KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH
LẦN THỨ 25

PHÚ YÊN, 10-16/4/2017

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

ĐẠI HỌC
PHU YÊN

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

ĐẠI HỌC
PHÚ YÊN

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH
LẦN THỨ 25

BAN BIÊN TẬP

Phùng Hồ Hải (chủ biên)
Viện Toán học
Ngô Quốc Anh
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
Lê Xuân Dũng
Đại học Hồng Đức
Lê Thanh Hiếu
Đại học Quy Nhơn
Trần Văn Thành
Viện Toán học
Dương Viết Thông
Đại học KTQD Hà Nội

PHÚ YÊN, 10-16/4/2017

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH LẦN THỨ 25

Thông tin về kỳ thi

Thông tin chung

Kỳ thi Olympic Toán lần thứ 25 được tổ chức từ 10-16/4/2017 tại Trường đại học Phú Yên. Năm nay ngoài kỳ thi dành cho sinh viên, Hội Toán học tiếp tục phối hợp với Trường Đại học Phú Yên tổ chức kỳ thi dành cho học sinh trung học phổ thông chuyên.

Ông Phan Đình Phùng, PCT UBND Tỉnh Phú Yên trao cờ lưu niệm cho các trưởng đoàn tại lễ khai mạc

Đã có 78 đoàn từ các trường đại học, cao đẳng, học viện trong cả nước tham dự kỳ thi, có 608 sinh viên dự thi các môn Đại số và Giải tích. Tại kỳ thi dành cho học sinh trung học phổ thông chuyên, đã có 10 trường gửi đoàn tham dự, với tổng số 50 học sinh.

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Trường đại học Phú Yên

Ban tổ chức

Đồng trưởng ban: TS. Trần Văn Chương - Hiệu trưởng trường Đại học Phú Yên; GS.TSKH Phùng Hồ Hải - Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam

Phó ban: Đại diện Bộ Giáo dục & Đào tạo (Lãnh đạo Vụ công tác Học sinh sinh viên), Đại diện TW Hội sinh viên Việt Nam; GS.TSKH Phạm Thế Long - Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam; PGS.TS Nguyễn Huy Vị - Phó hiệu trưởng trường Đại học Phú Yên.

Ủy viên: TS Lê Đức Thoang, Trưởng khoa Khoa học Tự nhiên, Đại học Phú Yên; ThS Lê Thị Kim Loan, Phó trưởng phòng Đào tạo, Đại học Phú Yên; TS Lê Cường, Đại học Bách khoa Hà Nội; TS Đoàn Trung Cường, Viện Toán học; TS Nguyễn Chu Gia Vượng, Viện Toán học; TS Nguyễn Duy Thái Sơn, Đại học Sư phạm Đà Nẵng; TS Ngô Quốc Anh, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.

TS. Trần Văn Chương, Hiệu trưởng Trường Đại học Phú Yên khai mạc

Kết quả

Với kết quả thi của thí sinh, Hội đồng thi đã thống nhất danh sách sinh viên được trao giải. Số lượng giải được trao cụ thể như sau:

Kỳ thi Olympic sinh viên
BẢNG A

Môn Đại số

- Giải nhất: 22 giải.
- Giải nhì: 42 giải.
- Giải ba: 55 giải.
- Khuyến khích: 5 giải.

Môn Giải tích

- Giải nhất: 23 giải.
- Giải nhì: 38 giải.
- Giải ba: 37 giải.
- Khuyến khích: 10 giải.

BẢNG B

Môn Đại số

- Giải nhất: 7 giải.
- Giải nhì: 16 giải.
- Giải ba: 32 giải.
- Khuyến khích: 10 giải.

Môn Giải tích

- Giải nhất: 9 giải.
- Giải nhì: 20 giải.
- Giải ba: 32 giải.
- Khuyến khích: 13 giải.

Giải đặc biệt: Ban tổ chức kỳ thi đã trao 11 giải đặc biệt cho các sinh viên hoặc đạt điểm cao nhất của một môn hoặc đạt hai giải nhất của cả hai môn.

Kỳ thi Olympic dành cho học sinh THPT

Tại kỳ thi dành cho học sinh THPT Ban tổ chức đã trao: 05 huy chương Vàng, 09 Huy chương Bạc và 12 Huy chương Đồng.

Học sinh làm bài thi.

Lễ bế mạc.

Phát biểu khai mạc Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh 2017

Phùng Hồ Hải [1]

Thưa các quý vị đại biểu,
Thưa các thầy cô giáo,
Các em học sinh và sinh viên thân mến,
Olympic Toán học sinh viên đến nay đã trải qua chặng đường một phần tư thế kỷ. Hôm nay chúng ta cùng có mặt tại đây để khai mạc kỳ thi lần thứ 25. Khởi đầu từ một kỳ thi với sự có mặt của 3 trường đại học tại Hà Nội, ngày nay kỳ thi đã trở thành một kỳ thi toàn quốc, với sự tham gia hàng năm của sinh viên từ 70-80 trường đại học và cao đẳng trên cả nước. Từ hai năm nay chúng ta còn có kỳ thi dành cho các học sinh THPT chuyên. Năm nay đã có 90 trường đăng ký với tổng số 667 sinh viên và 61 học sinh THPT.
Các bạn học sinh và sinh viên thân mến!
Kỳ thi Olympic toán học sinh viên và học sinh được tổ chức với mục đích khuyến khích, động viên niềm say mê, tình yêu toán học trong các bạn sinh viên và học sinh. Đa số sinh viên tham dự Olympic toán học không phải là sinh viên ngành toán, nhưng tất cả các bạn đều có tình yêu với toán học.
Các bạn thân mến!
Toán học không chỉ là vẻ đẹp hay sự thách thức về trí tuệ. Toán học còn có thể rất có ích đối với các bạn trong mỗi công việc của các bạn sau này. Toán học có thể giúp các bạn có một phương phát tư duy logic và mạch lạc; toán học có thể giúp các bạn tăng cường kỹ năng phân tích, giải quyết vấn đề; tư duy toán học tốt có thể giúp các bạn đưa ra một giải pháp kinh tế-kỹ thuật tốt hơn, một phương án nhân sự hợp lý hơn, cũng có thể giúp các bạn viết một bài văn khúc chiết, mạch lạc hơn. Giải Nobel về kinh tế cho nhiều nhà toán học, gần đây nhất là cho các GS Roth và Shapley về bài toán ghép cặp ổn định, trước đó là GS Nash về bài toán cân bằng với những ứng dụng ngoạn mục trong kinh tế, là minh chứng rõ nét cho những nhận định trên. Có không ít những ví dụ của các doanh nhân thành đạt, hay các nhà quản lý, thậm chí nhà chính trị vốn là những sinh viên ngành toán.
Để có thể vận dụng được những năng lực trên một cách hiệu quả nhất, điều quan trọng là các bạn hãy cố gắng hiểu được bản chất của những nội dung kiến thức toán học mà mình đang được học, cũng như những ý nghĩa thực tiễn của chúng. Có thể kể đến những ví dụ điển hình như mối liên hệ giữa

[1] Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam, Trưởng ban tổ chức Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh Toàn quốc lần thứ 25.

đạo hàm và vận tốc, mối liên hệ giữa đạo hàm và cực trị, hay mối liên hệ giữa tích phân và thể tích, giữa tích phân và giá trị trung bình. . .

Ông Phan Đình Phùng, Phó chủ tịch tỉnh Phú Yên và GS. Phùng Hồ Hải, Trưởng ban tổ chức kỳ thi.

Trong những năm gần đây, Ban tổ chức cũng đặt cho mình nhiệm vụ xây dựng những bài thi đơn giản hơn nhưng đồng thời cũng có ý nghĩa, hay mối liên hệ tới thực tiễn. Chúng tôi hy vọng cách ra đề thi sẽ có ảnh hưởng tích cực tới trình độ, hiểu biết của các bạn về toán, khiến việc luyện tập, chuẩn bị cho kỳ thi trở nên có ích hơn.
Thưa các thầy cô giáo, các bạn học sinh sinh viên thân mến. Olympic toán học không chỉ là một kỳ tranh tài về trí tuệ. Olympic còn là một dịp gặp gỡ giao lưu của các bạn học sinh, sinh viên từ mọi miền đất nước, cũng là một dịp gặp gỡ trao đổi của các đồng nghiệp, là giảng viên các trường đại học và cao đẳng từ khắp các tỉnh thành cả nước. Đây là một ý nghĩa văn hóa hết sức quan trọng của kỳ thi. Năm nay chúng ta cảm ơn đơn vị chủ nhà, trường Đại học Phú Yên đã có nhiều sáng kiến, tổ chức các hoạt động giao lưu thể thao và ca nhạc cho các đoàn tham dự. Chúng tôi hy vọng, sau những ngày thi căng thẳng và những buổi chấm thi mệt mỏi, những buổi hội thảo với nhiều tranh luận sôi nổi, các thầy cô giáo và các bạn học sinh sinh viên cũng sẽ có những thời gian nghỉ ngơi thật thoải mái, những chuyến đi tham quan bổ ích và lý thú.
Thưa các quý vị đại biểu, các thầy cô giáo và các em học sinh thân mến.

Có một điều đặc biệt, từ nhiều năm nay các kỳ thi Olympic toán thường được tổ chức tại các tỉnh miền Trung, mảnh đất nắng gió nhiều gian lao vất vả nhưng lại được thiên nhiên ban cho bờ biển trải dài với không biết bao nhiêu danh lam thắng cảnh. Mỗi lần tới miền Trung là thêm một lần chúng ta cảm nhận được tình người miền Trung mặn mà như muối biển. Phú Yên là một vùng đất đặc biệt, nằm ở miền cực Đông của tổ quốc, với nhiều danh lam thắng cảnh nổi tiếng như Ghềnh đá đĩa, Mũi Đại Lãnh, cảng Vũng Rô, có núi Nhạn, có sông Đà Rằng. Vẻ đẹp của non nước Phú Yên khiến chúng ta ngỡ ngàng, khiến chúng ta tự hào về đất nước mình hơn, yêu quý đất nước mình hơn.
Như là một sự tình cờ, Olympic toán học được tổ chức tại trường Đại học Phú Yên luôn vào những dịp đặc biệt của nhà trường, chứng kiến những bước phát triển của nhà trường. Năm nay chúng ta chứng kiến cột mốc 10 năm phát triển của trường Đại học Phú Yên, với những thành tựu ấn tượng trong công tác mở rộng đào tạo và phát triển nhân lực. Thay mặt BCH Hội toán học Việt Nam, thay mặt Ban tổ chức Olympic Toán học sinh viên và học sinh toàn quốc, chúng tôi xin chúc mừng trường Đại học Phú Yên với những bước trưởng thành của mình, xin chúc Trường tiếp tục phát triển trở thành một trường đại học mạnh của vùng. Nhân dịp này, chúng tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới lãnh đạo tỉnh, lãnh đạo các sở ban ngành tỉnh Phú Yên, đã hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi cho các kỳ thi Olympic được tổ chức tại tỉnh nhà.
Thưa các vị khách quý, thưa các vị lãnh đạo, thưa các thầy cô giáo, các em học sinh thân mến, thay mặt BTC kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh toàn quốc lần thứ 25, tôi xin tuyên bố khai mạc kỳ thi. Xin chúc các em học sinh làm bài thật tốt và tham gia được nhiều hoạt động ngoại khóa bổ ích. Xin chúc các thầy cô, các vị khách quý dồi dào sức khỏe và thành công trong công tác.

THÔNG BÁO
Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên và Học sinh lần thứ 26
Quảng Bình 9-15/4/2018

Thông tin chung

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các hội khoa học và kĩ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Đại học Quảng Bình

Thời gian và địa điểm

Từ 10-16/4/2016 tại Trường Đại học Quảng Bình - Thành phố Đồng Hới - Tỉnh Quảng Bình

Ban tổ chức

Đồng trưởng ban: PGS.TS. Hoàng Dương Hùng - Hiệu trưởng trường Đại học Quảng Bình; GS.TSKH Phùng Hồ Hải - Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam;

Phó ban: Đại diện Bộ Giáo dục & Đào tạo (Lãnh đạo Vụ công tác Học sinh sinh viên), Đại diện TW Hội sinh viên Việt Nam; GS.TSKH Phạm Thế Long - Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam; TS. Bùi Khắc Sơn - Phó hiệu trưởng trường Đại học Quảng Bình;

Ủy viên: TS Lê Cường, Viện Công nghệ Thông tin – Đại học Quốc gia Hà Nội; TS Đoàn Trung Cường, Viện Toán học; TS. Nguyễn Thành Chung, Trường Đại học Quảng Bình; PGS.TS. Trần Ngọc, Trường Đại học Quảng Bình; TS Nguyễn Duy Thái Sơn, Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng; TS Dương Việt Thông, Đại học Kinh tế quốc dân; TS Nguyễn Chu Gia Vượng, Viện Toán học.

Đăng ký

Các đoàn đăng ký tham dự trực tuyến tại trang web của Hội Toán học Việt Nam theo địa chỉ http://vms.org.vn (chọn: Hoạt động/Olympic Toán Sinh viên/Đăng ký tham dự).

Thời gian đăng ký: **từ ngày 01/01/2018 đến trước ngày 20/3/2018**.

Chương trình

- Ngày 9/4/2018: 8h00-16h00: Các đoàn đăng ký .
- Ngày 10-13/4/2018: Khai mạc, tổ chức thi, chấm thi, xét giải
- Ngày 14/4/2018: Tổng kết và trao giải
- Ngày 15/4/2018: Hội thảo về công tác chuẩn bị kỳ thi Olympic sinh viên năm 2018.

Liên hệ

Các vấn đề cần hỗ trợ từ Trường Đại học Quảng Bình (giúp liên hệ chỗ ở hoặc giới thiệu địa chỉ khách sạn/nhà khách, địa điểm thi, hướng dẫn đường đi,...):

PGS.TS. Trần Ngọc
daotaoqb@gmail.com hoặc ngoct@qbu.edu.vn
Điện thoại: 0912098584

Các vấn đề liên quan tới tổ chức chung của kỳ thi:

GS. TSKH. Phùng Hồ Hải
Email: olymtoansv@gmail.com
Điện thoại: 0904134384

Các thông tin về kỳ thi đều được cập nhật trên trang web của Hội Toán học Việt Nam tại địa chỉ htttp://vms.org.vn

Đề cương các môn thi

MÔN ĐẠI SỐ

Phần I: SỐ PHỨC VÀ ĐA THỨC

1. Số phức, các tính chất cơ bản. Mô tả hình học của số phức.
2. Đa thức một biến: các phép toán của đa thức, số học của đa thức (phân tích thành nhân tử, ước chung lớn nhất, nguyên tố cùng nhau).
3. Nghiệm của đa thức, định lý Bezout, định lý Viete, đa thức đối xứng*.
4. Bài toán xác định đa thức (nội suy, phương pháp hệ số bất định,...)

Phần II: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. Hệ phương trình tuyến tính.
   a. Hệ phương trình tuyến tính. Ma trận.
   b. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss-Jordan.
   c. Nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính. Hệ phương trình tuyến tính không suy biến.
   d. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.
2. Ma trận và định thức
   a. Ma trận, các phép toán của ma trận và một số tính chất cơ bản.
   b. Hạng của ma trận, cách tính.
   c. Ứng dụng của ma trận vào việc nghiên cứu hệ phương trình tuyến tính. Định lý Kronecker-Capelli.
   d. Định thức: định nghĩa (quy nạp theo cấp và theo phép thế), khai triển Laplace, tính chất của định thức, các phương pháp tính định thức.
   e. Ma trận nghịch đảo, các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo (phần bù đại số, biến đổi sơ cấp).
   f. Ứng dụng của định thức vào việc giải hệ phương trình tuyến tính: Định lý Cramer.
   g. Ma trận đồng dạng và tính chéo hóa được của ma trận*.
   h. Một số dạng ma trận đặc biệt: ma trận Vandermonde, ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng, ma trận Hermite, ma trận trực giao*.

3. Không gian tuyến tính và ánh xạ tuyến tính.
    a. Định nghĩa, không gian con, các ví dụ liên quan tới Đại số, Giải tích.
    b. Cơ sở và số chiều.
    c. Ánh xạ tuyến tính, ma trận biểu diễn.
    d. Toán tử tuyến tính, trị riêng, véc tơ riêng.
    e. Đa thức đặc trưng, đa thức tối thiểu, Định lý Cayley-Hamilton*.

Phần III: TỔ HỢP

1. Chỉnh hợp, tổ hợp, tam giác Pascal, hệ số nhị thức.
2. Các quy tắc đếm cơ bản: quy tắc cộng, quy tắc nhân, nguyên lý bù trừ.
3. Phân hoạch của số tự nhiên.
4. Nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn.
5. Chuỗi lũy thừa hình thức. Hàm sinh. Ứng dụng của hàm sinh*.

TÀI LIỆU

1. Lê Tuấn Hoa: Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập, NXB ĐHQG Hà Nội, 2006.
2. Nguyễn Hữu Việt Hưng: Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội, 2000.
3. V. Prasolov: Polynomials, Springer, 2004.
4. K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, Bản dịch tiếng Việt: Toán học rời rạc và Ứng dụng trong tin học, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2007.
5. Ngô Việt Trung: Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội, 2002.

Ghi chú: *Các nội dung có dấu * dành cho sinh viên dự thi bảng A.*

MÔN GIẢI TÍCH

Phần I: DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ

1. Dãy hội tụ, dãy đơn điệu, dãy bị chặn, dãy dần ra vô cực.
2. Các tính chất và phép toán về dãy hội tụ.
3. Tìm giới hạn của dãy số.
4. Hàm đơn điệu, hàm bị chặn, hàm tuần hoàn, hàm chẵn và hàm lẻ, hàm ngược.
5. Giới hạn của hàm số.
6. Tính liên tục, các tính chất của hàm liên tục.
7. Hàm lồi, bất đẳng thức Jensen*.

Phần II: GIẢI TÍCH TRÊN HÀM MỘT BIẾN

1. Phép tính vi phân hàm một biến.
   a. Định nghĩa và các phép toán về đạo hàm.
   b. Các định lý của Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, L'Hôpital.
   c. Công thức Taylor, công thức Maclaurin.
   d. Cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số.
   e. Hàm lồi khả vi*.
2. Phép tính tích phân hàm một biến.
   a. Nguyên hàm và tích phân bất định.
   b. Các phương pháp tính tích phân bất định.
   c. Tích phân các hàm hữu tỷ, hàm vô tỷ, hàm lượng giác.
   d. Định nghĩa và các phương pháp tính tích phân xác định, tính khả tích.
   e. Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân (đạo hàm của tích phân xác định theo cận của tích phân, công thức Newton-Leibniz).
   f. Tích phân phụ thuộc tham số.
   g. Các định lý về trung bình tích phân.
   h. Bất đẳng thức tích phân.
   i. Sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng, các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân của hàm dương*.

3. Chuỗi số, dãy hàm và chuỗi hàm.

    a. Chuỗi số, tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ của chuỗi*.

    b. Các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn tích phân (Cauchy), tiêu chuẩn đối với chuỗi đan dấu (Leibniz), hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện, tiêu chuẩn căn thức (Cauchy), tiêu chuẩn tỉ số (D'Alembert)*.

    c. Các tiêu chuẩn hội tụ Abel, Dirichlet*.

    d. Chuỗi lũy thừa*.

    e. Tiêu chuẩn hội tụ đều cho dãy hàm và chuỗi hàm một biến, các tính chất cơ bản của dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ đều*.

Phần III: KHÔNG GIAN METRIC*

1. Không gian metric.

2. Tôpô trên không gian metric.

3. Ánh xạ liên tục, đẳng cự, đồng phôi.

4. Các tính chất đầy đủ, compact, liên thông.

TÀI LIỆU

1. J. Dieudonné, *Cơ sở giải tích hiện đại* (Phan Đức Chính dịch, tập 1), NXB ĐH&THCN, 1978.

2. G.M. Fichtengon, *Cơ sở giải tích toán học*, NXB ĐH&THCN, 1986.

3. W.A.J. Kosmala, *A friendly introduction to analysis*, Pearson Prentice Hall, 2004.

4. Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích toán học*, NXB Giáo dục, 1997.

5. Nguyễn Duy Tiến, *Bài giảng giải tích*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.

Ghi chú: *Các nội dung có dấu * dành cho sinh viên dự thi bảng A.*

Phần II

ĐỀ THI

Chương 1

Đề thi chính thức

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút. Đề thi gồm 2 trang

Bảng A

Bài A.1. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 3, x_2 = 7$ và x_n, $n \geq 3$, là định thức của ma trận vuông cấp n như sau

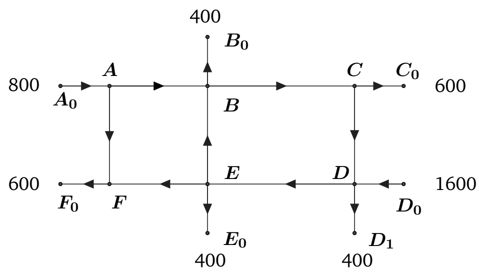
$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(a) (2 điểm) Tính x_5.

(b) (3 điểm) Chứng minh rằng $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

(c) (3 điểm) Chứng minh rằng với mọi $n > 0$, $x_n + 1$ là một số tự nhiên và là luỹ thừa của 2.

Bài A.2. (8 điểm) Trong một thành phố nọ có một hệ thống đường một chiều như trong Hình 1, trong đó A, B, C, D, E, F là các giao lộ, $A_0, B_0, C_0, D_0, D_1, E_0, F_0$ là các lối vào hoặc ra khỏi hệ thống đó, mũi tên chỉ chiều của đường. Người ta đếm số lượng xe vào và ra khỏi hệ thống này trong một ngày và thấy: Có 800 xe vào lối A_0, 400 xe ra khỏi hệ thống qua lối B_0, 600 xe ra lối C_0, 1600 xe vào lối D_0 và 400 xe ra lối D_1, 400 xe ra lối E_0 và 600 xe ra lối F_0. Người ta cũng quan sát thấy số lượt xe đi trên đoạn đường AB nhiều gấp đôi số lượt xe đi trên đoạn EF; số lượt xe đi trên đoạn đường DE nhiều gấp rưỡi số lượt xe đi trên đoạn đường BC. Giả sử các xe vào hệ thống đều ra khỏi hệ thống trong thời gian đó. Hỏi trong ngày hôm đó đã có bao nhiêu lượt xe đi qua các đoạn đường AB, BC, CD, EB và AF?



Hình 1

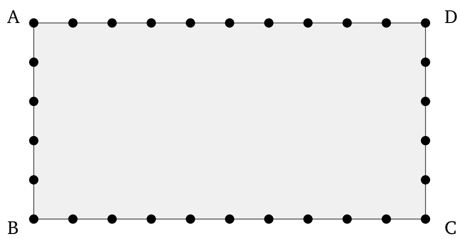
 (Xem trang sau)

Bài A.3. Ông V trồng 30 cây xoan dọc theo rìa xung quanh một mảnh vườn $20m \times 40m$ (xem Hình 2, cạnh dài $AD = BC = 40m$), khoảng cách giữa hai cây cạnh nhau là $4m$. Đến khi cây đủ độ tuổi khai thác, ông V muốn chặt một số cây để bán. Hỏi ông V có bao nhiêu phương án chặt cây nếu:

(a) (3 điểm) Ông V muốn chặt 2 cây không cạnh nhau trong số 11 cây trên cạnh BC?

(b) (4 điểm) Ông V muốn chặt 4 cây trong số 30 cây mà không có 3 cây liên tiếp nào bị chặt?

(c) (2 điểm) Ông V muốn chặt 5 cây trong số 30 cây mà giữa hai cây bị chặt bất kì (tính cả thuận và ngược chiều kim đồng hồ) luôn có ít nhất hai cây không bị chặt?



Hình 2

Bài A.4. Cho n là một số tự nhiên. Xét đa thức với hệ số thực $P(x)$ khác hằng và thỏa mãn: tồn tại các số thực $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sao cho $P(x_k) \leq 0$ với k lẻ và $P(x_k) \geq 0$ với k chẵn, $1 \leq k \leq n$. Hỏi đa thức $P(x)$ có thể có bậc nhỏ nhất bằng bao nhiêu trong các trường hợp sau

(a) (2 điểm) $n = 3$.

(b) (3 điểm) $n = 2017$.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút. Đề thi gồm 2 trang

Bảng B

Bài B.1. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 3, x_2 = 7$ và x_n, $n \geq 3$, là định thức của ma trận vuông cấp n như sau

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(a) (2 điểm) Tính x_5.

(b) (3 điểm) Chứng minh rằng $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

(c) (3 điểm) Chứng minh rằng với mọi $n > 0$, $x_n + 1$ là một số tự nhiên và là luỹ thừa của 2.

