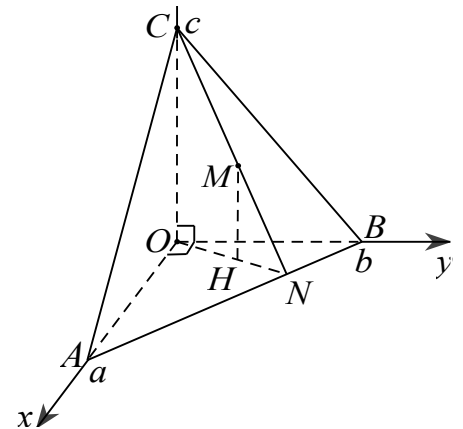
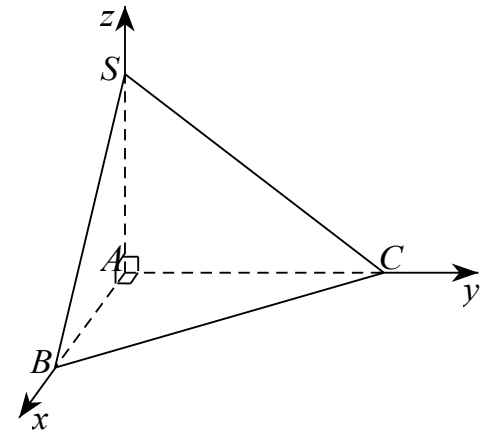
$$d(M; (OBC)) = 1 \Rightarrow d(M; (Oyz)) = 1 \Rightarrow x_M = 1$$

$$d(M; (OCA)) = 2 \Rightarrow d(M; (Oxz)) = 2 \Rightarrow y_M = 2$$

$$\text{suy ra } M = (1; 2; 3)$$

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\text{Do } M(1; 2; 3) \in (ABC) \text{ nên } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \quad (1)$$



Thể tích hình chóp $O.ABC$: $V_{O.ABC} = \frac{1}{3}OC.S_{OAB} = \frac{1}{3}OC.\frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{6}a.b.c$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho 3 số dương $\frac{1}{a}, \frac{2}{b}$ và $\frac{3}{c}$, ta có

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27 \text{ hay } V_{O.ABC} \geq 27$$

Do đó $V_{\min} = 27$, khi đó $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3, b = \frac{2}{3}$ và $c = 1$.

Vậy $a = 3, b = \frac{2}{3}$ và $c = 1$.

Trường hợp 2. Đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

Giả sử ABC là tam giác vuông tại B , có cạnh $AB = a, AC = b$ và chiều cao $SA = h$.

Ta có thể chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ theo hai cách sau :

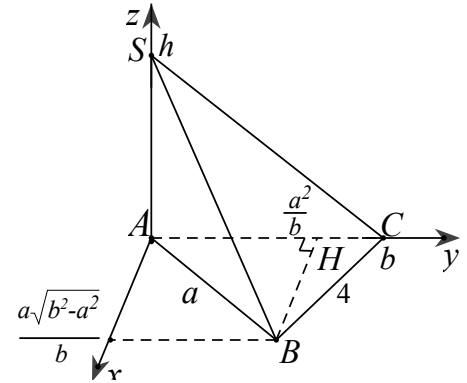
Cách 1:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$;
trục Ox nằm trên $mp(ABC)$ và vuông góc với AC ;
trục Oy chứa AC ; trục Oz chứa AS . Khi đó ta có:
 $A(0;0;0); C(0;b;0); S(0;0;h)$