Bài B.2. (8 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình biến số thực x, y, z theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 2+m \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = 2+m \end{cases}$$

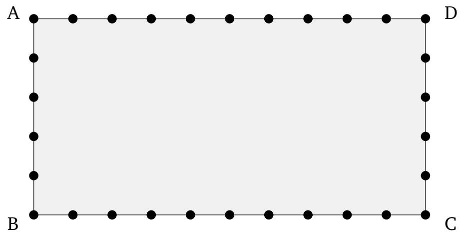
Bài B.3. Ông V trồng 30 cây xoan dọc theo rìa xung quanh một mảnh vườn $20m \times 40m$ (xem Hình 1 (trang 2), cạnh dài $AD = BC = 40m$), khoảng cách giữa hai cây cạnh nhau là $4m$. Đến khi cây đủ độ tuổi khai thác, ông V muốn chặt một số cây để bán. Hỏi ông V có bao nhiêu phương án chặt cây nếu:

(a) (3 điểm) Ông V muốn chặt 2 cây không cạnh nhau trong số 11 cây trên cạnh BC?

(b) (4 điểm) Ông V muốn chặt 4 cây trong số 30 cây mà không có 3 cây liên tiếp nào bị chặt?

(c) (2 điểm) Ông V muốn chặt 5 cây trong số 30 cây mà giữa hai cây bị chặt bất kì (tính cả thuận và ngược chiều kim đồng hồ) luôn có ít nhất hai cây không bị chặt?

 (Xem trang sau)



Hình 1

Bài B.4. (5 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số thực và có bậc 100 sao cho đa thức đạo hàm $P'(x)$ là ước của $P(x)$, nghĩa là có một đa thức với hệ số thực $Q(x)$ thỏa mãn $Q(x)P'(x) = P(x)$.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng A

Bài A.1. (*6 điểm*) Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - 1 \quad \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Bài A.2. (*6 điểm*) Cho $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ là một hàm số khả vi liên tục. Chứng minh rằng

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{2017}} \leqslant 0.$$

Kết luận trên còn đúng hay không nếu ta thay số 2017 bởi số 1?

Bài A.3. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

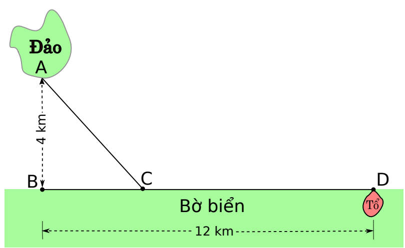
1. (*2 điểm*) Tìm một ví dụ về hàm số liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện trên.
2. (*4 điểm*) Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở $(a, b) \subset (0, 1)$, không rỗng, sao cho

$$|f(x)| > 4 \quad \forall x \in (a, b).$$

Bài A.4. Theo các nhà điểu cầm học, khi bay ngang qua mặt nước chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền và, theo bản năng, chim luôn chọn đường bay ít tiêu tốn năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển để đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau 12 km. Đặt

$$r = W/L;$$



trong đó, W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.

 (Xem tiếp trang sau)

1. (*2 điểm*) Hãy xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.
2. (*1 điểm*) Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.
3. (*3 điểm*) Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$?
4. (*1 điểm*) Với những giá trị nào của r thì chim bay thẳng (từ A) đến tổ D? Có khả năng nào để chim bay đến B trước rồi mới bay về tổ D không?

Bài A.5. (*5 điểm*) Cho trước số thực $\alpha \geqslant 1$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $C > 0$ sao cho với mọi cặp số thực $x > 0$, $y > 0$, ta đều có

$$\left|(x+y)^{\alpha} - \alpha x^{\alpha-1} y - x^{\alpha}\right| \leqslant C x^{\max\{0,\alpha-2\}} y^{\min\{2,\alpha\}} + C y^{\alpha}.$$

Kết luận trên còn đúng hay không nếu $0 < \alpha < 1$?

HẾT

Ghi chú: *Thí sinh **không** được phép sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi **không** cần giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

(*Đề thi có 02 trang*)

Bảng B

Bài B.1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - 1 \quad \forall n \geqslant 1.$$

1. (*2 điểm*) Chứng minh rằng
$$-1 < u_n < 0 \quad \forall n \geqslant 2.$$
2. (*4 điểm*) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn và giới hạn của nó là $1 - \sqrt{3}$.

Bài B.2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định theo công thức

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leqslant 0, \\ a^x + x^a & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó $a > 0$ là một hằng số thực. Chứng minh rằng:

1. (*3 điểm*) f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. (*5 điểm*) f không khả vi tại 0.

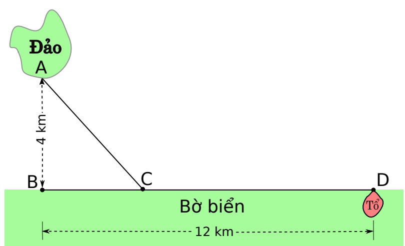
Bài B.3. (*5 điểm*) Tính

$$\int_0^3 \sqrt{2 + \sqrt{1 + x}}\, \mathrm{d}x.$$

Bài B.4. Theo các nhà điểu cầm học, khi bay ngang qua mặt nước chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền và, theo bản năng, chim luôn chọn đường bay ít tiêu tốn năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển để đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau 12 km. Đặt

$$r = W/L;$$



trong đó, W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.

 (*Xem tiếp trang sau*)

1. (*2 điểm*) Hãy xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.
2. (*1 điểm*) Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.
3. (*3 điểm*) Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$?

Bài B.5. (*5 điểm*) Cho trước số thực $\alpha \geqslant 1$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $C > 0$ sao cho với mọi số thực $x > 0$ ta đều có

$$\left|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right| \leqslant C x^{\min\{2,\alpha\}} + C x^\alpha.$$

Kết luận trên còn đúng hay không nếu $0 < \alpha < 1$?

HẾT

Ghi chú: *Thí sinh **không** được phép sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi **không** cần giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2017**

ĐỀ THI MÔN: TỔ HỢP
Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Bài toán lát đôminô

Một quân đôminô là một bảng ô vuông kích thước 1×2 hoặc 2×1.

Giả sử m, n là hai số nguyên dương. Ta nói một bảng ô vuông kích thước $m \times n$, gồm m hàng và n cột, là có thể lát được bởi các quân đôminô nếu ta có thể xếp một số quân đôminô đôi một không chồng lên nhau sao cho chúng phủ kín bảng đã cho và không phủ bất kì phần nào khác của mặt phẳng. Hai cách lát là khác nhau nếu tồn tại 2 ô vuông của bảng được phủ bởi cùng 1 quân đôminô trong cách lát này nhưng không được phủ bởi cùng 1 quân đôminô trong cách lát kia.

Để thuận tiện, trong mỗi bảng ô vuông, ta đánh thứ tự các hàng từ dưới lên trên và các cột từ trái qua phải. Các ô của bảng được kí hiệu một cách tương ứng: ô (i, j) kí hiệu ô nằm trên hàng i và cột j.

A. Sự tồn tại cách lát đôminô

Bài PT.1. Chứng minh rằng với mọi m, n nguyên dương bảng $m \times n$ có thể lát được bởi các quân đôminô khi và chỉ khi mn là một số chẵn.

Bài PT.2. Với các giá trị nào của m, n thì bảng $m \times n$ bị khuyết ô $(1, 1)$ có thể lát được bởi các quân đôminô?

Bài PT.3. Cùng câu hỏi trên cho bảng $m \times n$ bị khuyết 2 ô $(1, 1)$ và (m, n).

B. Số cách lát và quan hệ truy hồi

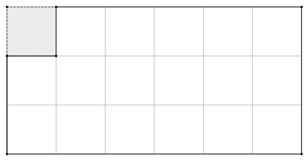
Bài PT.4. Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n là số cách lát đôminô của một bảng chữ nhật $2 \times n$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

(Xem tiếp trang sau)

Từ đó suy ra $u_n = F_n$ với mọi $n \geq 1$, trong đó $(F_n)_{n\geq 0}$ là dãy Fibonacci định nghĩa bởi: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 0$.

Bài PT.5. a) Với n nguyên dương, gọi t_n là số cách lát đôminô của một bảng $3 \times n$ và s_n là số cách lát một bảng $3 \times n$ bị khuyết ô $(3, 1)$:



Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì

$$\begin{cases} t_n = 2s_{n-1} + t_{n-2} \\ s_n = t_{n-1} + s_{n-2}. \end{cases}$$

b) Xác định công thức tổng quát của t_n.

Bài PT.6. Với mọi số nguyên dương n, gọi x_n là số cách lát đôminô một bảng $4 \times n$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ thì

$$x_{n+4} = x_{n+3} + 5x_{n+2} + x_{n+1} - x_n.$$

C. Tính chẵn lẻ của số cách lát

Trong các bài toán sau, gọi $f(m, n)$ là số cách lát một bảng $m \times n$ bởi các quân đôminô.

Bài PT.7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $f(n, n)$ là một số chẵn.

Bài PT.8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, n thì $f(2^k - 1, 2n)$ là một số lẻ.

Bài PT.9. a) Ta gọi một bảng $n \times n$ $(n \geq 2)$ với một số ô (có thể bằng 0) của hàng n và một số ô (có thể bằng 0) của cột n bị khuyết là một bảng *tựa vuông* cỡ n. Một bảng tựa vuông cỡ n được gọi là tốt nếu ô (n, n) bị khuyết và với mọi $1 \leq k \leq n - 1$, trong số 2 ô (n, k) và (k, n) có đúng 1 ô bị khuyết. Chứng minh rằng số cách lát một bảng tựa vuông là lẻ khi và chỉ khi bảng đó là một bảng tựa vuông tốt.

b) Chứng minh rằng $f(m, n)$ là một số lẻ khi và chỉ khi $m + 1$ và $n + 1$ nguyên tố cùng nhau.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2017**

ĐỀ THI MÔN: SỐ HỌC
Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Phương trình Markov

Nhắc lại rằng phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

được gọi là phương trình Markov. Mỗi nghiệm nguyên dương $(x, y, z) = (a, b, c)$ của nó được gọi là một bộ Markov. Các số a, b, c được gọi là các thành phần của bộ đó.

A. Phương trình nghiệm nguyên Markov và cây Markov

Bài PT.1. Chứng minh rằng các bộ Markov có hai thành phần bằng nhau chỉ có thể là $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ và các hoán vị của chúng.

Bài PT.2. Giả sử (a, b, c) là một bộ Markov. Chứng minh rằng $3bc - a, 3ac - b, 3ab - c$ là các số nguyên dương và $(3bc - a, b, c)$, $(a, 3ac - b, c)$, $(a, b, 3ab - c)$ cũng là các bộ Markov.

Bài PT.3. Giả sử (a, b, c) là một bộ Markov mà $a > b > c$. Chứng minh rằng $3ac - b > a$, $3ab - c > a$ nhưng $a > 3bc - a$.

Để thuận tiện, ta viết các bộ Markov với thành phần lớn nhất nằm ở giữa và gạch chân nó để nhấn mạnh. Như vậy, ta sẽ viết $(t, \underline{m}, p)$ cho một bộ Markov (t, m, p) mà $m \geq t, m \geq p$. Ta xây dựng **cây Markov** bằng truy hồi như sau:

- ta viết bộ $(1, \underline{1}, 1)$ ở dòng đầu tiên, bộ $(1, \underline{2}, 1)$ ở dòng thứ hai, bộ $(1, \underline{5}, 2)$ ở dòng thứ ba;

 (Xem tiếp trang sau)

- tuần tự **từ trái sang phải**, ứng với mỗi bộ ba Markov $(t, \underline{m}, p)$ đã có ở dòng thứ n (với $n \geq 3$), ta viết 2 bộ ba $(t, \underline{3tm - p}, m)$ và $(m, \underline{3mp - t}, p)$ theo thứ tự đó, ở dòng thứ $n + 1$, ngay dưới bộ ba $(t, \underline{m}, p)$.

Một số dòng đầu tiên của cây Markov là như sau:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & (1, \underline{1}, 1) \arrow[d] & & & \\
 & & & (1, \underline{2}, 1) \arrow[d] & & & \\
 & & & (1, \underline{5}, 2) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & (1, \underline{13}, 5) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & (5, \underline{29}, 2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(1, \underline{34}, 13) & & (13, \underline{194}, 5) & & (5, \underline{433}, 29) & & (29, \underline{169}, 2) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Bài PT.4. Tìm công thức xác định bộ Markov nằm ngoài cùng bên trái của dòng thứ n trên cây Markov.

Bài PT.5. Chứng minh rằng mỗi bộ Markov có đúng một hoán vị xuất hiện trong cây Markov.

B. Một số tính chất của các bộ Markov

Trong các bài tập sau đây, ta cho trước một bộ Markov (a, b, c).

Bài PT.6. Chứng minh rằng

a) Mọi ước nguyên tố lẻ của c đều đồng dư với 1 modulo 4.

b) Nếu c là chẵn thì c đồng dư với 2 modulo 32.

Bài PT.7. Chứng minh rằng các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài PT.8. Chứng minh rằng tồn tại một bộ Markov có thành phần lớn nhất bằng c.

Bài PT.9. a) Ta giả sử c là một số lẻ và giả sử tồn tại một bộ Markov (a', b', c) sao cho $(a', b') \neq (a, b)$ và $(a', b') \neq (b, a)$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương m, n nguyên tố cùng nhau sao cho $c = mn$ và $aa' - bb' \equiv 0 \pmod{m^2}, ab' - a'b \equiv 0 \pmod{n^2}$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p và mọi số nguyên dương k tồn tại không quá một bộ Markov có thành phần lớn nhất bằng p^k.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Chương 2

Đề đề xuất môn Đại số

1 Ma trận

Bài 1.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n và lũy linh. Chứng minh rằng với mọi ma trận B giao hoán với A, ta có: $\det(A + B) = \det(B)$. (Xem lời giải trang 107.)

Bài 1.2 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho ma trận A cỡ 3×2, B cỡ 2×3 và $AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Tính $ABAB$.

b) Chứng minh rằng ma trận BA khả nghịch.

b) Tìm ma trận BA.

(Xem lời giải trang 107.)

Bài 1.3 (Đại học Hàng hải Việt Nam). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính A^n. (Xem lời giải trang 108.)

Bài 1.4 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Cho A, B là hai ma trận đối xứng cấp n. Chứng minh rằng $\operatorname{tr}(ABAB) \leq \operatorname{tr}(A^2B^2)$. Khi nào nhận được dấu $'' = ''$? (Xem lời giải trang 108.)

Bài 1.5 (Đại học Phạm Văn Đồng)**.** Tìm ma trận vuông cấp ba có các phần tử đều khác 0 sao cho định thức của nó bằng 2020. (Xem lời giải trang 108.)

Bài 1.6 (Đại học An Giang)**.** Chứng minh rằng có

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(2^n-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)\cdots\left(2^3-1\right)\left(2^2-1\right)$$

ma trận khả nghịch cấp n mà các phần tử của nó chỉ gồm 0 hoặc 1. (Xem lời giải trang 109.)

Bài 1.7 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Tìm tất cả các ma trận thực X vuông cấp 3 thỏa mãn phương trình

$$X^{2017}+2016X=\begin{pmatrix}2017 & 0 & 0\\ 0 & -2017 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 109.)

Bài 1.8 (Đại học Sư phạm Tp Hồ Chí Minh)**.** Với mỗi $A\in M_n(\mathbb{R})$, ta định nghĩa

$$C(A)=\{X\in M_n(\mathbb{R}):\ AX=XA\}.$$

Dễ thấy $C(A)$ là một không gian véc tơ con của $M_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng nếu A là ma trận tam giác thì $dim\ C(A)\geq n$.

b) Cho 1 ví dụ $A\in M_n(\mathbb{R})$ để $dim\ C(A)=n$.

(Xem lời giải trang 110.)

Bài 1.9 (Đại học Quy Nhơn)**.** Cho A và B là hai ma trận thực cùng cỡ $m\times n$. Gọi $\mathcal{R}_A$ (t. ư., $\mathcal{C}_A$) là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^n$ (t.ư., $\mathbb{R}^m$) sinh bởi các véctơ dòng (t.ư., các véctơ cột) của A. Gọi $c=\dim(\mathcal{R}_A\cap\mathcal{R}_B), d=\dim(\mathcal{C}_A\cap\mathcal{C}_B)$. Chứng minh

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

khi và chỉ khi $c=d=0$. (Xem lời giải trang 111.)

Bài 1.10 (Đại học Tân Trào)**.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp $2n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 1\\ . & . & . & . & \cdots & .\\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

(Xem lời giải trang 111.)

Bài 1.11 (Đại học Hà Tĩnh). Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Tính A^{2017}..

(Xem lời giải trang 112.)

Bài 1.12 (Đại học Hà Tĩnh). Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n hệ số thực với các ma trận dòng lần lượt là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xây dựng ma trận B gồm các dòng lần lượt là $A_2, A_3, ..., A_n, 0$. Biết A là ma trận khả nghịch hãy tính hạng của $A^{-1}B$. (Xem lời giải trang 112.)

Bài 1.13 (Học viên Kỹ thuật Quân sự). Cho hai số nguyên dương $k,\ n$. Giả sử dãy các ma trận $\{A_1, ..., A_k\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ thỏa mãn $A_i^2 \neq 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$ và $A_iA_j = 0 \quad (1 \leqslant i, j \leqslant k; i \neq j)$. Chứng minh rằng $k \leq n$. Cho ví dụ trường hợp $k = n$. (Xem lời giải trang 112.)

Bài 1.14 (Học viên Kỹ thuật Quân sự). Tìm tất cả các ma trận thực A vuông cấp n sao cho với mọi ma trận B vuông cấp n ta đều có: $\det(A + 2017.B) = \det(A) + 2017^n.\det(B)$. (Xem lời giải trang 112.)

Bài 1.15 (Học viên Kỹ thuật Quân sự). Có tồn tại hay không ma trận vuông cấp ba thực sao cho $Trace(A) = 0$ và $A^2 + A^T = E$? Vì sao? (Xem lời giải trang 113.)

Bài 1.16 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R})$ có định thức khác không. Chứng minh rằng tồn tại hai ma trận vuông cấp hai P, Q có định thức bằng không và hai số thực α, β khác không sao cho:

$$A^n = \alpha^n.P + \beta^n.Q, \forall n \geq 0.$$

(Xem lời giải trang 113.)

Bài 1.17 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho ma trận vuông cấp hai $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R})$ và đa thức $f(x) = x^{2017} + 4x \in \mathbb{R}[x]$. Hãy tính ma trận $f(A)$. (Xem lời giải trang 113.)

Bài 1.18 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho ma trận $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, vết của A là tổng các phần tử trên đường chéo của A mà được kí hiệu là $tr(A)$. Hãy chứng minh rằng tập S gồm tất cả các ma trận $A \in Mat(2017, \mathbb{R})$ có vết bằng 0 là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$. Khi đó hãy tính số chiều của S. (Xem lời giải trang 113.)

Bài 1.19 (Học viên An ninh Nhân dân). Cho ma trận đối xứng $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và k là số nguyên dương chẵn sao cho

$$[\mathrm{trace}(A^k)]^{k+1} = [\mathrm{trace}(A^{k+1})]^k$$

Chứng minh rằng $A^n = \mathrm{trace}(A)A^{n-1}$. Nếu k là số nguyên dương lẻ thì kết luận trên còn đúng không? (Xem lời giải trang 114.)

Bài 1.20 (Học viên An ninh Nhân dân). Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ là các ma trận giao hoán. Gọi $\alpha \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của $A + B$. Chứng minh rằng tồn tại phân tích $\alpha = \lambda + \mu$ với $\lambda \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của A và $\mu \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của B. (Xem lời giải trang 115.)

Bài 1.21 (Học viên An ninh Nhân dân). Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ có $\mathrm{rank}(A) = r \geqslant 1$. Chứng minh rằng $A^2 = A$ khi và chỉ khi tồn tại các ma trận $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$ và $C \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{R})$ đều có hạng bằng r thoả mãn $A = BC$ và $CB = I_r$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng nếu $A^2 = A$ thì $\det(I_n + A) = 2^r$ và $\det(2I_n - A) = 2^{n-r}$. (Xem lời giải trang 115.)

Bài 1.22 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho các ma trận khả nghịch $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB + BA = O_n$. Chứng minh rằng các ma trận I_n, A, B, AB là độc lập tuyến tính. (Xem lời giải trang 116.)

Bài 1.23 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^{17} = B^{16} = I_n$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $I_n + A + B$ khả nghịch. (Xem lời giải trang 116.)

Bài 1.24 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho ma trận $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ($n$ là số lẻ) thoả mãn:

a) $a_{ii} = \lambda$,

b) $a_{ij} = -a_{ji},\ \forall i \neq j$.

Tìm điều kiện của λ để hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất, trong đó $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^t,\ b = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^t$. (Xem lời giải trang 117.)

Bài 1.25 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ thoả mãn

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng tồn tại ma trận $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ sao cho $BA = C^k$. (Xem lời giải trang 117.)

Bài 1.26 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho các ma trận liên quan dưới đây khả nghịch. Chứng minh rằng

$$[A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} = A(I_n - BA) = (I_n - AB)A.$$

(Xem lời giải trang 118.)

Bài 1.27 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và đặt

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} A+B & O_n \\ O_n & A-B \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} A+iB & O_n \\ O_n & A-iB \end{bmatrix}\ (i^2 = -1)$$

Chứng minh rằng các ma trận M, N đồng dạng và các ma trận P, Q đồng dạng. (Xem lời giải trang 118.)

Bài 1.28 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho 2 ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = B^2 = O_n$. Biết rằng ma trận $A + B$ khả nghịch. Chứng minh rằng n là số chẵn và $\operatorname{rank}(AB)^k = \dfrac{n}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$. (Xem lời giải trang 118.)

Bài 1.29 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Tìm tất cả các ma trận $M_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), (k = 1, 2, ..., 9)$ thỏa mãn $\det(M_k) = 1, (k = 1, 2, ..., 9)$ và $M_1^4 + M_2^4 + \cdots + M_9^4 = M_1^2 + M_2^2 + \cdots + M_9^2 + 18I_2$. (Xem lời giải trang 119.)

Bài 1.30 (ĐH Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh). Cho A là ma trận vuông cấp n với các phần tử thực và định thức bằng một $\det(|A|) = 1$, gọi $P(\lambda) = \det|A - \lambda I|$ với I là ma trận đơn vị cấp n. Chứng minh rằng ma trận nghịch đảo A^{-1} của A có tính chất $\det|A^{-1} - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n P\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ (Xem lời giải trang 120.)

Bài 1.31 (ĐH Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh). Cho ba ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm $A^3 + B^4 + C^{n-1}$. (Xem lời giải trang 120.)

Bài 1.32 (ĐH Công nghệ thực phẩm TP. Hồ Chí Minh). Tính ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A cấp n sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(Xem lời giải trang 120.)

Bài 1.33 (ĐH Công nghệ thực phẩm TP. Hồ Chí Minh). Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đặt $A^{2017} = (b_{ij})_{2017}$. Chứng minh rằng $b_{21} < 10.2^{2017} - 14C^1_{2017} - 12C^2_{2017}$.. (Xem lời giải trang 121.)

Bài 1.34 (ĐH Ngoại thương). Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Giả sử tồn tại $n+1$ số thực $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ sao cho $C_i = A + t_i.B$ lũy linh. Chứng minh A, B lũy linh. (Xem lời giải trang 122.)

Bài 1.35 (ĐH Ngoại thương). Cho A, B là hai ma trận vuông thỏa mãn $A^{2017} = \theta$ và $A + B = AB$. Chứng minh B không khả nghịch. (Xem lời giải trang 122.)

2 Định thức

Bài 2.1 (Đại học Hàng hải Việt Nam).

a) (1) Cho a, b, c là các số thực. Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

b) Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình bậc 3: $x^3 + x^2 + 3x + q = 0$, $q \in \mathbb{R}$. Gọi $\mathcal{S}$ là tập hợp các ma trận A vuông cấp 3 được lập bởi x_1, x_2, x_3 sao cho mỗi nghiệm chỉ xuất hiện đúng một lần ở mỗi hàng và mỗi cột. Chứng minh rằng $\det A$ chia hết cho $10!!$ với mọi $A \in \mathcal{S}$.

(Xem lời giải trang 123.)

Bài 2.2 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n có vết $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 2017$ và hạng $\mathrm{r}(A) = 1$. Tính $\det(A + I)$. (Xem lời giải trang 124.)

Bài 2.3 (Đại học Phạm Văn Đồng). Tính định thức

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(Xem lời giải trang 124.)

Bài 2.4 (Đại học Xây Dựng Hà Nội). Cho A là ma trận vuông cấp 2017. Hãy tìm định thức của A biết

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & ... & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 125.)

Bài 2.5 (Trường Sỹ quan Không quân). Định thức của một toán tử tuyến tính φ là định thức của một ma trận biểu diễn của nó và được kí hiệu bởi $Det(\varphi)$. Kí hiệu $M[n, K]$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường K. Cho $A \in M[n, K]$ và φ_A là toán tử tuyến tính trên $M[n, K]$ cho bởi $\varphi_A(B) = AB - BA$ với mọi ma trận $B \in M[n, K]$. Chứng minh rằng $Det(\varphi_A) = 0$. (Xem lời giải trang 125.)

Bài 2.6 (Đại học Sư phạm Tp Hồ Chí Minh). Cho $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $(A)_{ij}$ bằng tổng tất cả các ước chung dương của i và j. Tính $\det A$. (Xem lời giải trang 125.)

Bài 2.7 (Đại học Quy Nhơn). Cho định thức cấp n

$$X_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

a) Tính X_{2017}.

b) Tính tổng $\sum_{j=1}^{2017}(-1)^j X_j$.

(Xem lời giải trang 126.)

Bài 2.8 (Đại học Quy Nhơn). Giải phương trình biến x sau đây

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = 0.$$

(Xem lời giải trang 126.)

Bài 2.9 (Đại học Tân Trào). Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ y & a_2 & x & \cdots & x \\ y & y & a_3 & \cdots & x \\ . & . & . & \cdots & . \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

(Xem lời giải trang 126.)

Bài 2.10 (ĐH Ngoại thương). Cho $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ và $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Tính $\det(2017A + 1995B)$? (Xem lời giải trang 127.)

Bài 2.11 (ĐH Ngoại thương). Tính định thức

$$\begin{vmatrix} C_m^p & C_m^{p+1} & \dots & C_m^{p+n} \\ C_{m+1}^p & C_{m+1}^{p+1} & \dots & C_{m+1}^{p+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n}^p & C_{m+n}^{p+1} & \dots & C_{m+n}^{p+n} \end{vmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 127.)

3 Hệ phương trình

Bài 3.1 (Học viên Kỹ thuật Quân sự). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = m \\ -bx_1 + ax_2 + dx_3 - cx_4 = n \\ -cx_1 - dx_2 + ax_3 + bx_4 = p \\ -dx_1 + cx_2 - bx_3 + ax_4 = q \end{cases}$$

trong đó $a,\ b,\ c,\ d$ không đồng thời bằng 0. (Xem lời giải trang 128.)

Bài 3.2 (ĐH Công nghệ thực phẩm TP. Hồ Chí Minh). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

trong đó a_{ij} là các số nguyên. (Xem lời giải trang 128.)

Bài 3.3 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho N là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử đều bằng $\frac{1}{n}$ và ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^k = N$ với số nguyên dương k nào đó. Giả sử $A = [a_{ij}]_n$. Chứng minh rằng $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 1$. (Xem lời giải trang 129.)

4 Không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính

Bài 4.1 (Đại học Phạm Văn Đồng). Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ cho 6 véc tơ: $\vec{u}_1 = (2;3;5), \vec{u}_2 = (0;1;2), \vec{u}_3 = (1;0;0), \vec{\beta}_1 = (1;1;1), \vec{\beta}_2 = (1;1;-1), \vec{\beta}_3 = (2;1;2)$. Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $f(\vec{u}_i) = \vec{\beta}_i$, $\forall i = 1;2;3$. (Xem lời giải trang 129.)

Bài 4.2 (Đại học An Giang). Với $n \geq 1$, ký hiệu $\mathbb{R}_n[x]$ là không gian véc tơ của các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n-1$ trên $\mathbb{R}$. Toán tử đạo hàm D được xác định bởi $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ với $D(p(x)) = p'(x)$ với $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. Hãy tìm ma trận biểu diễn của D theo cơ sở $S = \{1, 1+x, 1+x^2, \cdots, 1+x^{n-1}\}$ và tìm đa thức cực tiểu của D. (Xem lời giải trang 130.)

Bài 4.3 (Đại học Giao thông Vận tải). Tồn tại hay không một ánh xạ tuyến tính $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sao cho

$$F^2(A) = 4A + 5A^T, \ \forall \ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

trong đó $F^2 = F \circ F$. (Xem lời giải trang 130.)

Bài 4.4 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho $M_1, M_2, \ldots M_k$ là k không gian con của không gian tuyến tính thực U $(k \geqslant 2)$. Chứng minh rằng nếu $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ cũng là một không gian con của U thì có một trong k không gian con đó chứa $(k-1)$ không gian con còn lại. (Xem lời giải trang 130.)

Bài 4.5 (Đại học Tân Trào). Cho V là một không gia véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, U là một không gian con của V. Giả sử $f : V \to V$ là một phép biến đổi tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) $\dim U - \dim \ker f \leq \dim f(U) \leq \dim U$.

b) $\dim U \leq \dim f^{-1}(U) \leq \dim U + \dim \ker f$.

(Xem lời giải trang 131.)

Bài 4.6 (Đại học Hà Tĩnh). Cho V là một không gian véctơ thực hữu hạn chiều, đặt $S = End(V)$ là vành các tự đồng cấu của V. Chứng minh rằng với $f \in S$, tồn tại đẳng cấu $g \in S$ sao cho $f = fgf$. (Xem lời giải trang 132.)

Bài 4.7 (Học viên Kỹ thuật Quân sự). Cho $V - \mathbb{R}$ là một không gian vector và $f,\ f_1,\ f_2,\ ..., f_k$ là các ánh xạ tuyến tính từ V vào $\mathbb{R}$, và nếu $f_1(x) = ... = f_k(x) = 0$ thì $f(x) = 0$. Chứng minh rằng f là tổ hợp tuyến tính của các ánh xạ $f_1, ..., f_k$. (Xem lời giải trang 132.)

Bài 4.8 (ĐH Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh). Xét không gian tuyến tính các hàm số xác định bởi

$$a_n(t), n = 0, 1, 2, \cdots a_n(t) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\exp(2tx - x^2)\right)|_{x=0}$$

a) Hãy tìm mối liên hệ giữa $a_{n+1}(t), a_n(t)$ và $a_{n-1}(t)$

b) Chứng minh rằng $a_n(t)$ luôn biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của hệ $\{1, t, t^2, \cdots\}$ và thỏa tính chất sau $a_{2k+1}(0) = 0; a_{2k}(0) = (-1)^k\dfrac{(2n)!}{n!}$

c) Chứng minh rằng đạo hàm bậc m theo biến t của $a_n(t)$ $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$ sẽ cho ta

$$\frac{d^m}{dx^m}(a_n(t)) = \frac{2^m n!}{(n-m)!}a_{n-m}(t); (\forall m < n)$$

(Xem lời giải trang 133.)

Bài 4.9 (ĐH Công nghệ thực phẩm TP. Hồ Chí Minh). Cho V là không gian vector, hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset V$ độc lập tuyến tính và mỗi α_i là tổ hợp tuyến tính của các vector của hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\} \subset V$. Chứng minh rằng $k \leq l$. (Xem lời giải trang 134.)

Bài 4.10 (ĐH Công nghệ thực phẩm TP. Hồ Chí Minh, ĐH Ngoại thương). Cho V là không gian vector, hệ $x_1, ..., x_n \in V$, $x_i \neq 0$ với mọi i. Giả sử có ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ sao cho $f(x_1) = x_1$, $f(x_k) = x_k + x_{k-1}, \forall k \geq 2$.. Chứng tỏ rằng hệ $\{x_1, ..., x_n\}$ độc lập tuyến tính trong V. (Xem lời giải trang 134.)

Bài 4.11 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ là ma trận lũy linh cấp k. Chứng minh rằng hệ các ma trận $\{I_n, I_n + A, I_n + A + A^2, ..., I_n + A + A^2 + ... + A^{k-1}\}$ là hệ ma trận độc lập tuyến tính. (Xem lời giải trang 135.)

5 Giá trị riêng và véc tơ riêng

Bài 5.1 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 7 & -3 \\ 9 & -8 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm các giá trị riêng của A.

b) Chứng minh rằng mọi ma trận B giao hoán với ma trận A đều có thể biểu diễn theo dạng $B = f(A)$, trong đó $f(x)$ là một đa thức hệ số thực bậc không quá 4.

(Xem lời giải trang 135.)

Bài 5.2 (Đại học An Giang). Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A có n giá trị riêng thực $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận $A_1, A_2, ..., A_n \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho

$$A^k = \lambda_1^k A_1 + \lambda_2^k A_2 + \cdots + \lambda_n^k A_n,$$

với $k = 1, 2, ...$ (Xem lời giải trang 136.)

Bài 5.3 (Trường Sỹ quan Không quân). Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

a) Chứng minh rằng A chéo hóa được.

b) Tìm một ma trận P khả nghịch để $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

(Xem lời giải trang 136.)

Bài 5.4 (Đại học Quy Nhơn). a) Cho A là một ma trận vuông đối xứng cấp n với hệ số thực. Gọi $B = [b_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n với các phần tử cho bởi $b_{ij} = \mathrm{Trace}(A^{i+j-2})$. Chứng minh rằng B là nửa xác định dương.

b) Chứng minh rằng đa thức $u(x) = x^2 - 3$ không thể là đa thức đặc trưng của một ma trận vuông cấp 2, đối xứng với các phần tử là các số hữu tỷ.
(Xem lời giải trang 137.)

Bài 5.5 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND)**.** Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 = A + I_3$.

a) Chứng tỏ rằng A khả nghịch, đồng thời A có một giá trị riêng thực.

b) Tính gần đúng giá trị riêng thực đó với độ chính xác 1 chữ số thập phân. 2) Chứng tỏ rằng $\det(A)$ và $\det(A - I_3)$ có cùng dấu dương.

(Xem lời giải trang 137.)

Bài 5.6 (Học viện Bưu chính Viễn thông)**.** Kí hiệu $\mathbb{R}[x]_n$ là không gian véc tơ các đa thức bậc $\leq n$.
Cho ánh xạ tuyến tính $\Phi : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ xác định như sau

$$\Phi(x^k) = \begin{cases} -x^{k+1} & \text{nếu } \ 0 \leq k \leq n-1, \\ 1 & \text{nếu } \ k = n. \end{cases}$$

a) Viết ma trận A của Φ trong cơ sở $\{1,\ x,\ ,\ldots,\ x^n\}$ của $\mathbb{R}[x]_n$.

b) Tìm Φ^{n+1}.

c) Tính $\det(A+I)$ và $\det\Big(I - A + A^2 + \cdots + (-A)^n\Big)$.

(Xem lời giải trang 138.)

6 Đa thức

Bài 6.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông)**.** Cho đa thức hệ số thực $P(x) = x^{2017} + a_{2016}x^{2016} + \cdots + a_1x + a_0$ chỉ có các nghiệm thực là $x_1,\ x_2, \ldots, x_{2017}$. Chứng minh rằng với mọi số thực a lớn hơn tất cả các nghiệm thực ấy thì ta có bất đẳng thức: $P'(a) - 2017\Big(P(a)\Big)^{\frac{2016}{2017}} \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi nào?
(Xem lời giải trang 138.)

Bài 6.2 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy)**.** Cho các đa thức $P_1(x)\,,\ P_2(x)\,, \ldots,\ P_n(x)$ có bậc $\leq n-1$. Chứng tỏ rằng định thức sau không phụ thuộc vào biến x

$$\begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \cdots & P_n(x) \\ P_1'(x) & P_2'(x) & \cdots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(x) & P_2^{(n-1)}(x) & \cdots & P_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

(Xem lời giải trang 139.)

Bài 6.3 (Đại học Phạm Văn Đồng)**.** Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x).$$

(Xem lời giải trang 139.)

Bài 6.4 (Đại học An Giang)**.** Cho $r, s \geq 1$ là các số nguyên và $a_0, a_1, ..., a_{r-1}$, $b_0, b_1, ..., b_{s-1}$ là các số thực không âm sao cho

$$\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + x^r\right)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{s-1}x^{s-1} + x^s\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{r+s-1} + x^{r+s}.$$

Chứng minh rằng mọi a_i và b_j bằng 0 hoặc bằng 1. (Xem lời giải trang 140.)

Bài 6.5 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho đa thức

$$P(x) = x^{2017} - 2017x.$$

Hãy cho biết phương trình

$$P(P(x)) = 2016$$

có bao nhiêu nghiệm phức phân biệt. (Xem lời giải trang 140.)

Bài 6.6 (Đại học Quy Nhơn)**.** Ký hiệu $P_n(x)$ là không gian các đa thức 1 biến x với bậc không vượt quá n.

a) Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $\varphi : P_n(x) \to P_n(x)$ xác định bởi $\varphi(p(x)) = p(x) + xp'(x)$ đối với cơ sở chính tắc $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

b) Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của φ.

(Xem lời giải trang 140.)

Bài 6.7 (Đại học Tân Trào)**.** Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực và chỉ có các nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng: với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $(n-1)(P'(x))^2 \leq nP(x)P''(x)$ và lấy ví dụ minh họa cho trường hợp xảy ra đẳng thức. (Xem lời giải trang 141.)

Bài 6.8 (Đại học Hà Tĩnh)**.** Cho đa thức $P(x) = x^n + x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1^n}{P'(x_1)} + \frac{x_2^n}{P'(x_2)} + ... + \frac{x_n^n}{P'(x_n)} = -1,$$

trong đó $P'(x)$ là ký hiệu đạo hàm của $P(x)$. (Xem lời giải trang 141.)

Bài 6.9 (Học viên Kỹ thuật Quân sự). Cho $P_1(x) = x^2 - 2$, và các đa thức $P_i(x)$ xác định bởi $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Chứng minh phương trình $P_{2017}(x) = x$ có 2^{2017} nghiệm thực phân biệt. (Xem lời giải trang 142.)

Bài 6.10 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Xác định tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn:

$$f(x+4) = f(x+3) + 2x + 7.$$

(Xem lời giải trang 142.)

Bài 6.11 (ĐH Công nghệ thực phẩm TP. Hồ Chí Minh). Giả sử m, n là hai trong bốn nghiệm của đa thức $x^4 - x^3 + 1$. Chứng minh rằng mn là nghiệm của đa thức $x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$. (Xem lời giải trang 142.)

Bài 6.12 (ĐH Ngoại thương). Viết sẵn hai đa thức $x^{2018} + *x^{2017} + *x^{2016} + \cdots + *x^2 + *x + 1$. Hai bạn Ngoại và Thương chơi trò chơi như sau: Trước tiên, Ngoại thay bất kì dấu nào bằng một số, sau đó, Thương thay bất kì dấu còn lại nào bằng một số, rồi Ngoại lại tiếp tục thay một dấu bằng một số, v.v... (tất cả lần thay như vậy). Nếu đa thức thu được không có nghiệm thực thì Ngoại thắng, nếu có ít nhất một nghiệm thực thì Thương thắng. Với mọi cách chơi của Ngoại, hỏi Thương có thể thắng trong trò chơi này được không? (Xem lời giải trang 143.)

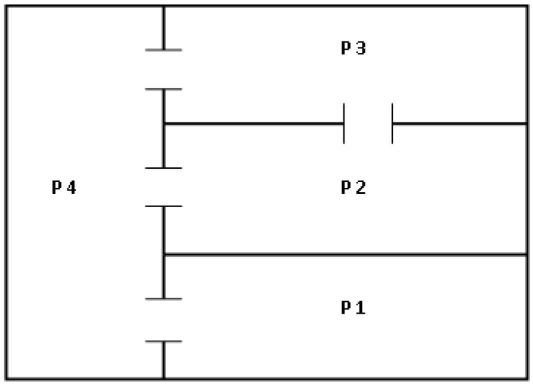
7 Tổ hợp

Bài 7.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho 6 điểm trong không gian trong đó không có ba điểm nào là thẳng hàng. Vẽ 15 đoạn thẳng nối giữa chúng và tô màu xanh hoặc màu đỏ cho những đoạn thẳng này. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác tạo bởi các đoạn thẳng ấy có tất cả các cạnh đều cùng màu. (Xem lời giải trang 144.)

Bài 7.2 (Đại học Hàng hải Việt Nam). Nhốt 100 con côn trùng vào 4 phòng có đường thông nhau như hình vẽ dưới đây. Giả sử trong một phút không con côn trùng nào có thể ghé thăm hơn hai phòng từ phòng nó đang ở và có 40% côn trùng ở mỗi phòng không di chuyển sang phòng khác. Ngoài ra, số côn trùng di chuyển từ mỗi phòng sang các phòng lân cận theo tỉ lệ đều nhau, chẳng hạn từ phòng 3 thì có một nửa sang P2 và một nửa sang P4.

a) Biết rằng sau một phút, số côn trùng ở P1, P2, P3 và P4 lần lượt là 12, 25, 26 và 37. Xác định số côn trùng ở mỗi phòng lúc ban đầu.

b) Biết số côn trùng ở P1, P2, P3 và P4 lúc ban đầu tương ứng là 20, 20, 20 và 40. Xác định số côn trùng ở mỗi phòng sau một phút.



(Xem lời giải trang 144.)

Bài 7.3 (Đại học Hàng hải Việt Nam). Trong một thị trấn gồm n người, có m câu lạc bộ được thành lập. Biết rằng, mỗi câu lạc bộ đều có số lẻ thành viên; hai câu lạc bộ bất kì có chung nhau số chẵn k thành viên. Chứng minh rằng $m \leq n$. (Xem lời giải trang 144.)

Bài 7.4 (Đại học Phạm Văn Đồng). Xung quanh một bờ hồ hình tròn có 17 cây cau cảnh. Người ta dự định chặt bớt 4 cây sao cho không có 2 cây nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau. (Xem lời giải trang 144.)

Bài 7.5 (Đại học Xây Dựng Hà Nội). (Cóc nhảy) Có một cái thang vô hạn bậc bắc lên trời. Mỗi bậc thang chỉ có thể đặt được tối đa 1 chú cóc. Người ta đặt các bậc thang một số chú cóc. Một chú cóc bất kì từ bậc thứ N có thể nhảy đến bậc $2N + 1$ hoặc $4N + 1$ và có thể nhảy ngược lại theo quy tắc trên. *Ví dụ: Nếu đặt cóc ở bậc thứ 9 thì cóc có thể nhảy lên bậc 19 hoặc 37, có thể nhảy lùi về bậc thứ 4 hoặc 2.*
a) Hỏi có thể đặt tối đa bao nhiêu chú cóc khi các chú cóc nhảy tùy ý theo quy tắc trên mà không có chú cóc nào có thể gặp được nhau?
b) Nếu thay quy tắc thành từ bậc N có thể nhảy đến bậc 3N + 1 hoặc bậc 9N + 1. Thì đặt được tối đa bao nhiêu chú cóc? (Xem lời giải trang 145.)

Bài 7.6 (Đại học Giao thông Vận tải). Một quần đảo có 9 hòn đảo. Từ mỗi đảo trong số đó ta luôn di chuyển được tới 4 đảo khác trong 8 đảo còn lại bằng đường hàng không (với các tuyến bay 2 chiều, trực tiếp hoặc gián tiếp). Chứng minh rằng với 2 đảo bất kỳ của quần đảo ta luôn di chuyển được bằng đường hàng không từ một đảo đến đảo còn lại. (Xem lời giải trang 145.)

Bài 7.7 (Đại học Sư phạm Tp Hồ Chí Minh). Một cuộc thi game có n game thủ phải chơi n game. Mỗi game cả n người cùng chơi, mỗi người chỉ thắng hoặc thua. Ta thành lập ma trận A và B vuông cấp n như sau: ban đầu gán

$A = B = 0$; sau mỗi game nếu game thủ thứ i và j cùng thắng hoặc cùng thua thì tăng $(A)_{ij}$ lên 1 đơn vị (B giữ nguyên), còn nếu game thủ i thắng, j thua thì tăng $(B)_{ij}$ lên 1 đơn vị và giảm $(B)_{ji}$ đi 1 đơn vị. Chứng minh rằng sau khi cuộc thi kết thúc $\det(A + iB)$ (i là đơn vị ảo) là số nguyên không âm và chia hết cho 2^{n-1}. (Xem lời giải trang 145.)

Bài 7.8 (Đại học Quy Nhơn)**.** Có 200 học sinh tham dự một kỳ thi Olympic Toán học. Đề thi gồm 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán có ít nhất 120 học sinh giải đúng. Chứng minh rằng có ít nhất 2 học sinh sao cho mỗi bài toán đều được ít nhất một trong hai học sinh này giải đúng. (Xem lời giải trang 146.)

Bài 7.9 (Đại học Quy Nhơn)**.** Trong một cuộc điều tra sự dịch chuyển dân số giữa n thành phố $C_1, \ldots, C_n$, người ta nhận thấy như sau: vào đầu giờ sáng mỗi ngày, có một tỉ lệ (không đổi) $a_{ij} \in (0; 1)$ của số dân từ thành phố C_i sang thành phố C_j $(i \neq j)$ để làm việc. Thời gian làm việc trong ngày ở tất cả các thành phố là 8 giờ sáng. Ta ký hiệu $p_j^{(m)}$ là số dân của thành phố C_j sau 8 giờ sáng của ngày m.

a) Viết biểu thức truy hồi giữa số dân của n thành phố trên trong ngày thứ $m + 1$ qua ngày m.

b) Giả sử ta quan tâm đến mức độ dịch chuyển dân số giữa hai thành phố. Biết rằng tỉ lệ dân số thành phố 1 chuyển sang thành phố 2 là α, và ngược lại là β, $0 < \alpha, \beta < 1$. Cho biết số dân giữa hai thành phố tại ngày hôm nay lần lượt là $p_1^{(0)}$ và $p_2^{(0)}$. Biểu diễn số dân của hai thành phố này 5 ngày sau $p_1^{(5)}, p_2^{(5)}$ qua α, β và $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}$.

(Xem lời giải trang 147.)

Bài 7.10 (Đại học Tân Trào)**.** Có $2n$ sinh viên trong một trường đại học $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Mỗi một tuần sẽ có n sinh viên đi một chuyến du lịch. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu chuyến du lịch thì hai sinh viên bất kỳ có cùng ít nhất một chuyến du lịch? (Xem lời giải trang 147.)

Bài 7.11 (Đại học Hà Tĩnh)**.** Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương $n \in \{1, 2, ..., 1024\}$ sao cho trong tập hợp

$$\Omega = \{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \mid k = 0, 1, ..., n\}$$

có đúng 8 số tự nhiên lẻ, ở đây $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ là ký hiệu số tổ hợp chập k của n phần tử. (Xem lời giải trang 148.)

Bài 7.12 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Chứng minh rằng mọi hệ bất kì gồm 2018 đa thức trên trường số thực có bậc không quá 2016 luôn tồn tại ít nhất một đa thức mà nó có thể biểu diễn như là tổng của các đa thức còn lại cùng với các hệ số thực. (Xem lời giải trang 149.)

Bài 7.13 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho 4 chữ cái A, D, H, N. Người ta xếp tùy ý chúng thành các từ có 8 chữ cái (có lặp lại) và sắp xếp chúng theo kiểu từ điển. Như vậy từ đầu tiên là AAAAAAAA và từ cuối cùng là NNNNNNNN.
Hỏi từ đứng ở vị trí thứ tự 2017 là từ nào?
Hỏi từ DHANDHAN đứng ở vị trí thứ tự bao nhiêu? (Xem lời giải trang 149.)

Bài 7.14 (ĐH Ngoại thương). Có 2018 người xếp thành hai hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một số người (ít nhất 1) từ 2018 người này, sao cho không có hai người nào đứng kề nhau được chọn (hai người đứng kề nhau là hai người có số thứ tự liên tiếp trong một hàng dọc hoặc có cùng số thứ tự ở hai hàng). (Xem lời giải trang 149.)

Bài 7.15 (ĐH Ngoại thương). Bạn A có 2017 quả táo, khối lượng mỗi quả là các số thực dương. Biết rằng nếu bỏ đi 1 quả táo bất kỳ thì 2016 quả táo còn lại chia được thành 2 phần có tổng khối lượng bằng nhau (số quả táo ở 2 nhóm không cần bằng nhau). CMR: 2017 quả táo có khối lượng bằng nhau. (Xem lời giải trang 151.)

Chương 3

Đề đề xuất môn Giải tích

1 Dãy số

Bài 1.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho $a_1 > 0$ và dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$a_{n+1} = \frac{6a_n + 4}{a_n + 3}.$$

a) Chứng minh rằng: Dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

b) Tìm giới hạn của dãy số $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(Xem lời giải trang 153.)