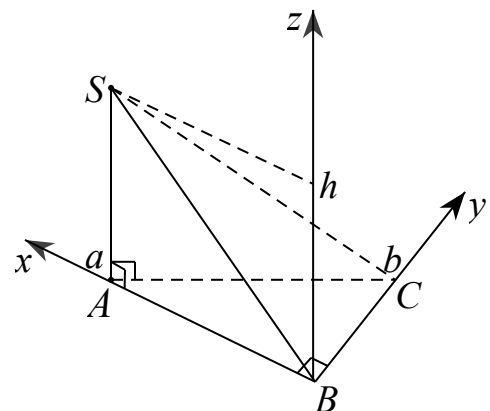
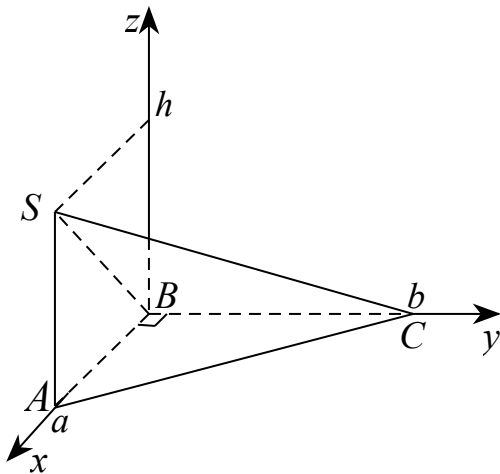
$$AB^2 = AH.AC \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{a.\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{a.\sqrt{b^2 - a^2}}{b}; \frac{a^2}{b}; 0\right)$$



Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với B , trục Ox chứa cạnh AB , trục Oy chứa cạnh BC , trục Oz đi qua B và vuông góc với $mp(ABC)$ (Như hình H.1 hoặc H. 2). Khi đó:
 $B(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$ và $S(a; 0; h)$.

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Biết $AB = 3$, $BC = SA = 4$.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

b) Trên AB lấy điểm E sao cho $AE = a$. Mặt phẳng (P) qua E song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện. Tìm a để diện tích này lớn nhất.

Hướng dẫn

ΔABC vuông tại B nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

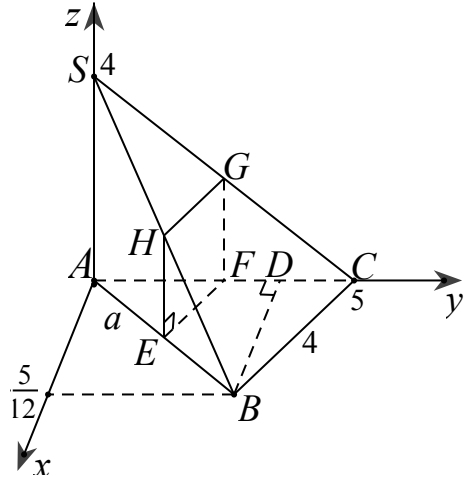
Vẽ đường cao BD của

$$\Delta ABC \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$AB^2 = AD \cdot AC \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{9}{5}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$; trục Ox nằm trên $mp(ABC)$ và vuông góc với AC ; trục Oy chứa AC ; trục Oz chứa AS . Khi đó ta có:

$$A(0; 0; 0); C(0; 5; 0); S(0; 0; 4); B\left(\frac{12}{5}; \frac{9}{5}; 0\right)$$



a) Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$$

Do (S) đi qua S, A, B, C nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16 - c = 0 \\ \frac{144}{25} + \frac{81}{25} - \frac{24}{5}a - \frac{18}{5}b = 0 \\ 25 - 10b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

Suy ra phương trình mặt cầu là $(S) x^2 + y^2 + z^2 - 25y - 4z = 0$

Gọi I là Tâm mặt cầu $(S) \Rightarrow I\left(0; \frac{5}{2}; 2\right) \Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn SC .

Tâm I của mặt cầu (S) I là trung điểm của đoạn SC .

b) Giả sử $mp(P)$ cắt SB, SC, AC theo thứ tự tại $H, G, F \Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $EFGH$.

$mp(P) \parallel SA \Rightarrow mp(P)$ cắt (SAB) và (SAC) theo hai giao tuyến song song $\Rightarrow EH \parallel FG$.

$mp(P) \parallel BC \Rightarrow mp(P)$ cắt (ABC) và (SBC) theo hai giao tuyến song song $\Rightarrow EF \parallel GH$.

Vậy thiết diện $EFGH$ là hình bình hành.

Mặt khác ta lại có $EH \parallel SA$ và $EF \parallel BC$. Mà $SA \perp BC \Rightarrow EH \perp EF \Rightarrow \angle HEF = 90^\circ$
 $\Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật.