Bài 1.2 (CĐSP Nam Định). Cho dãy số $u_{n+1} = u_n + u_n^5$, $u_1 = a$.

a) Chứng minh rằng: dãy $\{u_n\}$ tăng ngặt $\Leftrightarrow a > 0$.

b) Chứng minh rằng: dãy $\{u_n\}$ giảm ngặt $\Leftrightarrow a < 0$.

c) Nếu $a \neq 0$ tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{u_{n+1} - u_n^3}{u_n}} - u_n^2 + 2 \right)$.

(Xem lời giải trang 153.)

Bài 1.3 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Cho dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

a) Chứng minh rằng dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = I \in \left[e^{\frac{5}{6}}, e\right]$.

(Xem lời giải trang 154.)

Bài 1.4 (Đại học Quảng Nam)**.** Cho dãy số $\{u_n\}, n \geq 1$ xác định bởi

$$u_0 = 2, u_{n-1} - u_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

Xác định u_{2017} và tính giới hạn của dãy số trên. (Xem lời giải trang 155.)

Bài 1.5 (Đại học An Giang)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 = -4, \quad a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \ \forall n \geq 1.$$

Tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}$. (Xem lời giải trang 155.)

Bài 1.6 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = \dfrac{-1}{3 + u_{n-1}}, \text{ với } n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. (Xem lời giải trang 155.)

Bài 1.7 (ĐH Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh)**.** Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 156.)

Bài 1.8 (ĐH Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh)**.** Cho số thực $a > 0$ và dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = u_n^{u_n}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm các giá trị của a để dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó. (Xem lời giải trang 156.)

Bài 1.9 (Trường Sỹ quan Không quân). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức sau:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó. (Xem lời giải trang 157.)

Bài 1.10 (Đại học Thủy Lợi). Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{2017a_n}{n} + \left(1 + \dfrac{2017}{n-1}\right) a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, ... \end{cases}$$

Hãy tìm giới hạn

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(Xem lời giải trang 157.)

Bài 1.11 (Đại học Quy Nhơn). Cho $(a_n)_{n\geq 1}$ là một dãy các số thực với tính chất rằng với mọi $n \geq 2$, tồn tại một số nguyên k, $n/2 \leq k < n$, sao cho $a_n = \frac{a_k}{2}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(Xem lời giải trang 157.)

Bài 1.12 (Đại học Hà Tĩnh). Cho dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{43a_n - 425}{a_n + 1}, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

a) Tìm a để $\{a_n\}$ là dãy hằng.

b) Tìm a để $\{a_n\}$ là dãy hội tụ, tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ trong trường hợp này.

(Xem lời giải trang 158.)

Bài 1.13 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho dãy số thực $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ được xác định bởi

$$u_0 \in [0; 2) \quad \text{và} \quad u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}, \forall n = 1, 2, 3...$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\sqrt{n})$. (Xem lời giải trang 159.)

Bài 1.14 (Học viên An ninh Nhân dân). Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{n}{a_n}\Big),\ (n \geqslant 1)$. Xác định $[a_{2017}]$, với ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của x (là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$? (Xem lời giải trang 159.)

Bài 1.15 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n), (n \geqslant 1)$. Chứng tỏ rằng dãy đã cho hội tụ. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, với $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. (Xem lời giải trang 160.)

Bài 1.16 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_n - (2 + x_n)x_{n+1} = 0,\ (n \geqslant 1).$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$hội tụ, nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + x_n)$ không hội tụ và tổng của chuỗi này bằng $+\infty$. (Xem lời giải trang 160.)

Bài 1.17 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ xác định bởi $a_0 = 0, a_1 = 2,\ a_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}},\ (n \geqslant 1)$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n$? (Xem lời giải trang 161.)

Bài 1.18 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ với $n \geqslant 1$. Chứng minh rằng

a) $n \leqslant a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{n}) = 0$.

(Xem lời giải trang 161.)

Bài 1.19 (ĐH Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh). Cho dãy số

$$a_n\left(1 - \cos\left(\frac{2}{n^2}\right)\right);\ n = 1, 2, \cdots$$

a) Hãy tìm giới hạn của dãy tổng:

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

b) Hãy tìm giới hạn của dãy tích:

$$\beta_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

(Xem lời giải trang 161.)

Bài 1.20 (ĐH Ngoại thương)**.** Cho dãy số (u_n), $(n = 0, 1, 2 \cdots)$ được xác định như sau: $u_0 = 2017, u_{n+1} = \sin^2(x + 11) - 2000$ với mọi số tự nhiên n. Chứng minh rằng:

a) Phương trình $\sin^2(u_n + 11) - x = 2000$ có nghiệm duy nhất. Kí hiệu nghiệm đó là b

b) $\lim u_n = b$.

(Xem lời giải trang 162.)

Bài 1.21 (ĐH Ngoại thương)**.** Cho dãy số (x_n) với $n = 1, 2, \cdots$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 2017, x_2 = 1 \\ x_{n+2} = x_n - lnx_n \, (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_{2k-1}} \quad (n \geq 2)$. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S_n}{n}\right)$? (Xem lời giải trang 163.)

Bài 1.22 (ĐH Ngoại thương)**.** 1 Gọi $\{a_n\}$ là dãy cho bởi: $a_1 = 2017, a_{n+1} = a_n^2 - 2$ với $n \in \mathbb{N}$. Tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots . a_n}$

2 Tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

(Xem lời giải trang 164.)

2 Chuỗi số

Bài 2.1 (Đại học An Giang)**.** Giả sử rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ là chuỗi số dương phân kỳ. Với $b > 0$, tìm tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + 2017)(a_3 + 2017) \cdots (a_{n+1} + 2017)}.$$

(Xem lời giải trang 164.)

Bài 2.2 (Đại học Thủy Lợi)**.** Hãy tìm giá trị của chuỗi số sau

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$

(Xem lời giải trang 165.)

Bài 2.3 (Đại học Quy Nhơn)**.** Cho $a_n \downarrow 0$. Chứng minh rằng

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ khi và chỉ khi $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$.

b) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{p-1}}{n^{1/p}} < \infty$$

với $p > 1$, thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$.

(Xem lời giải trang 166.)

Bài 2.4 (ĐH Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh)**.** Từ công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội x, $(|x| < 1)$, và công thức khai triển Taylor của hàm $\ln(1+x)$ tại $x = 0$ hãy:

a) Tìm bán kính hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)(-1)^{n-1}x^n$$

b) Tìm hàm f mà chuỗi nói trong câu a) hội tụ đến trong miền hội tụ của nó.

(Xem lời giải trang 166.)

3 Hàm số

Bài 3.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông)**.** Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ thỏa mãn các điều kiện:

a) Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $[a, b]$;

b) $|f'(x)| \leq f(x)$ với mọi $x \in b]$.

Chứng minh rằng: $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$. (Xem lời giải trang 168.)

Bài 3.2 (Đại học An Giang). Giả sử rằng $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Chứng minh rằng f là hàm lồi trên $[a, b]$. (Xem lời giải trang 168.)

Bài 3.3 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Xét dãy

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ và đạo hàm $f'(l)$. Chứng minh rằng $|f'(l)| \leq 1$. (Xem lời giải trang 169.)

Bài 3.4 (ĐH Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn f đồng biến và f không liên tục tại bất kì điểm nào. (Xem lời giải trang 169.)

Bài 3.5 (ĐH Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. (Xem lời giải trang 170.)

Bài 3.6 (Trường Sỹ quan Không quân). Cho hàm số

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong $[1/2; 1]$ và $f'(x)$ đồng biến.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = f(u_n)$ thỏa mãn $u_n \in [1/2, 1]$ với mọi n.

(Xem lời giải trang 170.)

Bài 3.7 (Trường Sỹ quan Không quân). Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục cấp 2 trên $\Re$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ và $f(1) = 1$. Chứng minh rằng, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f(c)f'(c) + f''(c) = 0.$$

(Xem lời giải trang 170.)

Bài 3.8 (Trường Sỹ quan Không quân). Cho $a, b \in \Re$, $b \geq 0$, f là hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$, $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$ và $f(x) \leq a + b\int_0^x f(t)dt$ với mọi $x \geq 0$. Chứng minh rằng $f(x) \leq a.e^{bx}$ với mọi $x \geq 0$. (Xem lời giải trang 171.)

Bài 3.9 (Đại học Thủy Lợi). Cho f là hàm dương, khả vi liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 1$. Hãy tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]^x.$$

(Xem lời giải trang 171.)

Bài 3.10 (Đại học Quy Nhơn). Cho hàm số f liên tục trên $[0, 1]$ và khả vi trên $(0, 1)$ thỏa mãn $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f'(c) = f(c)\frac{c-1}{c}.$$

(Xem lời giải trang 172.)

Bài 3.11 (Đại học Hà Tĩnh). Cho $\alpha \in \mathbb{N}^*$, hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x^\alpha & \text{nếu} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tùy theo α xét tính liên tục, khả vi của hàm f. (Xem lời giải trang 172.)

Bài 3.12 (Đại học Hà Tĩnh). Cho $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức bậc n $(n \in \mathbb{N}^*)$ trên trường số thực và $f(x) = e^x + p(x)$. Tìm số nghiệm tối đa của phương trình $f(x) = 0$. (Xem lời giải trang 172.)

Bài 3.13 (ĐH Ngoại thương). Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right); x \neq 0, \\ 2; x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

a) $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên toàn bộ $\mathbb{R}$ và đạt cực đại tại $x = 0$.

b) Không tồn tại số thực $\varepsilon > 0$ sao cho $f'(x) > 0$ $\forall x \in (-\varepsilon; 0)$ và $f'(x) < 0$ $\forall x \in (0; \varepsilon)$.

(Xem lời giải trang 173.)

4 Phép tính vi phân

Bài 4.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho hàm $f(x)$ khả vi cấp hai trên $[0,\infty)$ thỏa mãn với mọi $x \in [0,\infty)$

$$\begin{cases} f(x) > 0; \\ f'(x) > 0; \\ f(x).f"(x) \leq 2f'^2(x). \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 0$. (Xem lời giải trang 174.)

Bài 4.2 (CĐSP Nam Định). Cho $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{x}}, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } a \neq 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng: hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty) \Leftrightarrow a < 0$.

b) Chứng minh rằng: hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0;+\infty) \Leftrightarrow a < 0$.

c) Chứng minh rằng: hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn trên $[0;+\infty) \Leftrightarrow a < 0$.

(Xem lời giải trang 174.)

Bài 4.3 (CĐSP Nam Định). Cho $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

a) $f(0) \leq 0$.

b) $2f(x) + xf'(x) \geq 673.x^{2017}$ với mọi $x \in [0;+\infty)$

Chứng minh rằng $f(x) \geq \dfrac{x^{2017}}{3}$ với mọi $x \in [0;+\infty)$. (Xem lời giải trang 176.)

Bài 4.4 (CĐSP Nam Định). Cho $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ khả vi trên $[0;1]$ sao cho $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ sao cho

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{672}{f'(x_2)} + \frac{1344}{f'(x_3)} = 2017.$$

(Xem lời giải trang 176.)

Bài 4.5 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Cho hàm $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0,1]$ thỏa mãn

$$f'(0).f'(1) < 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 0$. (Xem lời giải trang 176.)

Bài 4.6 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $f(a) = f(b) = 0$ và đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên (a, b). Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f''(c) = -\frac{8}{(a-b)^2}.f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(Xem lời giải trang 177.)

Bài 4.7 (Đại học Quảng Nam). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khác không và khả vi cấp 2 thỏa mãn

$$f(0) = 2, f'(0) = -2, f(1) = 1.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x).f'(x) + f''(x) = 0$ luôn có nghiệm. (Xem lời giải trang 177.)

Bài 4.8 (Đại học Quảng Nam). Cho a là số thực và $a > 1$. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\big(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}\big).$$

(Xem lời giải trang 178.)

Bài 4.9 (Đại học Thủy Lợi). Cho $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b < c$ và hàm $f \in C^1[a; c]$. Chứng minh rằng tồn tại $t_1 \in (a; b),\ t_2 \in (a; c),\ t_1 < t_2$ sao cho

$$\begin{cases} f(b) - f(a) = (b-a)f'(t_1) \\ f(c) - f(a) = (c-a)f'(t_2). \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 178.)

Bài 4.10 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho $f(x)$ là đa thức bậc ba với các hệ số nguyên và hệ số cao nhất bằng 1. Biết $f(0) + f(1) + f(-1)$ không chia hết cho 3. Tìm $\lim \left\{\sqrt[3]{f(n)}\right\}$, khi số tự nhiên n dần tới vô hạn. Trong đó kí hiệu $\{x\}$ chỉ phần thập phân dương của số thực $x\,(0 < \{x\} < 1)$. (Xem lời giải trang 178.)

Bài 4.11 (Học viên An ninh Nhân dân). Cho các hàm f, g khả vi trên $[a, b]$. Giả sử $g(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{1}{g(b)-g(a)} \det \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{bmatrix} = \frac{1}{g'(\xi)} \det \begin{bmatrix} f(\xi) & g(\xi) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{bmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 179.)

Bài 4.12 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho các số $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$. Xét hàm f khả vi trên $[0,1]$, thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(x) > 0, \forall x \in (0,1]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$\alpha \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

(Xem lời giải trang 180.)

Bài 4.13 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Giả sử hàm f khả vi đến cấp 3 trên $[0,1]$. Biết rằng $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'''(c) \geqslant 24$. (Xem lời giải trang 180.)

Bài 4.14 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho hàm $f \in C^2[a,b]$ (khả vi liên tục tới cấp 2 trên $[a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(\frac{a+b}{2}) = \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

(Xem lời giải trang 180.)

Bài 4.15 (ĐH Ngoại thương). Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ đồng biến trong $[a;b]$ với: $f(a) = \frac{a-b}{2}; f(b) = \frac{b-a}{2}$. Chứng minh tồn tại α, β, γ phân biệt sao cho $f'(\alpha).f'(\beta).f'(\gamma) = 1$. (Xem lời giải trang 181.)

5 Phép tính tích phân

Bài 5.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn

$$\int_0^x f^2(t)dt \leq \frac{x^{2017}}{2017} \quad \forall x \in [0,1].$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^{1007} f(x)dx \leq \frac{1}{2016}.$$

(Xem lời giải trang 181.)

Bài 5.2 (CĐSP Nam Định). Cho $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t dt}{t-1}$ với mọi $x > 1$. Tìm tập giá trị của hàm $f(x)$ trên $(1; +\infty)$. (Xem lời giải trang 182.)

Bài 5.3 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy)**.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và

$$\int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0,1)$ sao cho

$$cf(c^2) = \frac{2017}{2}\int\limits_0^{c^2} f(x)dx.$$

(Xem lời giải trang 182.)

Bài 5.4 (Đại học Quảng Nam)**.** Cho hàm số $f(x) = 2x(1-x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Xác định $f_n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ lần}}$. Tìm

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

(Xem lời giải trang 183.)

Bài 5.5 (Đại học Quảng Nam)**.** Cho $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ là hàm khả vi liên tục. Chứng minh rằng

$$|\int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx| \le \max_{0\le x\le 1}|f'(x)|\big(\int_0^1 f(x)dx\big)^2.$$

(Xem lời giải trang 183.)

Bài 5.6 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1}dx = \frac{1}{2}.$$

(Xem lời giải trang 184.)

Bài 5.7 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Giả sử f' là hàm liên tục và không âm trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2} \le \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx < 2.$$

(Xem lời giải trang 184.)

Bài 5.8 (Trường Sỹ quan Không quân). Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2017^x + 1)(1 + x^2)}.$$

(Xem lời giải trang 185.)

Bài 5.9 (Đại học Thủy Lợi). Cho $f(x)$ là hàm dương, liên tục, đơn điệu tăng trên $[a; b]$, gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Hãy chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a).$$

(Xem lời giải trang 185.)

Bài 5.10 (Đại học Quy Nhơn). Cho hàm số f liên tục trên $[0, \infty)$ thỏa mãn

$$f(x) \geq \int_0^x [f(t)]^2 dt, \quad \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0, \infty)$. (Xem lời giải trang 185.)

Bài 5.11 (Đại học Quy Nhơn). Cho hàm $f : [1, 2017] \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi cấp hai thỏa mãn $g(x) = xf'(x)$ là hàm đơn điệu tăng. Chứng minh rằng

$$f\left(\sqrt{2017}\right) \leq \frac{1}{\ln 2017} \int_1^{2017} \frac{f(t)}{t} dt.$$

(Xem lời giải trang 186.)

Bài 5.12 (Đại học Hà Tĩnh). Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ và

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx = 0$$

Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất hai không điểm phân biệt trên khoảng $(0, 1)$. (Xem lời giải trang 186.)

Bài 5.13 (Đại học Hà Tĩnh). Tính

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx.$$

(Xem lời giải trang 187.)

Bài 5.14 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho hàm số $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ liên tục sao cho $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=0$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\ dx \geq 12\left(\int\limits_0^1 xf(x)\ dx\right)^2.$$

(Xem lời giải trang 187.)

Bài 5.15 (Học viên An ninh Nhân dân)**.** Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$|f(\frac{1}{2})|\leqslant\int_0^1\Big(|f(t)|+\frac{1}{2}|f'(t)|\Big)dt,$$
$$|f(x)|\leqslant\int_0^1\Big(|f(t)|+|f'(t)|\Big)dt,\forall x\in[0,1].$$

(Xem lời giải trang 188.)

Bài 5.16 (Học viên An ninh Nhân dân)**.** Cho hàm $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng

$$\int_{-1}^1[f(x)]^2dx\geqslant\frac{5}{2}\Big(\int_{-1}^1 x^2f(x)dx\Big)^2+\frac{3}{2}\Big(\int_{-1}^1 xf(x)dx\Big)^2.$$

(Xem lời giải trang 189.)

Bài 5.17 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2)**.** Cho hàm $f\in C^2[-1,1]$ (tức là f khả vi liên tục đến cấp 2 trên $[-1,1]$) và thỏa mãn $f(0)=0$. Chứng minh rằng

$$\int_{-1}^1[f''(x)]^2dx\geqslant 10\Big[\int_{-1}^1 f(x)dx\Big]^2.$$

(Xem lời giải trang 190.)

Bài 5.18 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2)**.** Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi đến cấp 2 và thỏa mãn $f'(a)=f'(b)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

(Xem lời giải trang 190.)

Bài 5.19 (Học viên An ninh Nhân dân, Cơ sở 2). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Đặt $m = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x), M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx - \Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2 \leqslant \frac{(M-m)^2}{4}.$$

(Xem lời giải trang 191.)

Bài 5.20 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho hàm $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ khả vi với $f(0)=f(1)=0$ và $|f'(x)|\leqslant 1, \forall x\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\Big|\int_0^1 f(x)dx\Big| \leqslant \frac{1}{4}.$$

(Xem lời giải trang 191.)

Bài 5.21 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Tìm tất cả các hàm $f:[1,8]\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$\int_1^2 [f(t^3)]^2 dt + 2\int_1^2 f(t^3)dt = \frac{2}{3}\int_1^8 f(t)dt - \int_1^2 (t^2-1)^2 dt.$$

(Xem lời giải trang 192.)

Bài 5.22 (ĐH Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh). Cho tích phân

$$I(x) = \int_0^x e^{-at}\left[t+\cos(bt)\right]dt, \text{ với } x>0; a>0.$$

a) Tìm giới hạn; $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$.

b) Hãy tính đạo hàm cấp n (n nguyên, dương) của $I(x)$.

(Xem lời giải trang 192.)

Bài 5.23 (ĐH Ngoại thương). Chứng minh $\int_0^\pi f(x)^2\,dx \le \int_0^\pi f^{'}(x)^2\,dx$ với f là hàm số khả vi trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(0)=f(\pi)=0$. (Xem lời giải trang 193.)

6 Phương trình hàm

Bài 6.1 (Học viện Bưu chính Viễn thông). Cho hàm $f(x)$ khả vi cấp 2 trên $\mathcal{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)-f(x) = yf'(x+\frac{y}{2}) \;\; \forall x,y\in\mathcal{R}.$$

Tìm hàm $f(x)$. (Xem lời giải trang 194.)

Bài 6.2 (Đại học Phòng cháy và Chữa cháy). Tìm hàm số $f(x)$ khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình

$$(x+y)f''(x+y) = f(x) + f(y).$$

(Xem lời giải trang 194.)

Bài 6.3 (Đại học An Giang). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$xf(x) - yf(y) = (x-y)\, f\,(x+y)\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 195.)

Bài 6.4 (Đại học Giao thông Vận tải). Tìm tất cả các hàm khả vi tại $x = 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(2x) = 2f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. (Xem lời giải trang 195.)

Bài 6.5 (ĐH Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = x^{x-1} f(x^x)$ với mọi $x > 0$. (Xem lời giải trang 195.)

Bài 6.6 (ĐH Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Xét phương trình $a^x = x^a$.

a) Chứng minh rằng phương trình có tối đa hai nghiệm dương và tìm các giá trị của a để phương trình có đúng một nghiệm dương.

b) Kí hiệu $s(a)$ là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình trên. Tính $\lim\limits_{a \to +\infty} s(a)$.

(Xem lời giải trang 196.)

Bài 6.7 (Đại học Thủy Lợi). Với $a > 1$, hãy xác định hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a^k [f(x+ky) - f(x-ky)] \right| \leqslant \frac{1}{2}, \ n \in \mathbb{N}^*; \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 197.)

Bài 6.8 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x + y^2\right) \geq (y+1)\, f\,(x)\,, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 197.)

Bài 6.9 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Giả sử hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện với $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f\left(x + \frac{2017}{2}\right)$$

là số hữu tỉ khi và chỉ khi

$$f(x+11) + f(x+4) + f(x+2017)$$

là số vô tỉ. Chứng minh rằng, tồn tại số thực x_0 sao cho

$$x_0^{11} - 4x_0 + 2017 - f(x_0) = 0.$$

(Xem lời giải trang 198.)

Bài 6.10 (ĐH Ngoại thương). Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

a) Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì: $2f(x) - g(x) = f(y) - y$;

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có$f(x)\, g(x) \geq x + 1$.

(Xem lời giải trang 199.)

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chương 4

Đáp án đề thi chính thức

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.1. (a) Ta tính được $x_3 = 15$, $x_4 = 31$ và $x_5 = 63$.
(b) Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên ta thu được

$$x_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ nhất bằng x_{n-1} còn định thức thứ hai bằng x_{n-2}. Vậy

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

(c) Từ quan hệ $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ ta suy ra $x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Như vậy,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= 2(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= 4(x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= 2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ &= 2^{n-2}(7-3) = 2^n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n - 3 = x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) = 2^n + \cdots + 2^2$$

và do đó $x_n = 2^n + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, hay

$$x_n + 1 = 2^{n+1},$$

với mọi n.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.2. Gọi số lượt xe đã qua các đoạn đường AB, BC, CD, DE, EB, EF và AF lần lượt là x, y, z, t, u, w, v
Phân tích tại từng giao lộ, ta có các phương trình sau

$$\begin{cases} x + v = 800 & (\text{ giao lộ } A) \\ x + u = y + 400 & (\text{ giao lộ } B) \\ z + 600 = y & (\text{ giao lộ } C) \\ t + 400 = z + 1600 & (\text{ giao lộ } D) \\ u + w = t - 400 & (\text{ giao lộ } E) \\ v + w = 600 & (\text{ giao lộ } F) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này cho ta

$$\begin{cases} x = w + 200 \\ v = -w + 600 \\ u = z - w + 800 \\ t = z + 1200 \\ y = z + 600 \end{cases}$$

Kết hợp với các quan sát $x = 2w$ và $t = 1,5y$ ta được

$$\begin{cases} x = 400 \\ y = 1200 \\ z = 600 \\ t = 1800 \\ u = 1200 \\ v = 400 \\ w = 200 \end{cases}$$

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.3. a) Có $\binom{11}{2} = 55$ cách chọn ra 2 cây trong số 11 cây. Dễ thấy có 10 cách chặt 2 cây liên tiếp trong số 11 cây đó. Như vậy, có tất cả $55 - 10 = 45$ cách chặt cây thoả mãn yêu cầu.

b) Có $\binom{30}{4}$ cách chặt 4 cây bất kì từ 30 cây. Rõ ràng có đúng 30 cách chặt đi 4 cây sao cho cả 4 cây là cạnh nhau. Ta đếm số các cách chặt đi 4 cây sao cho trong số 4 cây bị chặt có đúng 3 cây kề nhau. Có cả thảy 30 cách chặt đi 3 cây liên tiếp. Với mỗi cách chặt đi 3 cây như vậy có đúng 25 cách chặt đi cây thứ 4 sao cho cây này không kề với 3 cây đã bị chặt. Như vậy, có tổng cộng 30×25 cách chặt đi 4 cây trong đó có đúng 3 cây kề nhau. Suy ra số các cách chặt đi 4 cây cần tìm là $\binom{30}{4} - 30 - 30 \times 25 = 27405 - 30 - 750 = 26625$.

c) Đánh dấu 2 cây liên tiếp bất kì. Có 2 khả năng:

- Một trong hai cây được đánh dấu bị chặt. Trong trường hợp này, ta không được phép chặt đi cây nào trong 2 cây bên cạnh cây đã chặt đi này cũng như 2 cây kế tiếp chúng. Như vậy, ông V cần chặt đi 4 cây trong số 25 cây còn lại và sao cho giữa 2 cây bất kì có ít nhất 2 cây không bị chặt. Đánh số các cây này từ 1 đến 25. Thế thì số các cách cần tìm chính bằng số các bộ số nguyên dương $1 \leq a < b < c < d \leq 25$ sao cho $b - a > 2, c - a > 2, d - c > 2$. Số các bộ như vậy tương ứng $1 - 1$ với số các bộ số nguyên $1 \leq a' < b' < c' < d' \leq 19$ qua các song ánh $(a, b, c, d) \mapsto (a, b - 2, c - 4, d - 6)$ và $(a', b', c', d') \mapsto (a', b' + 2, c' + 4, d' + 6)$. Có $\binom{19}{4}$ bộ (a', b', c', d') như vậy. Do các cách chặt cây này khác nhau, số cách chặt cây trong trường hợp này là $2 \times \binom{19}{4}$, trong đó 2 tương ứng với hai cách chặt đi cây đầu tiên trong số hai cây đánh dấu.
- 2 cây được đánh dấu không bị chặt. Trong trường hợp này, ông V cần chặt đi 5 cây trong số 28 cây cần chặt sao cho ở giữa 2 cây bị chặt bất kì còn ít nhất 2 cây nữa. Tương tự như trên, số các cách chặt cây như vậy bằng số các bộ số nguyên $1 \leq a < b < c < d < e \leq 28$ sao cho $b - a > 2, c - b > 2, d - c > 2, e - d > 2$ và bằng số các bộ số nguyên $1 \leq a' < b' < c' < d' < e' \leq 17$ do đó bằng $\binom{17}{5}$.

Như vậy, số cách chặt cây cần tìm bằng $2 \times \binom{19}{4} + \binom{17}{5} = 7752 + 6188 = 13940$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.4. (a) $n = 3$: Dễ tìm được đa thức bậc 2 thỏa mãn điều kiện của bài toán, ví dụ $-(x-1)(x-2)$, với $x_1 = 1, x_3 = 2$ và $x_2 = 3/2$. Do đó nếu $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện thì $\deg P(x) \leq 2$. Nếu $\deg P(x) = 1$ thì hiển nhiên không tồn tại x_1, x_2, x_3 như vậy. Vậy $\deg P(x) = 2$.

(b) Đáp số 2016. Ta sẽ giải bài toán tổng quát với 2017 được thay bởi $n \geq 2$. Việc tồn tại đa thức bậc $n-1$ thỏa mãn giả thiết là hiển nhiên, ví dụ xét đa thức

$$H(x) = -(x-1)(x-2)\dots(x-2017).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $P(x)$ thoả mãn điều kiện bài ra thì $\deg(P) \geq n-1$.

Cách 1. Với $n = 2$ khẳng định là hiển nhiên ($P(x)$ khác hằng). Giả định $n \geq 3$.

Ta có quan sát sau đây.

Sự kiện. Cho đa thức $Q(x) \not\equiv 0$ sao cho $Q(a) \leq 0 \leq Q(b)$ với $a < b$ nào đó. Khi đó tồn tại $a < c < b$ sao cho $Q'(c) > 0$.

Thật vậy, nếu $Q'(x) \leq 0$ trên khoảng (a, b) thì hàm $Q(x)$ nghịch biến trên khoảng này, do đó $Q(a) \geq Q(b)$. Theo giả thiết ta phải có $Q(x)$ đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$, vô lý. Vậy tồn tại c sao cho $Q'(c) > 0$.

Ứng dụng vào bài toán. Theo giả thiết và quan sát trên, tồn tại các số $c_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ sao cho $P'(c_1) > 0$, $P'(c_2) < 0$,... Từ đó, giữa các số c_i và c_{i+1} tồn tại số d_i sao cho $P'(d_i) = 0$, với $i = 1, 2, \dots, n-2$. Vậy $P'(x)$ có ít nhất $n-2$ nghiệm. Từ đó $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng $n-1$.

Cách 2. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 2$ khẳng định là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng tới $n-1 \geq 2$. Ta chứng minh khẳng định đúng với n.

Trường hợp 1: $P(x_1) = 0$. Xét đa thức $Q(x) = -P(x)/(x-x_1)$. Khi đó $Q(x)$ thỏa mãn giả thiết quy nạp cho $n-1$ ($Q(x)$ không thể là hằng số vì khi đó $P(x)$ có bậc 1 không thỏa mãn giả thiết quy nạp cho $n \geq 3$). Từ đó $Q(x)$ có bậc ít nhất $n-2$, ta có đpcm.

Trường hợp 2: $P(x_1) < 0$ và $P(x_2) > 0$. Khi đó tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $P(c) = 0$, vậy ta có thể thay x_1 bởi c và bài toán quy về trường hợp 1.

Trường hợp 3: $P(x_1) < 0$ và $P(x_2) = 0$. Nếu tồn tại $c < x_2$ để $P(x) = 0$ thì ta có thể thay x_1 bởi c và quy về trường hợp 1. Nếu tồn tại $x_1 < c < x_2$ để $P(c) > 0$ thì ta thay x_2 bởi c và quy về trường hợp 2. Vậy ta có thể giả thiết $P(x) \leq 0$ trong lân cận của x_2. Từ đó x_2 là nghiệm bội. Xét $Q(x) = -P(x)/(x-x_2)$. Đa thức này thỏa mãn giả thiết quy nạp với các điểm $x_2, \dots, x_n$. Từ đó ta có đpcm.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.1. (a) Ta tính được $x_3 = 15$, $x_4 = 31$ và $x_5 = 63$.

(b) Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên ta thu được

$$x_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ nhất bằng x_{n-1} còn định thức thứ hai bằng x_{n-2}. Vậy

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

(c) Từ quan hệ $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ ta suy ra $x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Như vậy,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= 2(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= 4(x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= 2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ &= 2^{n-2}(7-3) = 2^n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n - 3 = x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) = 2^n + \cdots + 2^2$$

và do đó $x_n = 2^n + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, hay

$$x_n + 1 = 2^{n+1},$$

với mọi n.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.2. Giữ nguyên phương trình đầu, cộng phương trình (1) vào pt (2) và m lần pt (1) vào pt (3) ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 2+m \\ (2+m)x + (3-m)z = 2+m \\ (2+m)x + (3+m-m^2)z = (2+m)(m+1) \end{cases}$$

Trừ pt (3) cho pt (2) ta được hệ

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 2+m \\ (2+m)x + (3-m)z = 2+m \\ (2m-m^2)z = (2+m)m \end{cases}$$

TH1: Nếu $m=0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + 1 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

TH2: Nếu $m=2$ thì hệ phương trình dẫn đến $0z=8$ nên hệ không có nghiệm.

TH3: Nếu $m=-2$ thì hệ có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

TH4: Xét $m \neq 0, 2, -2$, hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m-2} \\ y = \frac{m+3}{2-m} \\ z = \frac{m+2}{2-m}. \end{cases}$$

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.3. a) Có $\binom{11}{2} = 55$ cách chọn ra 2 cây trong số 11 cây. Dễ thấy có 10 cách chặt 2 cây liên tiếp trong số 11 cây đó. Như vậy, có tất cả $55 - 10 = 45$ cách chặt cây thoả mãn yêu cầu.

b) Có $\binom{30}{4}$ cách chặt 4 cây bất kì từ 30 cây. Rõ ràng có đúng 30 cách chặt đi 4 cây sao cho cả 4 cây là cạnh nhau. Ta đếm số các cách chặt đi 4 cây sao cho trong số 4 cây bị chặt có đúng 3 cây kề nhau. Có cả thảy 30 cách chặt đi 3 cây liên tiếp. Với mỗi cách chặt đi 3 cây như vậy có đúng 25 cách chặt đi cây thứ 4 sao cho cây này không kề với 3 cây đã bị chặt. Như vậy, có tổng cộng 30×25 cách chặt đi 4 cây trong đó có đúng 3 cây kề nhau. Suy ra số các cách chặt đi 4 cây cần tìm là $\binom{30}{4} - 30 - 30 \times 25 = 27405 - 30 - 750 = 26625$.

c) Đánh dấu 2 cây liên tiếp bất kì. Có 2 khả năng:

- Một trong hai cây được đánh dấu bị chặt. Trong trường hợp này, ta không được phép chặt đi cây nào trong 2 cây bên cạnh cây đã chặt đi này cũng như 2 cây kế tiếp chúng. Như vậy, ông V cần chặt đi 4 cây trong số 25 cây còn lại và sao cho giữa 2 cây bất kì có ít nhất 2 cây không bị chặt. Đánh số các cây này từ 1 đến 25. Thế thì số các cách cần tìm chính bằng số các bộ số nguyên dương $1 \leq a < b < c < d \leq 25$ sao cho $b - a > 2, c - a > 2, d - c > 2$. Số các bộ như vậy tương ứng $1 - 1$ với số các bộ số nguyên $1 \leq a' < b' < c' < d' \leq 19$ qua các song ánh $(a, b, c, d) \mapsto (a, b - 2, c - 4, d - 6)$ và $(a', b', c', d') \mapsto (a', b' + 2, c' + 4, d' + 6)$. Có $\binom{19}{4}$ bộ (a', b', c', d') như vậy. Do các cách chặt cây này khác nhau, số cách chặt cây trong trường hợp này là $2 \times \binom{19}{4}$, trong đó 2 tương ứng với hai cách chặt đi cây đầu tiên trong số hai cây đánh dấu.
- 2 cây được đánh dấu không bị chặt. Trong trường hợp này, ông V cần chặt đi 5 cây trong số 28 cây cần chặt sao cho ở giữa 2 cây bị chặt bất kì còn ít nhất 2 cây nữa. Tương tự như trên, số các cách chặt cây như vậy bằng số các bộ số nguyên $1 \leq a < b < c < d < e \leq 28$ sao cho $b - a > 2, c - b > 2, d - c > 2, e - d > 2$ và bằng số các bộ số nguyên $1 \leq a' < b' < c' < d' < e' \leq 17$ do đó bằng $\binom{17}{5}$.

Như vậy, số cách chặt cây cần tìm bằng $2 \times \binom{19}{4} + \binom{17}{5} = 7752 + 6188 = 13940$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.4. **Cách 1**: Giả sử P là một đa thức bậc $n = 100$ thoả mãn điều kiện bài toán. Bằng cách so sánh bậc và so sánh hệ số cao nhất, rõ ràng ta phải có $nP(x) = (x + a)P'(x)$ với $a \in \mathbb{R}$. Đặt

$$P(x) = c(x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0),$$

trong đó $c \neq 0, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}(x + a)P'(x) &= c(x + a)(nx^{n-1} + c_{n-1}(n - 1)x^{n-2} + \cdots + c_1)\\ &= c\left[nx^n + ((n - 1)c_{n-1} + an)x^{n-1} + ((n - 2)c_{n-2} + a(n - 1)c_{n-1})x^{n-2}\right.\\ &\quad \left.+ \cdots + (c_1 + a \cdot 2 \cdot c_2)x + ac_1\right]\end{aligned}$$

Từ đây, bằng cách so sánh các hệ số của $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^0$, ở hai vế của đẳng thức $(x + a)P'(x) = nP(x)$ ta lần lượt suy ra

$$nc_{n-1} = (n - 1)c_{n-1} + an, \text{ hay } c_{n-1} = na;$$

$$(n - 2)c_{n-2} + a(n - 1)c_{n-1} = nc_{n-2} \text{ hay } 2c_{n-2} = a(n - 1)c_{n-1} \text{ hay } c_{n-2} = \binom{n}{2}a^2;$$

một cách tổng quát,

$$c_{n-k} = \binom{n}{k}a^k, \forall k = 1, \ldots, n.$$

Như vậy,

$$P(x) = c(x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}a^k x^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n}a^n) = c(x + a)^n.$$

Đảo lại, ta dễ dàng kiểm tra được rằng một đa thức có dạng $P(x) = c(x + a)^n$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Cách 2: Lập luận tương tự như trên, đa thức $P(x)$ có một nghiệm thực $b \in \mathbb{R}$ nào đó. Đặt $P(x) = (x - b)^r R(x)$, với $r > 0$, $R(x)$ là đa thức bậc $n - r$ và b không là nghiệm của $R(x)$. Ta có

$$P'(x) = r(x - b)^{r-1}R(x) + (x - b)^r R'(x) = (x - b)^{r-1}\big(rR(x) + (x - b)R'(x)\big).$$

Thay vào đẳng thức $P(x) = (x - b)^r R(x)$ ta suy ra

$$(1 - \frac{r}{n})R(x) = (x - b)R'(x).$$

Vì b không là nghiệm của $R(x)$ nên suy ra $r = n$ và $R'(x) = 0$. Vậy

$$P(x) = \lambda(x-b)^n,$$

với một hằng số $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Cách 3: Giả sử P là một đa thức bậc $n = 100$ sao cho $P' \mid P$. Do $\deg P' = \deg P - 1$ nên bằng cách để ý tới hệ số cao nhất của P' ta suy ra $P(x) = \frac{1}{n}(x-\alpha_1)P'(x)$ với $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ nào đó. Điều này chứng tỏ

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{n}{x-\alpha_1}. \quad (*)$$

Bây giờ, nếu $P(x) = c(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}$, trong đó $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ là các nghiệm phức phân biệt của P với các bội tương ứng là $m_1,\ldots,m_k$ thì

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{m_k}{x-\alpha_k}. \quad (**)$$

Nếu $k \geq 2$ thì ta có ngay điều vô lý vì $(*)$ cho thấy $\lim_{x\to\alpha_2}(x-\alpha_2)\frac{P'(x)}{P(x)} = 0$ còn $(**)$ lại dẫn đến $\lim_{x\to\alpha_2}\frac{P'(x)}{P(x)} = 0 = m_2$. Vậy α_1 là nghiệm duy nhất của P và do đó $P(x) = c(x-\alpha_1)^n$. Đảo lại, mọi đa thức như vậy thoả mãn điều kiện bài toán.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.1 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	CHỨNG MINH TÍNH CHẤT $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ KHI $n \geqslant 2$	
			Do $u_1 = 1$ ta tính được $u_2 = -1/2 \in (-1, 0)$.	
			Giả sử ta đã có $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ với $n \geqslant 2$ nào đó. Lúc này, $$-1 \leqslant \frac{{u_n}^2}{2} - 1 \leqslant \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$ tức là $-1 \leqslant u_{n+1} < 0$.	
			Kết luận: $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ với mọi $n \geqslant 2$ (từ đó, nếu dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì giới hạn không dương).	
		2	CHỨNG MINH $\lvert u_n - (1-\sqrt{3})\rvert \leqslant (\sqrt{3}/2)^{n-2}\lvert u_2 - (1-\sqrt{3})\rvert$ khi $n \geqslant 2$	
			Ký hiệu $a = 1 - \sqrt{3}$. Khi đó a là nghiệm âm của phương trình $a = a^2/2 - 1$.	
			Ta có $$\lvert u_{n+1} - a\rvert = \left\lvert \frac{{u_n}^2}{2} - 1 - (\frac{a^2}{2} - 1)\right\rvert = \frac{1}{2}\lvert u_n - a\rvert\lvert u_n + a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 1$.	
			Do $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ với mọi $n \geqslant 2$, ta có $$-\sqrt{3} = -1 + (1-\sqrt{3}) \leqslant u_n + a \leqslant a < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lvert u_n + a\rvert < \frac{\sqrt{3}}{2}$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
			Vậy ta có đánh giá $$\lvert u_{n+1} - a\rvert \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\lvert u_n - a\rvert \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\lvert u_2 - a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
		3	KẾT LUẬN	
			Do $\sqrt{3}/2 < 1$ nên $$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \to 0$$ khi $n \to \infty$.	
			Suy ra: $\lvert u_{n+1} - a\rvert \to 0$ khi $n \to \infty$; tức là, dãy (u_n) hội tụ về $a = 1 - \sqrt{3}$.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.2 **6 điểm**

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG	
			Giả sử phản chứng: tồn tại $\delta > 0$ và $x_0 > 0$ sao cho $\dfrac{f'(x)}{(f(x))^{2017}} > \delta$ với mọi $x \geqslant x_0$.	
			Tích phân hai vế bất đẳng thức trên trên đoạn $[x_0, x]$ ta được $\delta(x - x_0) < \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f'(s)}{(f(s))^{2017}} ds = \frac{1}{2016}\Big(\frac{1}{f(x_0)^{2016}} - \frac{1}{f(x)^{2016}}\Big)$ với mọi $x \geqslant x_0$.	
			Từ đó ta thu được đánh giá $\dfrac{1}{f(x_0)^{2016}} > 2016\,\delta\,(x - x_0)$ với mọi $x \geqslant x_0$. Cho $x \to \infty$ ta gặp mâu thuẫn; suy ra bất đẳng thức cần chứng minh!	
		2	CHỈ RA PHẢN VÍ DỤ KHI THAY **2017** BỞI **1**	
			Kết luận trên không còn đúng nếu thay số **2017** bởi **1**. Chẳng hạn có thể lấy ví dụ với hàm $f(x) = \exp(x^2)$.	
			Thật vậy trong trường hợp này $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2x\exp(x^2)}{\exp(x^2)} = 2x.$ Vậy $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \infty.$	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.3 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**Tìm một hàm liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện tích phân**	**2,00**
	1	1	XÁC ĐỊNH DẠNG CỦA HÀM	
			Ta sẽ tìm hàm f dưới dạng $f(x) = cx + d$.	
		2	LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHO c VÀ d	
			Ta có $$\int_0^1 f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} + d = 0$$ và $$\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = 1.$$	
		3	GIẢI HỆ VÀ KẾT LUẬN	
			Giải hệ (theo c và d) thu được $c = 12$, $d = -6$. Vậy, một ví dụ về hàm liên tục f thỏa mãn các điều kiện là $f(x) = 12x - 6$.	
2			**Chỉ ra sự tồn tại của $\emptyset \neq (a, b) \subset [0, 1]$**	**4,00**
	1	1	SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG	
			Vì f liên tục nên giả sử phản chứng sẽ đưa đến bất đẳng thức $\|f(x)\| \leqslant 4$ với mọi $x \in [0, 1]$. Khi đó $$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 f(x)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx \\ &= \int_0^{1/2} f(x)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx + \int_{1/2}^1 f(x)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx \\ &\leqslant 4\int_0^{1/2} \Big(\frac{1}{4} - x^2\Big)dx + 4\int_{1/2}^1 \Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx \\ &= 4 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 1. \end{aligned}$$	
		2	CHỈ RA ĐIỀU VÔ LÝ	
			Vậy, dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra. Do f liên tục trên $[0, 1]$, nên $$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{nếu } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 4 & \text{nếu } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$ Tuy nhiên trong trường hợp này hàm f không liên tục tại $1/2$.	

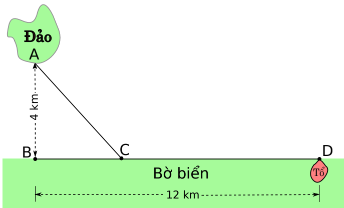
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4 **7 điểm**



Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**Xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.**	2,00
	1	1	KHẢO SÁT NĂNG LƯỢNG TIÊU TỐN	
			Để tiện cho các tính toán về sau, ta giả sử $BC = x$ km với $x \in [0, 12]$. Khi đó năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim (theo quan sát) là $\sqrt{16+x^2}W + (12-x)L = Lf(x),$ với $f(x) := r\sqrt{16+x^2} + 12 - x$ khả vi liên tục trên $[0, 12]$ (và $r = \sqrt{2}$).	
			Khảo sát hàm f ta có: $f'(x) = \dfrac{rx}{\sqrt{16+x^2}} - 1;$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 4$ (vì $r = \sqrt{2}$).	
		2	CỰC TIỂU HÓA VÀ KẾT LUẬN	
			$f' < 0$ trên $(0, 4)$ nên f giảm ngặt trên $[0, 4]$; $f' > 0$ trên $(4, 12)$ nên f tăng ngặt trên $[4, 12]$.	
			Vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 4$; tức là, $BC = 4$ km.	
2			**Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.**	1,00
	1	1	$x_0 = 3$ LÀ MỘT ĐIỂM TỚI HẠN CỦA f	
			Theo giả thiết ở đầu bài, đường bay chim chọn làm cho $f(3) = \min\limits_{x\in[0,12]} f(x)$ nên $f'(3) = 0$.	
		2	KẾT LUẬN	

			Trong lời giải Ý 1, ta đã thấy: điểm tới hạn duy nhất của f là $x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}}$; nên $\dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 3 \Leftrightarrow r = 5/3.$	
3			**Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1,\infty)$?**	3,00
	1	1	TRƯỜNG HỢP $x_0 \in (0,12)$	
			Dễ thấy: $x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0,12) \Leftrightarrow r > \dfrac{\sqrt{10}}{3}.$	
			Với $r > \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0, x_0)$ nên f giảm ngặt trên $[0, x_0]$ và $f' > 0$ trên $(x_0, 12)$ nên f tăng ngặt trên $[x_0, 12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại x_0; tức là, $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0,12).$	
			Lúc này, ta thấy: $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \downarrow 0$ (nên $C \to B$) khi $r \uparrow \infty$; $BC \uparrow 12$ nên $C \to D$ khi $r \downarrow \dfrac{\sqrt{10}}{3}.$	
		2	TRƯỜNG HỢP $x_0 \notin (0,12)$	
			Với $1 < r \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0,12)$ nên f giảm ngặt trên $[0,12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 12$; tức là, $BC = 12$ (nói cách khác, $C \equiv D$).	
4			**Với những giá trị nào của r thì chim bay thẳng đến tổ? Có khả năng nào để chim bay đến B trước rồi mới bay về tổ không?**	1,00
	1	1	CHIM BAY THẲNG ĐẾN TỔ	
			Chim bay thẳng về tổ khi và chỉ khi $C \equiv D$. Theo khảo sát ở Ý 3, điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $1 < r \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.	
		2	CHIM BAY ĐẾN B RỒI MỚI VỀ TỔ	
			Luôn có: $BC = x_0 > 0 \Rightarrow C \neq B$. Vậy, chim không bao giờ bay đến B trước rồi mới bay về tổ.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.5 **5 điểm**

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	XÉT TRƯỜNG HỢP $\alpha \geqslant 2$	
			Bất đẳng thức ta cần có trở thành $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant Cx^{\alpha-2}y^2 + Cy^\alpha.$$	
			Dùng công thức khai triển Taylor, ta thấy $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$. **<u>Ghi chú</u>**: *Công thức trên đúng cho α bất kỳ. Cũng có thể thu được công thức này nhờ tính liên tục của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ theo $t \in (0,1]$ và sự tồn tại giới hạn hữu hạn của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ khi $t \to 0^+$ (quy tắc l'Hôpital).*	
			Sử dụng công thức trên ta thu được $$(x+y)^\alpha = x^\alpha(1+\frac{y}{x})^\alpha = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y + O(1)x^\alpha(\frac{y}{x})^2$$ nếu $y/x \leqslant 1$. Vậy $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant Cx^{\alpha-2}y^2$$ nếu $y/x \leqslant 1$.	
			Trong trường hợp $y/x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant \max\{2^\alpha y^\alpha, \alpha y^\alpha + y^\alpha\} = \max\{2^\alpha, \alpha+1\}y^\alpha.$$ Thật ra, ước lượng này đúng khi $y/x \geqslant 1$ với $\alpha \geqslant 1$ nói chung. Vậy tồn tại C đủ lớn để bất đẳng thức cần có là đúng với mọi $x, y > 0$.	
		2	XÉT TRƯỜNG HỢP $1 \leqslant \alpha < 2$	
			Bất đẳng thức cần có trở thành $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant Cy^\alpha.$$	
			Ta vẫn có đánh giá $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$.	