Vậy thiết diện $EFGH$ là hình chữ nhật.

$$\text{Ta có } \frac{EH}{SA} = \frac{OE}{OA} \Rightarrow EH = \frac{SA \cdot OE}{OA} = \frac{4(3-a)}{3}$$

$$\frac{EF}{OC} = \frac{AE}{AO} \Rightarrow EF = \frac{OC \cdot AE}{AO} = \frac{4a}{3}$$

$$\Rightarrow S_{EFGH} = EF \cdot EH = \frac{4a}{3} \cdot \frac{4(3-a)}{3} = \frac{16}{9} a(3-a)$$

Do a nằm trên cạnh AB nên $0 < a < 3 \Rightarrow 3-a > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho hai số a và $3-a$, ta có

$$\frac{a + (3-a)}{2} \geq \sqrt{a(3-a)} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \geq \sqrt{a(3-a)} \Leftrightarrow a(3-a) \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{Do đó } S_{EFGH} = \frac{16}{9} a(3-a) \leq \frac{16}{9} \cdot \frac{9}{4} = 4 \Leftrightarrow S_{EFGH} \leq 4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3-a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Vậy diện tích thiết diện $EFGH$ lớn nhất bằng 4 khi $a = \frac{3}{2}$.

Dạng 8. Hình chóp tam giác có đáy là tam giác vuông và có một mặt bên vuông góc với đáy (Ta xét các trường hợp sau)

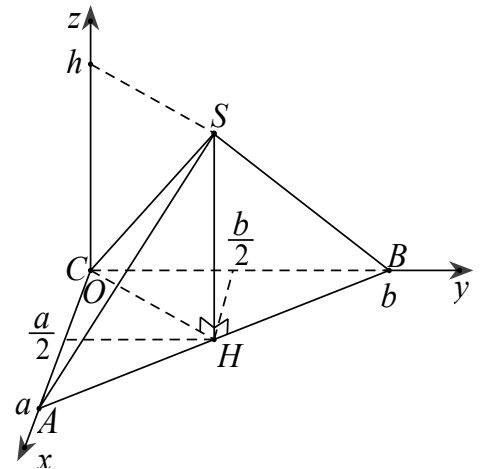
Trường hợp 1: Đáy ABC là tam giác vuông tại C , có $(SAB) \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ cân tại S .

Giả sử ABC là tam giác vuông tại C , có cạnh $CA = a$, $CB = b$ và chiều cao $SH = h$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với C , trục Ox trùng với tia CA , trục Oy trùng với tia CB , trục Oz đi qua C và vuông góc với $mp(ABC)$ (Như hình H. 1). Khi đó: $A(a; 0; 0)$,

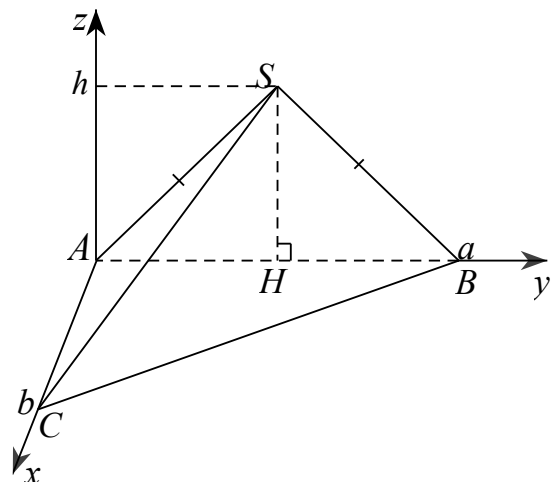
$B(0; b; 0)$, $C(0; 0; 0)$ và $S(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; h)$.



Trường hợp 2: Đáy ABC là tam giác vuông tại A , có $(SAB) \perp (ABC)$ và $\triangle SBC$ cân tại S .

Giả sử ABC là tam giác vuông tại A , có cạnh $AB = a$, $AC = b$ và chiều cao $SH = h$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với A , trục Ox chứa cạnh AC , trục Oy chứa cạnh AB , trục Oz đi qua A và vuông góc với $mp(ABC)$ (Như hình trên). Khi đó: $A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(b; 0; 0)$ và $S(0; \frac{a}{2}; h)$.