			Với trường hợp $y/x \leqslant 1$ ta tiếp tục sử dụng đánh giá trên, với chú ý $x^\alpha (y/x)^2 = (y/x)^{2-\alpha} y^\alpha$, để có đánh giá $\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= x^\alpha\Big(1+\alpha\frac{y}{x}+O(1)(\frac{y}{x})^2\Big)\\ &= x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y + O(1)x^\alpha(\frac{y}{x})^2\\ &= x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y + O(1)(\frac{y}{x})^{2-\alpha}y^\alpha.\end{aligned}$ Nhưng nếu $y/x \leqslant 1$ thì $(y/x)^{2-\alpha} \leqslant 1$ nên từ đây ta có đpcm.	
			Trong trường hợp $y/x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $\begin{aligned}\big\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\big\| &\leqslant \max\big\{2^\alpha y^\alpha, \alpha y^{\alpha-1}y + y^\alpha\big\}\\ &= \max\big\{2^\alpha, \alpha+1\big\}y^\alpha.\end{aligned}$ **Ghi chú**: *Để thu được ước lượng trên thì điều kiện $\alpha \geqslant 1$ là quan trọng, do ta muốn có $x^{\alpha-1} \leqslant y^{\alpha-1}$ khi đã có $0 < x \leqslant y$.*	
		3	XÉT TRƯỜNG HỢP $0 < \alpha < 1$	
			Trong trường hợp này không thể tồn tại số thực $C > 0$ để bất đẳng thức $\big\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\big\| \leqslant Cy^\alpha$ đúng với mọi $x > 0$, $y > 0$. Thật vậy bằng phản chứng giả sử tồn tại một hằng số $C > 0$ có tính chất như trên. Xét $y = kx$ trong đó $k > 0$. Thay vào bất đẳng thức ta thu được $\big\|(1+k)^\alpha x^\alpha - \alpha k x^\alpha - x^\alpha\big\| \leqslant Ck^\alpha x^\alpha.$	
			Chia hai vế cho số dương $k^\alpha x^\alpha$ ta đi đến $\Big\|\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^\alpha - \alpha k^{1-\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\Big\| \leqslant C.$ Lấy giới hạn khi $k \to \infty$ ta có ngay điều vô lý do vế trái tiến ra vô cùng.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.1 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	CHỨNG MINH TÍNH CHẤT $-1 < u_n < 0$ KHI $n \geqslant 2$	
			Do $u_1 = 1$ ta tính được $u_2 = -1/2 \in (-1, 0)$.	
			Giả sử ta đã có $-1 < u_n < 0$ với $n \geqslant 2$ nào đó. Lúc này, $$-1 < \frac{{u_n}^2}{2} - 1 < \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$ tức là $-1 < u_{n+1} < 0$.	
			Theo nguyên lý quy nạp, $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geqslant 2$.	
		2	CHỨNG MINH $\lvert u_n - (1-\sqrt{3})\rvert \leqslant (\sqrt{3}/2)^{n-2}\lvert u_2 - (1-\sqrt{3})\rvert$ khi $n \geqslant 2$	
			Ký hiệu $a = 1 - \sqrt{3}$. Ta có $$\lvert u_{n+1} - a\rvert = \Big\lvert \frac{{u_n}^2}{2} - 1 - \big(\frac{a^2}{2} - 1\big)\Big\rvert = \frac{1}{2}\lvert u_n - a\rvert\lvert u_n + a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 1$.	
			Do $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geqslant 2$, ta cũng có $$-\sqrt{3} = -1 + (1-\sqrt{3}) < u_n + a < a < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lvert u_n + a\rvert < \frac{\sqrt{3}}{2}$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
			Vậy ta có đánh giá $$\lvert u_{n+1} - a\rvert \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\lvert u_n - a\rvert \leqslant \cdots \leqslant \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{n-1}\lvert u_2 - a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
		3	KẾT LUẬN	
			Do $\sqrt{3}/2 < 1$ nên $$\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{n-1} \to 0$$ khi $n \to \infty$.	
			Suy ra $\lvert u_n - a\rvert \to 0$ khi $n \to \infty$; tức là, dãy (u_n) hội tụ về $a = 1 - \sqrt{3}$.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.2 — 8 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$**	3,00
	1	1	XÉT TÍNH LIÊN TỤC TRÊN MIỀN $x \neq 0$	
			Khi $x < 0$ thì $f(x)$ là một hàm hằng nên nó liên tục; khi $x > 0$ thì $f(x) = a^x + x^a$ là tổng của hai hàm liên tục nên cũng liên tục.	
		2	XÉT TÍNH LIÊN TỤC TẠI $x = 0$	
			Xét tính liên tục trái tại $x = 0$. Rõ ràng $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 = f(0).$$	
			Xét tính liên tục phải tại $x = 0$. Rõ ràng $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a^x + \lim_{x \to 0^+} x^a = a^0 + 0 = 1 = f(0).$$ Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.	
		3	KẾT LUẬN	
			Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$.	
2			**f không khả vi tại 0**	5,00
	1	1	ĐẠO HÀM BÊN TRÁI	
			Theo định nghĩa, $$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 1}{x} = 0.$$	
		2	ĐẠO HÀM BÊN PHẢI	
			Ta cũng có $$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^x + x^a - 1}{x}.$$	
			Sử dụng quy tắc l'Hôpital ta được $$\lim_{x \to 0^+} \frac{a^x + x^a - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(a^x(\ln a) + ax^{a-1}\right) = \begin{cases} \ln a & \text{nếu } a > 1, \\ 1 & \text{nếu } a = 1, \\ \infty & \text{nếu } a < 1. \end{cases}$$	
		3	KẾT LUẬN	
			Do $f'_-(0) = 0 < f'_+(0)$ nên hàm f không khả vi tại 0.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.3 **5 điểm**

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	ĐỔI BIẾN	
			Ta sử dụng phép đổi biến $$\sqrt{2+\sqrt{1+x}} = y.$$ Khoảng biến thiên tương ứng của y là $$\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 2.$$ Giải x theo y ta được $$x = y^4 - 4y^2 + 3.$$	
		2	XÁC ĐỊNH VI PHÂN dx THEO BIẾN MỚI	
			Từ công thức $x = y^4 - 4y^2 + 3$ ta có $$dx = 4(y^3 - 2y)dy.$$	
		3	CHUYỂN TÍCH PHÂN TỪ BIẾN CŨ SANG BIẾN MỚI	
			Ta có $$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{1+x}}dx = 4\int_{\sqrt{3}}^2 (y^4 - 2y^2)dy$$	
		4	KẾT LUẬN	
			Rõ ràng $$\int_{\sqrt{3}}^2 (y^4 - 2y^2)dy = \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3}\right)\Big\vert_{\sqrt{3}}^2 = \frac{32-9\sqrt{3}}{5} - \frac{16-6\sqrt{3}}{3}.$$ Vậy $$\int_0^3 \sqrt{2+\sqrt{1+x}}dx = \frac{64}{15} + \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

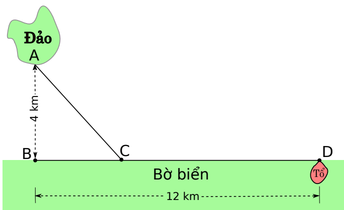
KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.4 — **6 điểm**



Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**Xác định vị trí của C nếu $r=\sqrt{2}$.**	**2,00**
	1	1	KHẢO SÁT NĂNG LƯỢNG TIÊU TỐN	
			Để tiện cho các tính toán về sau, ta giả sử $BC=x$ km với $x\in[0,12]$. Khi đó năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim (theo quan sát) là $$\sqrt{16+x^2}W+(12-x)L=Lf(x),$$ với $$f(x):=r\sqrt{16+x^2}+12-x$$ khả vi liên tục trên $[0,12]$ (và $r=\sqrt{2}$).	
			Khảo sát hàm f ta có: $$f'(x)=\frac{rx}{\sqrt{16+x^2}}-1;$$ nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0:=\frac{4}{\sqrt{r^2-1}}=4$ (vì $r=\sqrt{2}$).	
		2	CỰC TIỂU HÓA VÀ KẾT LUẬN	
			$f'<0$ trên $(0,4)$ nên f giảm ngặt trên $[0,4]$; $f'>0$ trên $(4,12)$ nên f tăng ngặt trên $[4,12]$.	
			Vậy, $\min_{x\in[0,12]}f(x)$ chỉ đạt tại $x=4$; tức là, $BC=4$ km.	
2			**Giả sử $BC=3$ km. Tính r.**	**1,00**
	1	1	$x_0=3$ LÀ MỘT ĐIỂM TỚI HẠN CỦA f	
			Theo giả thiết ở đầu bài, đường bay chim chọn làm cho $$f(3)=\min_{x\in[0,12]}f(x)$$ nên $f'(3)=0$.	
		2	KẾT LUẬN	

			Trong lời giải Ý 1, ta đã thấy: điểm tới hạn duy nhất của f là $x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}}$; nên $$\frac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 3 \Leftrightarrow r = 5/3.$$	
3			**Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1,\infty)$?**	**3,00**
	1	1	TRƯỜNG HỢP $x_0 \in (0,12)$	
			Dễ thấy: $$x_0 := \frac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0,12) \Leftrightarrow r > \frac{\sqrt{10}}{3}.$$	
			Với $r > \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0,x_0)$ nên f giảm ngặt trên $[0,x_0]$ và $f' > 0$ trên $(x_0,12)$ nên f tăng ngặt trên $[x_0,12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại x_0; tức là, $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0,12)$.	
			Lúc này, ta thấy: $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \downarrow 0$ (nên $C \to B$) khi $r \uparrow \infty$; $BC \uparrow 12$ nên $C \to D$ khi $r \downarrow \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.	
		2	TRƯỜNG HỢP $x_0 \notin (0,12)$	
			Với $1 < r \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0,12)$ nên f giảm ngặt trên $[0,12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 12$; tức là, $BC = 12$ (nói cách khác, $C \equiv D$).	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5 — 5 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	XÉT TRƯỜNG HỢP $\alpha \geqslant 2$	
			Bất đẳng thức ta cần có trở thành $\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant Cx^2 + Cx^\alpha.$	
			Dùng công thức khai triển Taylor, ta thấy $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$. **Ghi chú**: *Công thức trên đúng cho α bất kỳ. Cũng có thể thu được công thức này nhờ tính liên tục của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ theo $t \in (0,1]$ và sự tồn tại giới hạn hữu hạn của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ khi $t \to 0^+$ (quy tắc l'Hôpital).*	
			Sử dụng công thức trên ta thu được $\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant Cx^2$ nếu $x \leqslant 1$.	
			Trong trường hợp $x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant 2^\alpha x^\alpha + x^\alpha + \alpha x^\alpha = (1 + \alpha + 2^\alpha)x^\alpha.$ Thật ra, ước lượng này đúng khi $x \geqslant 1$ với $\alpha \geqslant 1$ nói chung. Vậy tồn tại C đủ lớn để bất đẳng thức cần có là đúng với mọi $x > 0$.	
		2	XÉT TRƯỜNG HỢP $1 \leqslant \alpha < 2$	
			Bất đẳng thức cần có trở thành $\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant Cx^\alpha.$	
			Ta vẫn có đánh giá $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$.	
			Trong trường hợp $x \leqslant 1$ ta tiếp tục sử dụng công thức đánh giá ở trên, với chú ý $x^2 \leqslant x^\alpha$, để thu được $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(1)x^2 = 1 + \alpha x + O(1)x^\alpha.$ Suy ra đpcm.	

			Trong trường hợp $x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant \max\{2^\alpha x^\alpha, \alpha x + 1\} \leqslant \max\{2^\alpha, \alpha + 1\} x^\alpha.$ **<u>Ghi chú</u>**: *Để thu được ước lượng trên thì điều kiện $\alpha \geqslant 1$ là quan trọng, do ta muốn có $x \leqslant x^\alpha$ với $x \geqslant 1$.*	
		3	XÉT TRƯỜNG HỢP $0 < \alpha < 1$	
			Trong trường hợp này không thể tồn tại số thực $C > 0$ để bất đẳng thức $\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant C x^\alpha$ đúng với mọi $x > 0$.	
			Thật vậy bằng phản chứng giả sử tồn tại một hằng số $C > 0$ có tính chất như trên. Chia hai vế cho số dương x^α ta đi đến $\left\|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha - \frac{1}{x^\alpha} - \alpha x^{1-\alpha}\right\| \leqslant C.$ Lấy giới hạn khi $x \to \infty$ ta gặp phải mâu thuẫn, do vế trái tiến ra vô cùng!	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN MÔN: TỔ HỢP

Bảng PT

Bài PT.1. Thật vậy, để phủ hết mn ô của bảng $m \times n$ ta cần $mn/2$ quân đôminô, do đó mn phải là một số chẵn. Đảo lại, giả sử n chẵn (m chẵn hoàn toàn tương tự). Thế thì mỗi hàng có thể phủ bởi $n/2$ quân đôminô nằm ngang và môt bảng $m \times n$ có thể phủ bởi $mn/2$ các quân đôminô nằm ngang.

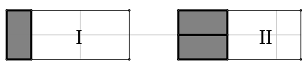
Bài PT.2. Vẫn với lập luận tương tự như trên, điều kiện cần là $mn - 1$ chia hết cho 2, nói cách khác, m, n là các số lẻ. Đảo lại, nếu m, n là các số lẻ. Ta dễ dàng phủ cột đầu tiên gồm $m - 1$ ô bởi $(m-1)/2$ quân đô minô nằm dọc, bảng $m \times (n-1)$ còn lại được lát như câu trên.

Bài PT.3. Với các lập luận tương tự, điều kiện cần là mn là một số chẵn. Tuy nhiên, đây không phải là điều kiện đủ. Thật vậy, tô màu bảng đã cho bởi hai màu đen, trắng như cách tô của bàn cờ thì mỗi quân đôminô phủ một ô màu đen và một ô màu trắng. Như vậy, để bàn cờ $m \times n$ khuyết 2 ô góc đối diện thể lát được bởi các quân đôminô thì số ô đen phải bằng số ô trắng. Điều này xảy ra khi và chỉ khi m, n không đồng thời là các số chẵn.

Đảo lại, nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì ta dễ dàng chỉ ra một cách phủ bàn cờ đã cho bởi các quân đôminô.

Bài PT.4. Ta xét cách phủ các ô của cột 1:

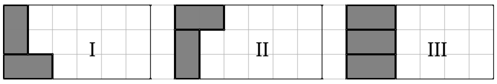
- loại I: 2 ô ở cột đầu tiên được phủ bởi một quân đôminô (xếp theo chiều dọc).
- loại II: 4 ô ở hai cột đầu tiên được phủ bởi 2 quân đôminô nằm ngang.



Dễ thấy rằng các cách lát loại I tương ứng 1-1 với số các cách lát bảng $2 \times (n-1)$ và số các cách lát loại II tương ứng 1-1 với số các cách lát bảng $2 \times (n-2)$. Từ đó suy ra công thức truy hồi cần chứng minh.

Ta cũng để ý rằng $u_1 = 1 = F_1, u_2 = 2 = F_2$. Từ đây, bởi vì u_n và F_n đều thoả mãn cùng một quan hệ truy hồi tuyến tính cấp 2, ta suy ra $u_n = F_n$ với mọi n.

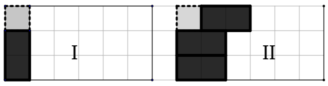
Bài PT.5. a) Để lát một bảng $3 \times n$, cột đầu tiên phải được phủ bởi 1 trong 3 cách sau đây



Các cách lát dạng I, II tương ứng với các cách lát bảng $3 \times (n-1)$ khuyết một ô ở 1 góc, còn các cách lát dạng III tương ứng $1-1$ với các cách lát một bảng $3 \times (n-2)$. Từ đó suy ra

$$t_n = 2s_{n-1} + t_{n-2}.$$

Để lát một bảng $3 \times n$ khuyết ô $(3,1)$, ta phải bắt đầu bởi đúng 1 trong 2 cách lát sau:



Các cách lát loại I tương ứng 1-1 với các cách lát của 1 bảng $3 \times (n-1)$ còn các cách lát loại II tương ứng 1-1 với các cách lát của một bảng $3 \times (n-2)$ bị khuyết 1 ô ở góc. Từ đó suy ra

$$s_n = t_{n-1} + s_{n-2}.$$

b) Từ hệ thức thứ hai ta suy ra $s_n = t_{n-1} + t_{n-3} + \cdots$. Từ đó, bằng cách lắp vào hệ thức thứ nhất ta thu được

$$t_n = 3t_{n-2} + 2t_{n-4} + \cdots .$$

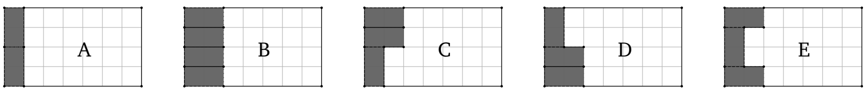
Thế nhưng, cũng từ đây,

$$t_{n-2} = 3t_{n-4} + 2t_{n-6} + \cdots .$$

Trừ hai công thức trên ta thu được công thức cần chứng minh.

Nhận xét rằng $t_n = 0$ với mọi n lẻ. Với $n = 2m$, hệ thức truy hồi trên đây dễ dàng cho ta công thức cần tìm.

Bài PT.6. Ta quan sát rằng các cách lát của bảng $4 \times n$ cho ta các cách lát sau đây của cột đầu tiên:



Gọi y_n, z_n tương ứng là các cách lát của một bảng $4 \times n$ khuyết 2 ô $(4,1)v$(1,1) và của một bảng $4 \times n$ khuyết 2 ô $(4,1)$ và $(3,1)$. Thế thì, các quan sát trên đây cho thấy

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + y_{n-1} + 2z_{n-1}.$$

Tương tự, ta có

$$z_n = x_{n-1} + z_{n-1}, \quad \text{và} \quad y_n = x_{n-1} + y_{n-2}.$$

Từ đó suy ra

$$z_{n-1} = x_{n-2} + z_{n-2} = x_{n-2} + x_{n-3} + z_{n-3} = \cdots = x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots .$$

$$y_{n-1} = x_{n-2} + y_{n-3} = x_{n-2} + x_{n-4} + y_{n-4} = \cdots = x_{n-2} + x_{n-4} + \cdots .$$

Lắp các công thức này vào biểu thức đầu tiên của x_n ta thu được

$$x_n = x_{n-1} + 4x_{n-2} + 2x_{n-3} + 3x_{n-4} + 2x_{n-5} + 3x_{n-6} + \cdots .$$

Sử dụng chính công thức này cho x_{n-2} thay vì x_n ta có

$$x_{n-2} = x_{n-3} + 4x_{n-4} + 2x_{n-5} + 3x_{n-6} + \cdots .$$

Trừ hai công thức trên ta có công thức cần chứng minh.

Bài PT.7. Với mỗi cách lát, ta cho tương ứng với cách lát nhận được bằng cách lấy đối xứng qua một đường chéo cố định. Xây dựng này cho ta ghép đôi của tập các cách lát của bảng đã cho. Từ đó suy ra $f(n, n)$ là một số chẵn.

Bài PT.8. Ta lập luận bằng qui nạp theo k. Trường hợp $k = 1$ là hiển nhiên. Giả sử $f(2^k - 1, 2n)$ là một số lẻ, ta sẽ chỉ ra rằng $f(2^{k+1} - 1, 2n)$ cũng là một số lẻ. Gọi ℓ là đường trung trực của cặp cạnh độ dài $2^{k+1} - 1$. Tập các cách lát của bảng $(2^{k+1} - 1) \times 2n$ được chia thành 2 loại: các cách lát không đối xứng qua ℓ và các cách lát đối xứng qua ℓ. Bằng cách ghép một cách lát với cách lát đối xứng qua ℓ, dễ thấy tập đầu tiên gồm một số chẵn phần tử. Đối với tập các cách lát đối xứng qua ℓ, mỗi cách lát như vậy tương ứng $1 - 1$ với một cách lát bảng $(2^k - 1) \times 2n$) ("một nửa của bảng đã cho", dải chính giữa hiển nhiên phải được lát bởi các quân đôminô nằm ngang). Theo giả thiết qui nạp, tập hợp này là một số lẻ, do đó ta có điều cần chứng minh.

Bài PT.9. Để ngắn gọn, ta gọi các ô nằm trên hàng n hoặc cột n của một bảng tựa vuông cỡ n là các ô biên.

a) Ta lập luận bằng qui nạp theo kích cỡ của bảng. Khẳng định dễ dàng được kiểm tra với $n = 1, 2, 3$. Giả sử khẳng định đúng cho mọi bảng tựa vuông cỡ $\leq n$. Xét một bảng tựa vuông tốt cỡ $n + 1$. Ta phân hoạch các cách lát của bảng này dựa vào vị trí các quân đôminô phủ các ô biên. Sau khi bỏ các quân đôminô này ta có một bảng tựa vuông cỡ n. Nhận xét rằng do bảng ban đầu là tốt, bảng tựa vuông này là tốt khi và chỉ khi mọi quân đôminô bị bỏ ra ngoài phải chứa đúng một ô biên. Ta cũng chú ý rằng chỉ có duy nhất một cách lát các quân đôminô này. Nói riêng, xuất phát từ một cách lát bảng tựa vuông tốt cỡ $n + 1$ ta thu được một duy nhất một cách lát một bảng tựa vuông tốt cỡ n và hình dạng của bảng tựa vuông tốt cỡ n được xác định một cách duy nhất bởi hình dạng của bảng tựa vuông tốt ban đầu. Theo giả thiết qui nạp, mỗi bảng không tựa vuông tốt cỡ n có một số chẵn cách lát còn bảng tựa vuông tốt cỡ n duy nhất nhận được có một số lẻ các cách lát. Vậy mọi bảng tựa vuông tốt cỡ $n + 1$ đều có một số lẻ cách lát.

Bây giờ, một bảng tựa vuông tốt cỡ $n+1$. Một lần nữa, ta phân hoạch các cách lát bảng này dựa theo các cách lát các các ô biên. Với mỗi cách lát với một cấu hình các ô biên được phủ là cho trươsc, ta bỏ đi các quân đôminô này để có một ô tựa vuông cỡ n được lát. Giả sử bảng nhận được là tựa vuông tốt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi bảng ban đầu và các quân đôminô bỏ đi có dạng như sau: i) đối xứng với mỗi ô bị khuyết (khác ô (n, n)) phải là một ô không bị khuyết và ô này bị phủ bởi một quân đôminô "vuông góc" với biên và, ii) các quân đôminô còn lại là "phản đối xứng" qua đường chéo theo nghĩa sau: chúng được chia thành các cụm 3 đôminô, mỗi cụm gồm 1 quân đôminô chứa 2 ô biên và 2 ô biên đối xứng với chúng qua đường chéo (phải thuộc bảng đã cho theo i)) được phủ bởi 2 quân đôminô vuông góc với các ô biên. Như vậy, theo giả thiết qui nạp thì nếu bảng tựa vuông ban đầu không có tính chất i) nêu trên thì với mọi cấu hình cho trước phủ các ô biên của số cách lát tương ứng phải là chẵn. Còn nếu bảng tựa vuông có tính chất i) thì ta chia các cách lát thành 2 loại sau: loại 1 gồm các cách lát với cấu hình các quân đôminô phủ các ô biên mà có 1 ô đối xứng với một ô khuyết nào đó không được phủ bởi một quân đôminô "vuông góc" với biên, loại 2 gồm các cách lát còn lại. Theo giả thiết qui nạp thì số các cách lát loại 1 là một số chẵn. Dựa vào ii), không khó để chỉ ra rằng các cách lát loại 2, sau khi bỏ các quân đôminô chứa các ô biên sẽ hoặc là cho các bảng không tựa vuông tốt, hoặc là cho ta các cặp bảng tựa vuông tốt đối xứng nhau qua đường chéo. Một lần nữa, theo giả thiết qui nạp thì số các cách lát loại 2 là số chẵn. Như vậy, trong mọi tình huống ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có thể giả sử $m < n$. Với một cách lát bảng $m \times n$ bất kì, ta bỏ đi các quân đôminô phủ ít nhất một ô của cột thứ $m+1$. Sau khi bỏ đi như vậy, ta thu được 2 bảng: bảng bên trái là một bảng tựa vuông cỡ m. Theo phần a), số các cách lát bảng tựa vuông là lẻ nếu nó là tựa vuông tốt và là chẵn nếu không. Mặt khác, dễ thấy bảng tựa vuông cỡ m nhận được là tựa vuông tốt khi và chỉ khi trong cách lát ban đầu có m quân đôminô nằm ngang phủ chính xác 2 cột thứ m và $m+1$. Khi bỏ đi m quân đôminô này ta thu được bảng bên trái là một bảng $m \times (m-1)$ (một bảng tựa vuông tốt cỡ m) và bảng bên phải là một bảng $m \times (n-m)$. Điều này cho thấy $f(m,n) \equiv f(m,m-1)f(m,n-m-1) \equiv f(m,n-m-1) \pmod 2$ (chú ý rằng $t(m,m-1) \equiv 1 \pmod 2$ do $m \times (m-1)$ là một bảng tựa vuông tốt cỡ m). Để ý rằng $(m+1,n+1) = (m+1,n-m)$ nên bằng qui nạp theo $n+m$ ta có khẳng định cần chứng minh.