Trường hợp 3: Đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , có $(SAB) \perp (ABC)$ và ΔSAB cân tại S .

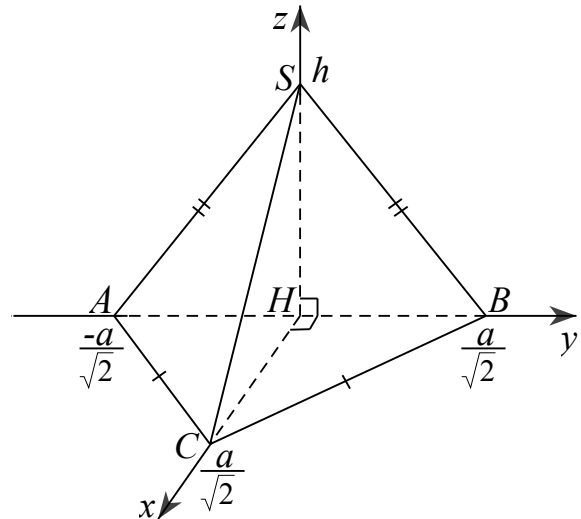
Giả sử $AC = BC = a$, và chiều cao $SH = h$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với H , trục Ox chứa cạnh HC , trục Oy chứa cạnh AB , trục Oz chứa cạnh HS (Như hình trên). Khi đó:

$$H(0; 0; 0); A(0; -\frac{a}{\sqrt{2}}; 0);$$

$$B(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0); C(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0) \text{ và } S(0; 0; h).$$



Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBA là tam giác đều cạnh a và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

Hướng dẫn:

a) Tam giác SBC đều, cạnh bằng a và H là trung

$$\text{điểm của } BC \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác ABC vuông cân tại a , có $BC = a$

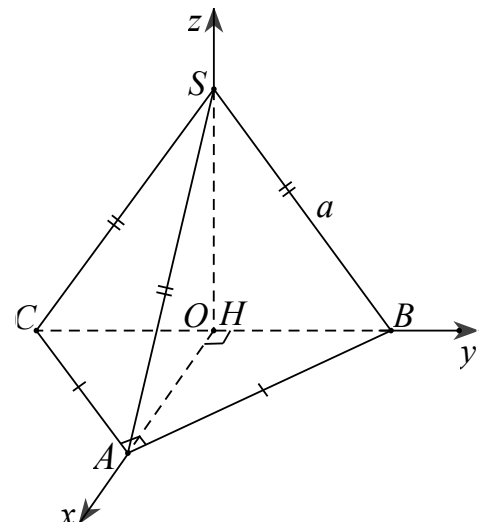
$$\Rightarrow AB = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Gọi H là trung điểm của BC , ta có:

$$\Rightarrow AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv H$,

tia $HA \equiv$ tia Ox , tia $HB \equiv$ tia Oy và tia $HS \equiv$ tia Oz .



khi đó ta có: $H(0; 0; 0); A(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0); B(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0); C(0; -\frac{a}{\sqrt{2}}; 0); S(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2})$

$$\vec{SA} = \left(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right); \vec{BC} = (0; -a; 0); \vec{AC} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0 \right)$$

$$|\vec{SA}, \vec{BC}| = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; 0; -\frac{a^2}{2} \quad |\vec{SA}, \vec{BC}, \vec{AC}| = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$|\vec{SA}, \vec{BC}| = a^2$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC :

$$d(SA, BC) = \frac{|\vec{SA}, \vec{BC}, \vec{AC}|}{|\vec{SA}, \vec{BC}|} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4.a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Dạng 9. Hình lăng trụ đứng tam giác (Ta xét hai trường hợp sau)

Trường hợp 1: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại A .

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$ và $AA' = h$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và $A'C$. Tìm trên đoạn EF điểm I cách đều hai mặt phẳng (ABC) và $(ACC'A')$. Tính khoảng cách đó.