Hết

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **ĐÁP ÁN OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2017**

CHỦ ĐỀ: SỐ HỌC

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

A. Phương trình nghiệm nguyên Markov

Bài PT.1. Nhận xét rằng mọi hoán vị của một bộ Markov cũng là một bộ Markov. Không mất tổng quát, ta giả sử (a, b, c) là một bộ Markov với $b = c$. Như vậy, $a^2 + 2b^2 = 3ab^2$. Ta suy ra $b^2 \mid a^2$, hay $b \mid a$. Đặt $a = kb$ với k là một số nguyên dương và thay vào phương trình đã cho ta thu được $k^2 + 2 = 3kb$. Suy ra $k \mid 2$ và do đó $k = 1$ hoặc $k = 2$. Trong cả hai trường hợp ta thu được$b = 1$. Ta thu được $a = 1$ nếu $k = 1$ và $a = 2$ nếu $k = 2$. Đảo lại, các bộ $(1, 1, 1)$ và $(2, 1, 1)$ rõ ràng là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài PT.2. Do $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc = 0$, ta suy ra a là một nghiệm của phương trình $x^2 - 3bcx + b^2 + c^2 = 0$. Theo công thức Viete, nghiệm còn lại là $3bc - a$ và $a(3bc - a) = b^2 + c^2$. Do a, b, c là các số nguyên $3bc - a$ cũng là một số nguyên. Mặt khác, do a, b, c là các số nguyên dương, $3bc - a = \frac{b^2+c^2}{a} > 0$. Chú ý rằng việc $3bc - a$ là nghiệm nguyên dương của $x^2 - 3bcx + b^2 + c$=0 cũng cho thấy $(3bc - a, b, c)$ là một bộ ba Markov. Các lập luận tương tự cũng cho thấy $3ac - b, 3ab - c$ là các số nguyên dương và $(a, 3bc - a, c), (a, b, 3ab - c)$ là các bộ ba Markov.

Bài PT.3. Rõ ràng $3ac - b = 2ac + ac - b \geq 2ac > a$. Tương tự, $3ab - c > a$. Đặt $f(x) = x^2 - 3bcx + b^2 + c^2$. Thế thì a và $3bc - a$ là 2 nghiệm của $f(x)$. Để ý rằng $f(b) = b^2 - 3b^2c + b^2 + c^2 = 2b^2(1 - c) + c(1 - bc) < 0$. Từ đó suy ra b nằm giữa hai nghiệm của $f(z)$. Thế nhưng ta biết rằng $b < a$. Suy ra $3bc - a < b < a$. Khẳng định được chứng minh.

Bài PT.4. Kí hiệu (a_n, m_n, b_n) là bộ ba ngoài cùng bên trái của dòng thứ n. Ta có $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1, m_1 = 1, m_2 = 2$. Với mọi $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1}, m_n = 3a_{n-1}m_{n-1} - b_{n-1}, b_n = m_{n-1}$. Điều này chứng tỏ $a_1 = a_2 = \cdots = 1$, $b_n = m_{n-1}$ và m_n được cho bởi quan hệ truy hồi: $m_1 = 1, m_2 = 2,$

$$m_n = 3m_{n-1} - m_{n-2}, \quad \forall m \geq 3.$$

Từ đây, ta dễ dàng chỉ ra được rằng $m_n = F_{2n+1}$, trong đó (F_n) là dãy Fibonacci quen thuộc: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.

Bài PT.5. Giả sử (a, m, b) là một bộ Markov với m là thành phần lớn nhất. Ta sẽ chỉ ra bằng qui nạp theo m rằng đúng 1 trong 2 bộ $(a, \underline{m}, b)$, $(b, \underline{m}, a)$ xuất hiện, và xuất hiện đúng 1 lần (nếu hai bộ này khác nhau), trên cây Markov. Trường hợp $m = 1$ là hiển nhiên vì khi đó $(a, \underline{m}, b) = (1, \underline{1}, 1)$. Ngoài ra, nếu a, b, m không phân biệt thì ta biết rằng $(a, m, b) = (1, 1, 1)$ hoặc $(1, 2, 1)$ và khẳng định cũng dễ dàng được kiểm chứng. Giả sử a, m, b đôi một phân biệt. Không mất tổng quát, giả sử $a < b < m$. Ta biết rằng $(a, b, 3ab - m)$ là một bộ Markov với $m' = \max(a, b, 3ab - m) = b$. và $m' < m$. Theo giả thiết qui nạp, duy nhất một hoán vị của nó xuất hiện trên cây Markov và xuất hiện đúng 1 lần. Nói cách khác, hoặc $(a, \underline{b}, 3ab - m)$ hoặc $(3ab - m, \underline{b}, a)$ xuất hiện trên cây Markov. Thế nhưng theo xây dưng nếu $(a, \underline{b}, 3ab - m)$ xuất hiện thì các bộ $(a, 3ab-(3ab-m) = \underline{m}, b)$ và $(b, \underline{3b(3ab - m) - a}, 3ab-m)$ được viết ở dòng kế tiếp còn nếu $(3ab - m, \underline{b}, a)$ xuất hiện thì các bộ $(3ab - m, \underline{3(3ab - m)b - a}, b)$, $(b, \underline{m}, a)$ được viết ở dòng tiếp theo. Điều này chứng tỏ một trong hai bộ $(a, \underline{m}, b)$ hoặc $(b, \underline{m}, a)$ xuất hiện trong cây Markov. Cuối cùng, nếu $(a, \underline{m}, b)$ và $(b, \underline{m}, a)$ cùng xuất hiện trên cây Markov ở 2 vị trí nào đó thì theo xây dựng, 2 bộ tương ứng ở trên chúng đều là $(a, \underline{b}, 3ab - m)$, nói cách khác, bộ này xuất hiện 2 lần trên cây Markov. Ta có điều mâu thuẫn trừ phi cả 2 bộ $(a, \underline{m}, b)$, $(b, \underline{m}, a)$ chính là 2 bộ được sinh ra từ bộ $(a, \underline{b}, 3ab - m)$. Điều này xảy ra chỉ khi $(a, \underline{m}, b) = (1, \underline{5}, 2)$. Thế nhưng lưu ý rằng trong trường hợp này thì trong 2 bộ $(1, \underline{5}, 2)$ và $(2, \underline{5}, 1)$ chỉ duy nhất bộ đầu tiên nằm trên cây Markov. Bài toán được chứng minh.

B. Một số tính chất của các số Markov

Bài PT.6. a) Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ ta suy ra mọi ước nguyên tố của c phải là ước của $a^2 + b^2$. Chú ý rằng $(a, b) = 1$. Ta biết rằng khi đó một ước nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ luôn $\equiv 1 \pmod 4$. Chú ý rằng lập luận này cho thấy mọi ước nguyên tố lẻ (do đó mọi ước lẻ) của c là$1 \pmod 4$, ngay cả khi c là một số chẵn.

b) Đặt $c = 2^k s$ với $k \geq 1$ và $2 \nmid s$. Theo chứng minh trên, $s \equiv 1 \pmod 4$. Như vậy, $c = 2^k(4t + 1)$ $(t \geq 0)$. Mặt khác, do $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$, ta suy ra $a \equiv b \pmod 2$. Thế nhưng, do $(a, b) = 1$, ta phải có a, b là các số lẻ. Từ đây, bằng cách áp dụng câu trên cho a, b thay vì c, ta suy ra $a \equiv b \equiv 1 \pmod 4$. Vậy $a = 4u + 1, b = 4v + 1$ và do đó phương trình ban đầu có thể được viết lại thành

$$(4u + 1)^2 + (4v + 1)^2 + 2^{2k}(4t + 1)^2 = 3 \cdot 2^k(4u + 1)(4v + 1)(4t + 1).$$

Trước hết, bằng cách xét modulo 4 ta suy ra $k = 1$. Như vậy, đẳng thức trên trở thành

$$(4u + 1)^2 + (4v + 1)^2 + 4(4t + 1)^2 = 6(4u + 1)(4v + 1)(4t + 1).$$

Hay, một cách tương đương, sau khi rút gọn,

$$t\,(8t + 4 - 3(4u + 1)(4v + 1)) = 2(6uv + u - u^2 + v - v^2).$$

Chú ý rằng $8t+4-3(4u+1)(4v+1)$ là một số lẻ còn $6uv+u-u^2+v-v^2 = 6uv+u(1-u)+v(1-v)$ là một số chẵn. Từ đó suy ra $4 \mid t$ và vì thế $c = 2(4t+1) \equiv 2 \pmod{32}$.

Bài PT.7. Thật vậy, ta biết rằng, modulo một hoán vị, (a,b,c) xuất hiện tại một dòng thứ n nào đó trong cây Markov. Gọi (a',b',c') (theo một thứ tự nào đó) là bộ của dòng thứ $n-1$ nằm trên (a,b,c). Từ định nghĩa, 2 bộ (a',b',c') và (a,b,c) trùng nhau 2 thành phần còn thành phần còn lại của chúng sai khác nhau bởi 3 lần tích của 2 thành phần còn lại. Điều này cho thấy a,b,c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi a',b',c' đôi một nguyên tố cùng nhau. Để kết thúc, ta chỉ cần lập luận bằng qui nạp theo n (hay theo $\max(a,b,c)$) và lưu ý rằng với $n=1$ thì $(a,b,c)=(1,1,1)$ và khẳng định là tầm thường.

Bài PT.8. Nếu 2 trong 3 số a,b,c bằng nhau thì $c=1$ hoặc $c=2$ và ta có điều phải chứng minh vì các bộ $(1,1,1)$ và $(1,2,1)$ có các số lớn nhất tương ứng bằng $1,2$. Giả sử a,b,c đôi một khác nhau. Nếu $c>a,b$ thì khẳng định là tầm thường. Giả sử c là số lớn thứ hai trong bộ Markov, không mất tổng quát, giả sử $a>c>b$. Thế thì bộ Markov nằm ở trên nó, nói cách khác, bộ $(3bc-a,c,b)$ có $c=\max(3bc-a,c,b)$.

Cuối cùng, ta giả sử c là số nhỏ nhất và không giảm tổng quát, giả sử $a>b>c$. Thế thì, đi dọc lên theo cây Markov, do số lớn nhất giảm thực sự, đến một lúc nào đó c sẽ trở thành phần tử lớn thứ 2 của một bộ Markov nào đó rồi trở thành phần tử lớn nhất của bộ Markov ở dòng ngay trên đó. Thật vậy, giả sử ngược lại, c luôn là phần tử nhỏ nhất. Thế thì khi tới dòng thứ 3 với bộ duy nhất $(1,5,2)$ ta suy ra $c=1$. Nhưng trong trường hợp này ta cũng có điều phải chứng minh.

Bài PT.9. a) Ta có

$$\begin{aligned}(aa'-bb')(ab'-a'b) &= a'b'(a^2+b^2)-ab(a'^2+b'^2)\\ &= a'b'(3ab-c^2)-ab(3a'b'-c^2)=c^2(ab-a'b').\end{aligned}$$

Trước hết, giả sử $ab-a'b'=0$. Thế thì hoặc $aa'=bb'$ hoặc $ab'=a'b$. Giả sử $aa'=bb'$. Do $(a,b)=(a',b')=1$, ta suy ra $a \mid b'$ và $b' \mid a$ và vì vậy $a=b'$, cũng như $b=a'$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $ab'=a'b$ thì ta suy ra $a=a', b=b'$, mâu thuẫn.

Vậy, $ab-a'b' \neq 0$. Gọi d là một ước của c. Ta sẽ chỉ ra rằng d không thể đồng thời là ước của $aa'-bb'$ và $ab'-a'b$ được. Giả sử ngược lại, $aa' \equiv bb' \pmod d$ và $ab' \equiv a'b \pmod d$. Suy ra $a^2a'b' \equiv b^2a'b' \pmod d$, hay $d \mid (a^2-b^2)a'b'$. Chú ý rằng $(d,a'b')=1$ do $(c,a')=(c,b')=1$. Từ đó suy ra $d \mid a^2-b^2$. Thế nhưng, do $d \mid c$, ta có $d \mid a^2+b^2=c(3ab-c)$. Từ đó, $d \mid 2b^2$. Lại vẫn do $(b,c)=1$, ta suy ra $d \mid 2$ và vì thế $d=1$. Điều này chứng tỏ $(aa'-bb', ab'-a'b, c)=1$ và ta suy ra điều cần chứng minh.

b) Giả sử p là số nguyên tố lẻ k nguyên dương và $(a,b,p^k),(a',b',p^k)$ là hai bộ Markov khác nhau (modulo hoán vị) sao cho p^k là số lớn nhất trong mỗi bộ. Điều này có nghĩa là $(a,b) \neq (a',b')$ và $(a,b) \neq (b',a')$. Theo câu trên, ta có thể tìm được m,n nguyên tố cùng nhau $mn=p^k$ để $m^2 \mid (aa'-bb'), n^2 \mid (ab'-a'b)$. Do p nguyên tố, ta có $m=1, n=p^k$ hoặc $n=1, m=p^k$. Vậy, hoặc $p^{2k} \mid (aa'-bb')$ hoặc $p^{2k} \mid (ab'-a'b)$. Do $a,a',b,b' \le p^k$ ta suy ra hoặc $aa' - bb' = 0$ hoặc $ab' - a'b = 0$. Điều này, như chứng minh ở bài toán trên cho thấy, hoặc $(a, b) = (a', b')$ hoặc $(a, b) = (b', a')$, mâu thuẫn.

Chương 5

Đáp án đề đề xuất môn Đại số

1 Ma trận

Bài 1.1. Trường hợp ma trận B khả nghịch:

$$\det(A+B) = \det\Big((AB^{-1}+I)B\Big) = \det B \det\Big(AB^{-1}+I\Big)$$

B giao hoán với A do đó B^{-1} cũng giao hoán với A.
A lũy linh suy ra $X = AB^{-1}$ cũng luy linh, do đó đa thức đặc trưng

$$P_X(\lambda) = \det(X-\lambda I) = (-\lambda)^n \Rightarrow \det(AB^{-1}+I) = P_X(-1) = 1.$$

Trường hợp ma trận B không khả nghịch, ta có $\det(B) = 0$.
Với mọi số tự nhiên khác $k \neq 0$, xét ma trận $B_k = B - \dfrac{1}{k}I$,
B_k giao hoán với A và tồn tại N sao cho B_k khả nghịch với mọi $k \geq N$, do đó

$$\det(A+B_k) = \det B_k,\ \forall k \geq N.$$

Sử dụng tính chất liên tục của định thức ta được:

$$\det(A+B) = \lim_{k\to\infty} \det(A+B_k) = \lim_{k\to\infty} \det B_k = \det B.$$

Bài 1.2. a) Ta có $ABAB = 9AB$.
b) $2 = r(AB) = r(9AB) = r(ABAB) \leq r(BA) \leq 2$.
Ma trận BA vuông cấp 2 có $r(BA) = 2$, do đó khả nghịch.
c) $ABAB = 9AB \Rightarrow B(ABAB)A = B(9AB)A \Rightarrow (BA)(BA)(BA) = 9(BA)(BA)$.
Sử dụng tính khả nghịch của ma trận BA và đẳng thức trên suy ra $BA = 9I_2$.

Bài 1.3. Ta có $A = I + B$, với $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Tính cụ thể ta được: $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ và $B^n = 0$ với mọi $n \geq 3$. Suy ra

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2n & n \\ -n & n^2 - n + 1 & -\dfrac{n(n-1)}{2} \\ -2n & 2n(n-1) & -n^2 + n + 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 1.4. Dễ dàng thấy rằng nếu $AB = BA$ thì bất đẳng thức trên có dấu $'' ='' $. Gọi T là ma trận trực giao sao cho $T^{-1}AT = \widetilde{A}$ là ma trận chéo. Đặt $\widetilde{B} = T^{-1}BT$ (không chắc là ma trận chéo). Ta có
$\operatorname{tr}\left(\widetilde{A}^2\widetilde{B}^2\right) = \operatorname{tr}\left(T^{-1}A^2B^2T\right) = \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right);$
$\operatorname{tr}\left(\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{A}\widetilde{B}\right) = \operatorname{tr}\left(T^{-1}ABABT\right) = \operatorname{tr}\left(ABAB\right);$
$\operatorname{tr}\left(\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{A}\widetilde{B}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ii}b_{ij}a_{jj}b_{ji} = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ii}^2$ (Vì $\widetilde{B}$ đối xứng, $\widetilde{A}$ là ma trận chéo).
$\operatorname{tr}\left(\widetilde{A}^2\widetilde{B}^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ij}b_{ji} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ij}^2 = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2)b_{ij}^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ii}^2$
$\Rightarrow \operatorname{tr}\left(\widetilde{A}^2\widetilde{B}^2\right) - \operatorname{tr}\left(\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{A}\widetilde{B}\right) = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2 - 2a_{ii}a_{jj})b_{ij}^2 = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 \geq 0.$
Dấu $'' ='' \Leftrightarrow (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 = 0; \forall i < j \Leftrightarrow a_{ii}b_{ij} = b_{ij}a_{jj}; \forall i < j \Leftrightarrow \widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{B}\widetilde{A} \Leftrightarrow AB = BA.$

Bài 1.5. Gọi A là ma trận đường chéo có định thức bằng 2020.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 202 \end{bmatrix}$$

Xét 3 vector độc lập tuyến tính bất kỳ

$$\vec{u}_1 = (1;1;1), \vec{u}_2 = (-2;1;l), \vec{u}_3 = (0;1;-1)$$

và trực chuẩn hóa ta được

$$\vec{w}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}), \vec{w}_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}), \vec{w}_3 = (0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Đặt ma trận P là

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$P^tAP = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{205}{2} & -\frac{199}{2} \\ -1 & -\frac{199}{2} & \frac{205}{2} \end{bmatrix}$$

thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1.6. Có $2^n - 1$ cách chọn dòng thứ nhất khác dòng 0. Có $2^n - 2$ cách chọn dòng thứ hai trừ dòng 0 và dòng thứ nhất. Tổng quát, ta có $2^n - 2^{i-1}$ cách chọn dòng thứ i độc lập với các dòng trước. Do đó có

$$(2^n - 1)(2^n - 2)\left(2^n - 2^2\right)\cdots\left(2^n - 2^{n-1}\right)$$

ma trận khả nghịch cấp n mà các phần tử của nó chỉ gồm 0 hoặc 1. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.7. Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì phương trình được cho là:

$$X^{2017} + 2016X = 2017A. \tag{1}$$

Giả sử X là một nghiệm của phương trình đã cho. Chúng ta cần sử dụng hai không gian con của $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sau đây

$$\begin{aligned} M &= \{c_0I + c_1A + c_2A^2 \mid c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}, \\ N &= \{c_0I + c_1X + c_2X^2 \mid c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Chúng ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

và hệ $\{I, A, A^2\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Như vậy M là một không gian con ba chiều của $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Đa thức đặc trưng của X là đa thức bậc 3 có dạng

$$P_X(\lambda) = \det(X - \lambda I) = -\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Do $P_X(X) = 0$ nên ta suy ra X^3 là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{I, X, X^2\}$. Bằng quy nạp ta chỉ ra được $X^k, k \geq 3$ đều là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{I, X, X^2\}$. Suy ra $A = 2017^{-1}(X^{2017} + 2016X), A^2 = 2017^{-2}(X^{2017} + 2016X)^2$ là các tổ hợp tuyến tính của hệ $\{I, X, X^2\}$. Như vậy $A, A^2 \in N$ và ta suy ra được rằng $M \subset N$ nên $\dim N \geqslant \dim M = 3$. Vì N là không gian con của $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ có hệ sinh là $\{I, X, X^2\}$ nên $\dim N \leqslant 3$. Kết hợp các phân tích đã được đưa ra ta khẳng định được $\dim N = 3$ và $M = N$. Do $X \in N = M$ nên ta suy ra rằng tồn tại các hệ số $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ để

$$X = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2. \tag{2}$$

Do I, A, A^2 là ba ma trận đường chéo nên X cũng là ma trận đường chéo:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Thế (3) vào (1) ta thu được đẳng thức

$$\begin{pmatrix} f(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2017 & 0 & 0 \\ 0 & -2017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó $f(x)$ là hàm số $f(x) = x^{2017} + 2016x$. Cân bằng các phần tử trên hai ma trận ở hai vế, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1^{2017} + 2016x_1 &= 2017 \\ x_2^{2017} + 2016x_2 &= -2017 \\ x_3^{2017} + 2016x_3 &= 0 \end{cases}$$

Do $f(x)$ đồng biến nên chúng ta chỉ ra được $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$. Như vậy phương trình (1) có duy nhất một nghiệm

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.8. a) Giả sử A là ma trận tam giác trên, xét các ma trận tam giác trên $X \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó $AX = XA \Leftrightarrow (AX)_{ij} = (XA)_{ij}$, với mọi $i \leq j$. Chuyển vế ta được hệ thuần nhất có $\frac{n^2+n}{2}$ ẩn là $(X)_{ij}$ $(i \leq j)$ và $\frac{n^2+n}{2}$ phương trình. Tuy nhiên, có n phương trình ứng với vị trí trên đường chéo luôn đúng ($(AX)_{ii} = (A)_{ii}(X)_{ii} = (XA)_{ii}$). Vậy nghiệm của hệ phụ thuộc ít nhất n tham số nên $dim\ C(A) \geq n$.

b) Chọn A là ma trận chéo $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, với $\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j$.
Khi đó, với $X \in M_n(\mathbb{R})$,

$$AX = XA \Leftrightarrow (AX)_{ij} = (XA)_{ij} \Leftrightarrow \lambda_i (X)_{ij} = \lambda_j (X)_{ij} \Leftrightarrow \begin{cases} (X)_{ij} = 0,\ \forall i \neq j, \\ (X)_{ii}\ \text{ tùy ý }. \end{cases}$$

Vậy $C(A)$ là tập các ma trận chéo và $dim\ C(A) = n$. □

Bài 1.9. Giả sử $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. Do

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}([A\ B]) = \dim(\text{Im}[A\ B]) = \dim(\text{Im}A) + \dim(\text{Im}B) - \dim(\text{Im}A \cap \text{Im}B)$$

nên $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - c$. Tương tự

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - d.$$

Từ đó $c = d = 0$.
Ngược lại, giả sử $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$. Khi đó $A = C_1 R_1$ và $B = C_2 R_2$ với $\text{rank}(A) = \text{rank}(C_1) = \text{rank}(R_1)$, $\text{rank}(B) = \text{rank}(C_2) = \text{rank}(R_2)$. Suy ra

$$A + B = C_1 R_1 + C_2 R_2 = [C_1\ C_2] \begin{bmatrix} C_2 \\ R_2 \end{bmatrix} := CR.$$

Do $c = 0$ nên các cột của C là độc lập tuyến tính nên C khả nghịch trái, $LC = I$. Kết hợp với giả thiết $d = 0$ ta có

$$\text{rank}(A+B) = \text{rank}(CR) \geq \text{rank}(LCR) = \text{rank}(R) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - d \geq \text{rank}(A+B) - d.$$

Suy ra kết quả.

Bài 1.10. Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \quad 0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2n} = y_1 & (1) \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2n} = y_2 & (2) \\ -x_1 - x_2 + 0x_3 + x_4 + \cdots + x_{2n} = y_3 & (3) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + \cdots + x_{2n} = y_4 & (4) \\ \cdots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - \cdots + 0x_{2n} = y_{2n} & (2n) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2) - (3) + (4) - \cdots + (2n)$ ta được phương trình

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2n} = y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - \cdots + y_{2n} \quad (*)$$

Ta lấy $(1)-(*), (2n)+(*)$ và $(*)-(i), i = 2, 3, ..., 2n-1$. Sau một số tính toán đơn giản, ta được kết quả

$$\begin{cases} x_1 = 0y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + \cdots - y_{2n} \\ x_2 = y_1 + 0y_2 - y_3 + y_4 - \cdots + y_{2n} \\ x_3 = y_1 + y_2 + 0y_3 - y_4 + \cdots - y_{2n} \\ x_4 = y_1 - y_2 + y_3 + 0y_4 - \cdots + y_{2n} \\ \dots \\ x_{2n} = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + \cdots - y_{2n-1} + 0y_{2n} \end{cases}$$

Do đó ta có ma trận nghịch đảo cần tìm là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 1.11. a) Tính toán trực tiếp.
b) Đặt $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$, suy ra $A = SBS^{-1}$. Do đó

$$A^n = SB^nS^{-1}.$$

Mặt khác $B^n = \begin{pmatrix} cos\frac{n\pi}{6} + sin\frac{n\pi}{6} & -2sin\frac{n\pi}{6} \\ sin\frac{n\pi}{6} & cos\frac{n\pi}{6} - sin\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$. Thay $n = 2017$, ta được $A^{2017} = A$.