Hướng dẫn

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ với $B \in Ax$, khi đó:

$A(0;0;0); B(a;0;0); C(0;a;0); A'(0;0;h); B'(a;0;h); C'(0;a;h)$.

Vì E, F là trung điểm của BC và A_1C_1 nên: $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ và $F\left(0, \frac{a}{2}, h\right)$

Phương trình đường thẳng EF được cho bởi:

$$EF: \begin{cases} \text{Qua } E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) \\ \text{vtcp } EF\left(-\frac{a}{2}, 0, h\right) \end{cases} \Rightarrow EF: \begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}t \\ y = \frac{a}{2} \\ z = ht \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vì $I \in EF$ nên $I\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}t, \frac{a}{2}, ht\right)$. $t \in [0, 1]$.

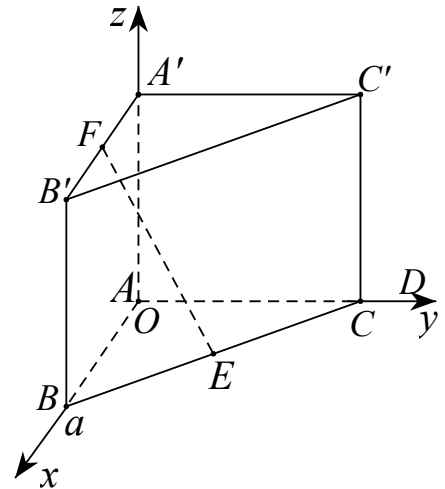
Vì I cách đều (ABC) và (ACC_1A_1) nên

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{2}t = ht \Leftrightarrow t = \frac{a}{a+2h} \Rightarrow I\left(\frac{ah}{a+2h}, \frac{a}{2}, \frac{ah}{a+2h}\right).$$

Khi đó điểm I chia đoạn EF theo tỉ số k , tức là:

$$x_I = \frac{x_E - kx_F}{1-k} \Leftrightarrow \frac{a}{a+2h} = \frac{a}{2(1-k)} \Leftrightarrow k = \frac{-a}{2h}$$

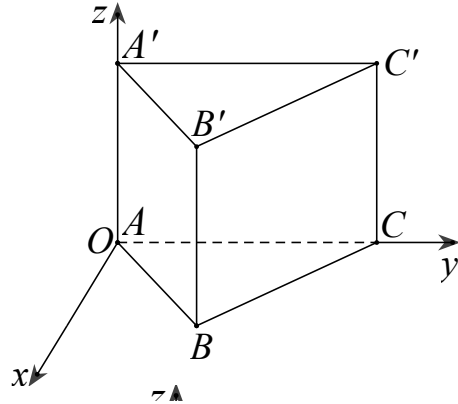
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABC) và (ACC_1A_1) là



$$d = z_I = \frac{ah}{a+2h}.$$

Trường hợp 2: hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC đều.

Ta có thể chọn hệ trục tọa độ như một trong hai hình trên



Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = 2a$. Gọi D là trung điểm của BB' ; điểm M di động trên cạnh AA' . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích tam giác DMC' .

Hướng dẫn

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với trung điểm của cạnh AC , $B \in Ox$; $C \in Oy$; Oz vuông góc với hai đáy. Khi đó:

Oz vuông góc với hai đáy. Khi đó:

$$A \left(0; -\frac{a}{2}; 0 \right); B \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0 \right); B' \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 2a \right);$$

$$C \left(0; \frac{a}{2}; 0 \right); C' \left(0; \frac{a}{2}; 2a \right)$$

$$D \text{ là trung điểm của } BB' \Rightarrow D \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a \right)$$

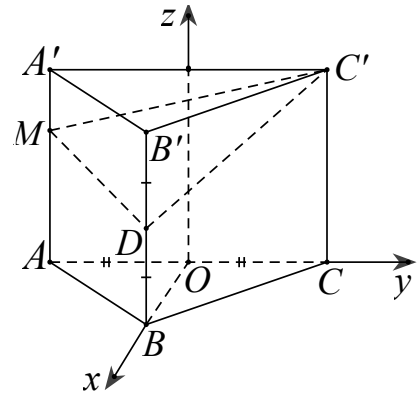
Do M di động trên AA' , tọa độ $M \left(0; -\frac{a}{2}; t \right)$ với $t \in [0; 2a]$

$$\text{Diện tích tam giác } DMC': S_{DMC'} = \frac{1}{2} \left| \left[\vec{DM}, \vec{DC'} \right] \right|$$

$$\text{Ta có: } \vec{DM} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; t-a \right); \vec{DC'} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a \right)$$

$$\left[\vec{DM}, \vec{DC'} \right] = \left(-\frac{at}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}(2a-t); -a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\left| \left[\vec{DM}, \vec{DC'} \right] \right| = \sqrt{\frac{a^2 t^2}{4} + \frac{3a^2}{4}(4a^2 - 4at + t^2) + \frac{3a^4}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$$



$$S_{DMC'} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC'} \right] \right| = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$$

Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của $S_{DMC'}$ phụ thuộc vào giá trị của hàm số $f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2$ trên đoạn $(t \in [0; 2a])$

$$f'(t) = 8t - 12a; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Ta có: } f(0) = 15a^2; f(2a) = 7a^2; f\left(\frac{3a}{2}\right) = 6a^2$$

GTLN của hàm số $f(t)$ trên $[0; 2a]$ là $15a^2$ và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác $DC'M$ là $S_{DC_1M} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$. Khi đó $t = 0$

GTNN của hàm số $f(t)$ trên $[0; 2a]$ là $6a^2$ và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác $DC'M$ là $S_{DC_1M} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

Phần 3. Một số dạng bài toán luyện tập.

Bài 1. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ đường cao h . Mặt phẳng $(A'BD)$ hợp với mặt bên $(ABB'A')$ một góc α . Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh bằng a , góc $\hat{A} = 60^\circ$, OB' vuông góc với đáy $ABCD$, cho $BB' = a$.

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

b) Tính khoảng cách từ B, B' đến $mp(ACD')$

Bài 3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy. Tính độ dài đoạn SA biết rằng số đo góc nhị diện (B, SC, D) bằng 120° .

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với $mp(ABCD)$ sao cho nhị diện cạnh AD của hình chóp $S.ABCD$ có số đo bằng 60° .

a) Tính SH và khoảng cách từ H đến $mp(SCD)$.

b) Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh $CK \perp SD$ và tính số đo góc nhị diện (A, SD, C) .

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCK) .

Bài 5. Chứng minh rằng trong hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' vuông góc với mặt phẳng $(B'CD')$.

Bài 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên BD và AD' lần lượt lấy hai điểm thay đổi M, N sao cho $DM = AN = x$, $(0 \leq x \leq a\sqrt{2})$ CMR: MN luôn song song với một mặt phẳng cố định

Bài 7. Cho tứ diện $DABC$ trong đó góc tam diện đỉnh D là vuông. Gọi I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh nếu (α) là mặt phẳng bất kỳ qua I thì khoảng

cách từ D xuống (α) bằng tổng đại số 3 khoảng cách A, B, C xuống (α) .

Bài 8. TSDH 2008-khối B

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC . Tính cosin

của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

Bài 9. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là hai điểm theo thứ tự thuộc BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}$.

$DN = \frac{3a}{4}$. CMR hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài 10. Đường thẳng (d) tạo với 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau các góc bằng nhau, ngoài ra nó không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa các đường thẳng này. CMR hình chiếu vuông góc (d') của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (α) cũng tạo thành những góc bằng nhau với 2 đường thẳng (d_1) và (d_2)

Bài 11. TSDH 2002-khối B

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P là trung điểm của $BB', CD, A'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $C'N$ và MP

Bài 12. TSDH 2006-khối A

Cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN .

2.4. Kết quả thực hiện đề tài:

Sau thời gian thực hiện đề tài SKKN, tôi đã tiến hành kiểm tra qua bài toán tìm lời giải bằng phương pháp tọa độ: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với $mp(ABCD)$ sao cho nhị diện cạnh AD của hình chóp $S.ABCD$ có số đo bằng 60° .

- Tính SH và khoảng cách từ H đến $mp(SCD)$.
- Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh $CK \perp SD$ và tính số đo nhị diện (A, SD, C) .
- Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCK) .

Kết quả :

- 100% học sinh biết dựa vào giả thiết để lựa chọn gốc tọa độ sao cho tọa độ các điểm trong bài toán được thuận tiện.
- 80% Phiên dịch đúng từ bài toán hình học không gian sang ngôn ngữ tọa độ
- 75% học sinh biết cách giải bài tập hoàn chỉnh tôi ưu.

3. Kết luận và iến nghị.

- Kết luận.

Qua kết quả điều tra khảo sát thực tiễn ta thấy rằng khi giải các bài toán hình học không gian, học sinh thường không chú ý đến phương pháp tọa độ và tính ưu việt của nó hoặc rất lúng túng khi giải bằng phương pháp tọa độ. Một

trong những khó khăn là học sinh chưa có kinh nghiệm trong việc chọn hệ trục tọa độ phù hợp với từng hình cụ thể. Do đó học sinh rất ngại khi giải các bài toán không gian.

Vì vậy, để giúp học sinh có hứng thú học môn hình học không gian và thấy được tính ưu việt của phương pháp tọa độ khi giải bài tập hình học không gian, thầy giáo cần hướng dẫn các em chọn hệ trục tọa độ phù hợp với từng hình cụ thể.

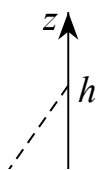
- Kiến nghị.

Trong nội dung, chương trình sách giáo khoa THPT không đề cập đến phương pháp tọa độ hóa các bài toán hình học không gian, do đó học sinh không có nhiều thời gian để nghiên cứu và vận dụng phương pháp này. Vì vậy tôi có đề nghị với tổ chuyên môn khi xây dựng chương trình giảng dạy môn tự chọn toán lớp 12, nên thảo luận để thống nhất đưa phương pháp tọa độ hóa vào trong nội dung của các tiết học tự chọn để các em giúp các em có thêm thời gian và kinh nghiệm để vận dụng phương pháp này trong giải một số bài toán hình học không gian.

Trong quá trình bồi dưỡng kiến thức về phương pháp tọa độ hóa trong các tiết học tự chọn, giáo viên nên cố gắng giúp các em có cái nhìn thật đơn giản về phương pháp tọa độ hóa. Muốn vậy phải chú trọng ngay từ bước đầu tiên là chọn hệ trục tọa độ hợp lí sao cho vừa trực quan, dễ nhìn lại vừa thuận lợi cho việc tính tọa độ của các điểm khác có liên quan. Nếu làm được điều này, các em sẽ thấy được sự đơn giản và tiện lợi của phương pháp. Từ đó các em sẽ tự tin và có hứng thú học môn hình học không gian hơn.

Trong quá trình biên soạn chắc chắn còn nhiều thiếu sót, rất mong các Thầy cô và các em học sinh đóng góp ý kiến để chuyên đề của tôi hoàn thiện hơn và có thể áp dụng rộng rãi hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 25 tháng 4 năm 2013</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Người viết Trần Lương Hải
---	--



CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Thị Vân Anh: Phương pháp giải toán tự luận hình học không gian. NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội năm 2008.
2. Đặng Khắc Nhân, Lê Đỗ Tập: Giải các bài toán hình học trong không gian bằng phương pháp tọa độ. NXB Giáo dục - 1997.
- 3 Phan Huy Khải: Phương pháp tọa độ để giải các bài toán sơ cấp. NXB Thành phố Hồ Chí Minh
4. Văn Như Cương: Trần Đức Huyền. Hình học 11. NXB Giáo dục - 1993
5. Lê Hồng Đức, Lê Hữu Trí: Phương pháp giải toán hình học giải tích trong không gian. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
6. Một số đề tài SKKN về phương pháp tọa độ hóa trong giải các bài toán hình học không gian của các giáo viên có kinh nghiệm.
7. Một số đề thi ĐH-CĐ và đề thi THPT quốc gia; Đề thi thử THPTQ quốc gia của các trường THPT.