Bài 1.12. Xét ma trận $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $JA = B$. Do đó $BA^{-1} = J$ và $A^{-1}B = A^{-1}JA$. Vậy $rank(A^{-1}B) = rank(J) = n-1$.

Bài 1.13. Với mọi $i = 1, \cdots, k$, do $A_iA_i \neq 0$, nên tồn tại v_{t_i} (là véc tơ cột thứ t_i của A_i) sao cho $A_iv_{t_i} \neq 0$ và $A_jv_i = 0$.

Hơn nữa, với mọi $j \neq i$, do $A_jA_i = 0$ nên $A_jv_{t_i} = 0$. Ta có thể chứng minh hệ véc tơ $\{v_{t_1}, \cdots, v_{t_k}\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 1.14. Chọn B=A thì $\det(2018A) = (1 + 2017^n)\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$. Giả sử $A \neq O$ có $\det(A) = 0$, khi đó tồn tại cột $A_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Chọn B có các cột $(B_1, B_2, ..., B_{i-1}, -\frac{A_i}{2017}, B_{i+1}, ..., B_n)$ sao cho $\det(B) \neq 0$. Nhưng ta lại có $\det(A + 2017B) = 0 = 2017^n \det(B)$ nên mâu thuẫn. Vậy $A = O$.

Bài 1.15. Không. Giả sử $A^2 + A^T = E$ ta có $A = (E - A^2)^T = E - (A^T)^2 = 2A^2 - A^4$, từ đó $A^4 - 2A^2 + A = 0$. Đa thức $h(x) = x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2 + x - 1)$ (chia hết cho đa thức đặc trưng) có nghiệm là $0,\ 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, tập các nghiệm này chứa các trị riêng của A. Vì $Trace(A) = 0$ nên tổng các trị riêng bằng 0, mặt khác $Trace(A^2) = Trace(E - A^T) = Trace(E) = 3$. Có thể kiểm tra với các trị riêng ma trận có thể nhận không thể thỏa mãn đồng thời các điều kiện của $Trace$.

Bài 1.16. Do $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R})$ là ma trận đối xứng, có định thức khác không nên ma trận A có hai giá trị riêng thực khác không là α, β. Do A chéo hóa được nên tồn tại ma trận khả nghịch C sao cho

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} C.$$

Do đó $\forall n \geq 0$ ta có:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^n = C \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} C^{-1} = \alpha^n C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} + \beta^n C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Đặt $P = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$ và $Q = C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.17. Đa thức đặc trưng của A là $P_A(t) = (t-1)^2$. Theo định lý Cayley - Hamilton ta có đẳng thức $(A + I)^2 = 0$. Chia đa thức $f(x) = x^{2017} + 4x$ cho đa thức $(x+1)^2$ ta được $f(x) = x^{2017} + 4x = (x+1)^2 q(x) - 2021x - 2026$. Do đó $f(A) = -2021A - 2025I = \begin{pmatrix} -4047 & -8084 \\ 2021 & 4037 \end{pmatrix}$.

Bài 1.18. 1) Kiểm tra S là không gian véc tơ con của $Mat(2017, \mathbb{R})$ do đó nó là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$.
2) Xét ánh xạ $f : Mat(2017, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mà gửi mỗi ma trận A vuông cấp n thành $tr(A)$ vết của nó. Khi đó dễ kiểm tra được f là một toàn cấu tuyến tính trên $\mathbb{R}$ và $Ker(f) = S$. Áp dụng định lý số chiều của ánh xạ tuyến tính giữa các không gian véc tơ hữu hạn chiều ta có:

$$dim(S) = dim(Ker(f)) = dim(Mat(2017, \mathbb{R})) - dim\mathbb{R} = (2017)^2 - 1.$$

Bài 1.19. Ta biết rằng: Với ma trận M có giá trị riêng là λ và đa thức $q(x)$ thì ma trận $q(M)$ có giá trị riêng là $q(\lambda)$. Vết của một ma trận là tổng tất cả các giá trị riêng của nó. Ma trận thực đối xứng thì tất cả các giá trị riêng đều là số thực. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ là các giá trị riêng thực của A (tính cả bội), thì các giá trị riêng của A^k và A^{k+1} lần lượt là $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ và $\lambda_1^{k+1}, \lambda_2^{k+1}, \cdots, \lambda_n^{k+1}$. Ký hiệu $k = 2l, l \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(A^k) &= \operatorname{trace}(A^{2l}) = \lambda_1^{2l} + \lambda_2^{2l} + \cdots + \lambda_n^{2l} := a, \\ \operatorname{trace}(A^{k+1}) &= \operatorname{trace}(A^{2l+1}) = \lambda_1^{2l+1} + \lambda_2^{2l+1} + \cdots + \lambda_n^{2l+1} := b. \end{aligned}$$

Rõ ràng $a \geqslant 0$, nên ta có thể đặt $a = a_1^{2l}$. Từ giả thiết $[\operatorname{trace}(A^k)]^{k+1} = [\operatorname{trace}(A^{k+1})]^k$ ta suy ra $a^{2l+1} = b^{2l}$, nên $(a_1^{2l})^{2l+1} = (a_1^{2l+1})^{2l} = b^{2l}$, do đó $b = \pm a_1^{2l+1} = (\pm a_1)^{2l+1}$ và $a = a_1^{2l} = (\pm a_1)^{2l}$. Như thế với $c := \pm a_1$ ta được

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(A^k) &= \operatorname{trace}(A^{2l}) = \lambda_1^{2l} + \lambda_2^{2l} + \cdots + \lambda_n^{2l} = c^{2l}, \\ \operatorname{trace}(A^{k+1}) &= \operatorname{trace}(A^{2l+1}) = \lambda_1^{2l+1} + \lambda_2^{2l+1} + \cdots + \lambda_n^{2l+1} = c^{2l+1}. \end{aligned}$$

Đến đây có 2 khả năng:
+) $c = 0$, khi đó $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, dẫn tới $\operatorname{trace}(A) = 0$ và đa thức đặc trưng của A là $P_A(\lambda) = \lambda^n$. Theo định lý Cayley-Hamilton ta được

$$O_n = A^n = \operatorname{trace}(A)A^{n-1}.$$

+) $c \neq 0$, khi đó với $x_i := \dfrac{\lambda_i}{c}, (i = 1, 2, ..., n)$ ta được

$$\begin{aligned} x_1^{2l} + x_2^{2l} + \cdots + x_n^{2l} &= 1, \\ x_1^{2l+1} + x_2^{2l+1} + \cdots + x_n^{2l+1} &= 1. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức thứ nhất suy ra $|x_i| \leqslant 1, (i = 1, 2, ..., n)$. Chú ý rằng với $|x| \leqslant 1$ thì $x^{2l} \geqslant x^{2l+1}$, dấu $(=)$ xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$. Kết hợp với đẳng thức thứ hai ta suy ra phải có một giá trị x_i nào đó bằng 1, còn lại các giá trị x_i khác đều bằng 0 (ta coi $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$).
Lúc đó $\lambda_1 = c, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, nên $\operatorname{trace}(A) = c$ và đa thức đặc trưng của A là $P_A(\lambda) = (\lambda - c)\lambda^{n-1}$. Theo định lý Cayley-Hamilton ta được

$$O_n = (A - cI_n)A^{n-1}, \quad \text{dẫn tới} \quad A^n = cA^{n-1} = \operatorname{trace}(A)A^{n-1}.$$

Nếu k là số nguyên dương lẻ thì kết luận trên không đúng nữa. Có thể lấy ví dụ sau

$$k = 1, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bài 1.20. Gọi $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$ là các giá trị riêng của B và $\alpha \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của $A+B$, còn $v \neq \theta$ là vector riêng của $A+B$ ứng với giá trị riêng α. Khi đó $(A+B)v = \alpha v$, nên $Bv = (\alpha I_n - A)v$, dẫn đến

$$(B - \mu_k I_n)v = [(\alpha - \mu_k)I_n - A]v \ , (\forall k = 1, 2, ..., n)$$

Chú ý $AB = BA$ ta được $(B - \mu_1 I_n)v = [(\alpha - \mu_1)I_n - A]$, dẫn đến

$$\begin{aligned}(B - \mu_2 I_n)(B - \mu_1 I_n)v &= (B - \mu_2 I_n)[(\alpha - \mu_1)I_n - A]v \\ &= [(\alpha - \mu_1)I_n - A](B - \mu_2 I_n)v \\ &= [(\alpha - \mu_1)I_n - A][(\alpha - \mu_2)I_n - A]v\end{aligned}$$

Cứ tiếp tục làm như thế, cuối cùng ta được

$$(B - \mu_n I_n)\cdots(B - \mu_2 I_n)(B - \mu_1 I_n)v = Cv$$

với $C := [(\alpha - \mu_1)I_n - A][(\alpha - \mu_2)I_n - A]\cdots[(\alpha - \mu_n)I_n - A]$. Nhưng $(B - \mu_n I_n)\cdots(B - \mu_2 I_n)(B - \mu_1 I_n) = P_B(\mu_1)P_B(\mu_2)\cdots P_B(\mu_n) = O_n$ với $P_B(\mu)$ là đa thức đặc trưng của B, nên hệ thuần nhất $Cx = \theta$ có nghiệm không tầm thường $v \neq \theta$. Suy ra $\det(C) = 0$. Do đó tồn tại ít nhất một giá trị $k \in \{1, 2, ..., n\}$ để $0 = \det[A - (\alpha - \mu_k)I_n] = (-1)^n \det[(\alpha - \mu_k)I_n - A]$, dẫn tới $\det[A - (\alpha - \mu_k)I_n] = 0$, nên $(\alpha - \mu_k) := \lambda_k$ là giá trị riêng của A. Vậy ta có biểu diễn $\alpha = \lambda_k + \mu_k = \lambda + \mu$.

Bài 1.21. Ta thấy rằng ma trận A lũy đẳng ($A^2 = A$) với $\operatorname{rank}(A) = r \geqslant 1$ thì nó chỉ có giá trị riêng là 0 và 1, đồng thời nó chéo hóa được và ta có biểu diễn

$$\begin{aligned}A &= T^{-1}\operatorname{diag}\{\underbrace{1, 1, ..., 1}_{r}, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-r}\}T = T^{-1}\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}T \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)}\end{bmatrix}T := BC\end{aligned}$$

trong đó $B = T^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)}\end{bmatrix}T, CB = I_r$ và rõ ràng là $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$.

Ngược lại, giả sử có $B_{n\times r}, C_{r\times n}, \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$ để $A = BC, CB = I_r$ thì ta thấy ngay $A^2 = (BC)(BC) = B(CB)C = BI_rC = BC = A$. Sau cùng, với $A^2 = A$ ta có

$$\begin{aligned}
\det(I_n + A) &= \det(T^{-1}T + T^{-1}\mathrm{diag}\{\underbrace{1,1,...,1}_{r},\underbrace{0,0,...,0}_{n-r}\}T) \\
&= \det[T^{-1}(I_n + \mathrm{diag}\{\underbrace{1,1,...,1}_{r},\underbrace{0,0,...,0}_{n-r}\})T] \\
&= \det[\mathrm{diag}\{\underbrace{2,2,...,2}_{r},\underbrace{1,1,...,1}_{n-r}\}] = 2^r \\
\det(2I_n - A) &= \det(2T^{-1}T - T^{-1}\mathrm{diag}\{\underbrace{1,1,...,1}_{r},\underbrace{0,0,...,0}_{n-r}\}T) \\
&= \det[T^{-1}(2I_n - \mathrm{diag}\{\underbrace{1,1,...,1}_{r},\underbrace{0,0,...,0}_{n-r}\})T] \\
&= \det[\mathrm{diag}\{\underbrace{1,1,...,1}_{r},\underbrace{2,2,...,2}_{n-r}\}] = 2^{n-r}
\end{aligned}$$

Bài 1.22. Ta sẽ chứng tỏ rằng $aI_n + bA + cB + dAB = O_n \quad (*)$ khi và chỉ khi $a = b = c = d = 0$. Trước tiên nhân $(*)$ với A về bên trái ta có $aA + bA^2 + cAB + dAAB = O_n$ và do $AB = -BA$ nên $aA + bA^2 - cBA - dABA = O_n$ hay $(aI_n + bA - cB - dAB)A = O_n$. Đến đây do có A^{-1} ta suy ra $aI_n + bA - cB - dAB = O_n$. Phối hợp với $(*)$ ta dẫn đến $aI_n + bA = O_n$ và $O_n = cB + dAB = (cI_n + dA)B \Rightarrow O_n = (cI_n + dA)BB^{-1} = cI_n + dA$. Do đó ta suy ra $a = b = c = d = 0$. Thật vậy, chẳng hạn giả sử $aI_n + bA = O_n$ mà $b \neq 0$ thì $A = -\frac{a}{b}I_n$. Khi đó $O_n = AB + BA = -\frac{a}{b}B \Rightarrow O_n = -\frac{a}{b}BB^{-1} = -\frac{a}{b}I_n \Rightarrow a = 0$, nên ta được $bA = O_n \Rightarrow O_n = bAA^{-1} = bI_n \Rightarrow b = 0$ (mâu thuẫn!)

Bài 1.23. Ta sẽ chứng minh hệ phương trình tuyến tính $(I_n + A + B)x = \theta$ chỉ có nghiệm tầm thường $x = \theta$, do đó ma trận $I_n + A + B$ khả nghịch. Gọi $x \in \mathbb{R}^n$ là vector sao cho $(I_n + A + B)x = \theta$, tức là $(A + I_n)x = -Bx$. Khi đó $B(A + I_n)x = -B^2x$ hay $(A + I_n)Bx = -B^2x$ (do $AB = BA$). Dẫn đến $(A+I_n)^2x = B^2x$. Bằng quy nạp ta dễ dàng có $(A+I_n)^kx = (-1)^kB^kx, \forall k \in \mathbb{N}$. Nói riêng, ta có $A^{17}x = I_nx$ hay $(A^{17} - I_n)x = \theta$ và $(A + I_n)^{16}x = B^{16}x = I_nx$ hay $[(A+I_n)^{16} - I_n]x = \theta$. Xét các đa thức $p(t) = t^{17} - 1$ và $q(t) = (t+1)^{16} - 1$. Từ kết quả trên ta dẫn đến $p(A)x = \theta$ và $q(A)x = \theta$. Mặt khác

$$\begin{aligned}
&p(t) = (t-1)(t^{16} + t^{15} + \cdots + t + 1) \\
&q(t) = [(t+1)^8 + 1][(t+1)^4 + 1][(t+1)^2 + 1](t+2)t
\end{aligned}$$

nên 2 đa thức $p(t)$ và $q(t)$ nguyên tố cùng nhau (không có nhân tử chung). Theo thuật toán Euclide tồn tại 2 đa thức $r(t)$ và $s(t)$ khác hằng số (có bậc ít nhất bằng 1) sao cho $r(t)p(t) - s(t)q(t) = 1$. Suy ra

$$I_n = r(A)p(A) - s(A)q(A)$$
$$x = I_n x = r(A)p(A)x - s(A)q(A)x = \theta$$

Vậy $x = \theta$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.24. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$. Đặt ma trận B hoàn toàn xác định như sau

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ta có} \quad B^t = -B,\ A = B + \lambda I_n.$$

Từ đó $A^t = (B + \lambda I_n)^t = B^t + \lambda I_n = -B + \lambda I_n = -(B - \lambda I_n)$. Suy ra

$$\det(A) = \det(A^t) = \det[-(B - \lambda I_n)] = (-1)^n \det(B - \lambda I_n) = -\det(B - \lambda I_n), \text{(do } n \text{ lẻ)}$$
$$= -P_B(\lambda), \text{(với } P_B(\lambda) \text{ là đa thức đặc trưng của ma trận } B).$$

Vậy $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow P_B(\lambda) \neq 0$, hay hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi λ không phải là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_B(\lambda)$ của ma trận B (tức λ không phải là giá trị riêng của ma trận B).
Ta chứng tỏ ma trận phản đối xứng B nếu có giá trị riêng thực thì chỉ có thể là giá trị bằng 0. Thật vậy, giả sử λ là giá trị riêng thực của ma trận phản đối xứng B, gọi $v = [v_1, v_2, ..., v_n]^t \neq \theta$ là vector riêng tương ứng với λ. Ta có $Bv = \lambda v$, do đó

$$< Bv, v > =< \lambda v, v >= \lambda < v, v >= \lambda(v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2) = \lambda\|v\|^2$$
$$< Bv, v > =< v, B^t v >=< v, -Bv >=< v, -\lambda v >= -\lambda < v, v >= -\lambda\|v\|^2.$$

Suy ra $2\lambda\|v\|^2 = 0$, từ đó $\lambda = 0$ (vì $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 > 0$). Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\lambda \neq 0$.

Bài 1.25. Ta thấy rằng các ma trận A, B có các phần tử là số nguyên nên $\det(A), \det(B)$ và tất cả các định thức con của A, B là những số nguyên. Hơn nữa

$$\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

nên $\det(A) = \det(B) = \pm 1$. Suy ra tồn tại $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.
Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$M^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AB,\ k \in \mathbb{N}$$

Do đó

$$BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}M^kA = \cdots = (A^{-1}MA)^k = C^k.$$

Bài 1.26. Ta có

$$\begin{aligned}
[A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} &= [A^{-1}(B^{-1} - A)(B^{-1} - A)^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} \\
&= [(A^{-1}B^{-1} - I_n)(B^{-1} - A)^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} \\
&= [A^{-1}B^{-1}(B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} \\
&= (B^{-1} - A)BA = A - ABA \\
&= A(I_n - BA) = (I_n - AB)A.
\end{aligned}$$

Bài 1.27. Lấy các ma trận

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix},\ S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix},$$
$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix},\ T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được $M = S^{-1}NS$ và $P = T^{-1}QT$. Vậy các ma trận M, N đồng dạng và các ma trận P, Q đồng dạng.

Bài 1.28. Từ bất đẳng thức Sylvester về hạng của ma trận $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leqslant \operatorname{rank}(AB) + n$ ta có $2\operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(A^2) + n$. Với giải thiết $A^2 = O_n$ của đề bài ta suy ra $2\operatorname{rank}(A) \leqslant n$ nên $\operatorname{rank}(A) \leqslant \frac{n}{2}$. Tương tự ta được $\operatorname{rank}(B) \leqslant \frac{n}{2}$. Từ đây lại theo bất đẳng thức Sylvester về hạng của ma trận $\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ và do $A + B$ khả nghịch ta được $n = \operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. Do đó $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \frac{n}{2}$ và n phải là số chẵn. Ta có $A(AB)^k = A^2(AB)^{k-1}B = O_n$ và $B^2(AB)^k = O_n$. Dẫn tới

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}[(AB)^{k+1}] &= \operatorname{rank}[(AB)(AB)^k] = \operatorname{rank}[(AB)(AB)^k + B^2(AB)^k] \\
&= \operatorname{rank}[(A + B)B(AB)^k] = \operatorname{rank}[B(AB)^k] \\
&= \operatorname{rank}[A(AB)^k + B(AB)^k] = \operatorname{rank}[(A + B)(AB)^k] = \operatorname{rank}[(AB)^k].
\end{aligned}$$

Như vậy $\operatorname{rank}[(AB)^k] = \operatorname{rank}[(AB)^{k-1}] = \cdots = \operatorname{rank}[(AB)^2] = \operatorname{rank}(AB)$.

Bây giờ ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB) &= \operatorname{rank}(A^2) + \operatorname{rank}(AB) \geqslant \operatorname{rank}(A^2 + AB)\\ &= \operatorname{rank}[A(A+B)] = \operatorname{rank}(A) = \frac{n}{2},\\ \operatorname{rank}(AB) &\leqslant \operatorname{rank}(A) = \frac{n}{2}. \quad \text{Vậy} \quad \operatorname{rank}(AB)^k = \frac{n}{2}, \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Bài 1.29. Với ma trận $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ có $\det(X) = 1, \operatorname{trace}(X) = a \in \mathbb{Z}$ ta dễ dàng chứng tỏ được $X^2 - aX + I_2 = O_2$, dẫn đến $X^4 - X^2 - 2I_2 = (a^3 - 3a)X - a^2 I_2$. Suy ra $\operatorname{trace}(X^4 - X^2 - 2I_2) = (a^3 - 3a).\operatorname{trace}(X) - a^2.\operatorname{trace}(I_2) = a^4 - 5a^2$. Từ điều kiện đề bài ta suy ra

$$(X_1^4 - X_1^2 - 2I_2) + (X_2^4 - X_2^2 - 2I_2) + \cdots + (X_9^4 - X_9^2 - 2I_2) = O_2$$

Gọi $\operatorname{trace}(A_k) = a_k \in \mathbb{Z},\ (k = 1, 2, ..., 9)$. Khi đó ta có

$$\operatorname{trace}(X_1^4 - X_1^2 - 2I_2) + \operatorname{trace}(X_2^4 - X_2^2 - 2I_2) + \cdots + \operatorname{trace}(X_9^4 - X_9^2 - 2I_2) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{9}(a_k^4 - 5a_k^2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{9}(4a_k^4 - 20a_k^2 + 25) = 225 \ \Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{9}(2a_k^2 - 5)^2 = 225.$$

Bây giờ ta tìm cách viết số 225 thành tổng của 9 số chính phương dạng có $(2a_k^2 - 5)^2$, với a_k là số nguyên. Vì $(2a^2 - 5)$ tăng theo $|a|$, nên ta suy ra với $|a_k| \geqslant 4$ không thỏa mãn, bởi vì $(2.0^2 - 5)^2 = 25,\ [2(\pm 1)^2 - 5]^2 = 9,\ [2(\pm 2)^2 - 5)]^2 = 9,\ [2(\pm 3)^2 - 5]^2 = 169,\quad [2(\pm 4)^2 - 5]^2 = 729 > 225.$
Trường hợp $a_k = \pm 3$ không thỏa mãn, vì lúc đó (225-169=56) không thể viết thành tổng của 8 số dạng $(2.0^2 - 5)^2 = 25$ hoặc $[2.(\pm 1)^2 - 5)^2 = [2.(\pm 2)^2 - 5)^2 = 9$. Như thế ta chỉ có thể chọn $a_k = 0,\ a_k = \pm 1,\ a_k = \pm 2$ mà thôi.
Nếu có $a_k = 0$, thì $(2a_k^2 - 5)^2 = 25$. Lúc đó (225-25=200) có thể viết thành tổng của 8 số dạng $(2.0^2 - 5)^2 = 25$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Nếu có $a_k = \pm 1$ hoặc $a_k = \pm 2$, thì $(2a_k^2 - 5)^2 = 9$. Lúc đó (225-9=216) không thể viết thành tổng của 8 số dạng $(2.0^2 - 5)^2 = 25$ hoặc $[2.(\pm 1)^2 - 5)^2 = [2.(\pm 2)^2 - 5)^2 = 9$, vì tổng của 8 số có dạng như vậy nhiều nhất chỉ là 200 mà thôi. Vậy ta được $a_k = 0,\ (\forall k = 1, 2, ..., 9)$. Đến đây ta ký hiệu các ma trận cần tìm là $M_k = \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ z_k & -x_k \end{bmatrix}$, $(\forall k = 1, 2, ..., 9)$. Lúc đó $\operatorname{trace}(M_k) = 0$ và $\det(M_k) = -x_k^2 - y_k z_k = 1$ hay $x_k^2 + y_k z_k + 1 = 0$.
Vấn đề còn lại là ta phải giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + yz + 1 = 0$. Phương trình này có vô số nghiệm, vì với $yz = -(x^2 + 1)$ ta chọn x là số nguyên tùy ý rồi phân tích $-(x^2 + 1)$ thành tích của 2 số nguyên (có thể có một số bằng 1) là được.

Bài 1.30. Từ nhận xét $A\left(A^{-1}-\lambda I\right)=I-\lambda A=-\lambda\left(A-\dfrac{1}{\lambda}I\right)$.

Áp dụng tính chất, định thức của tích các ma trận không suy biến sẽ bằng tích của các định thức đó, từ đó ta sẽ thu được $\det\left[A\left(A^{-1}-\lambda I\right)\right]=\det(A)\left[\det(A^{-1}-\lambda I)\right]=\det(A^{-1}-\lambda I)$

Mặt khác ta có $\det\left\{(-\lambda)\left(A-\frac{1}{\lambda}I\right)\right\}=(-\lambda)^n\det\left(A-\frac{1}{\lambda}I\right)=(-1)^n\lambda^nP\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.31. Thực hiện các phép toán trên các ma trận đã cho ta sẽ thu được:

$$A^3=\begin{pmatrix}1&3&6&\cdots&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&3&\cdots&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&1&\cdots&\frac{(n-2)(n-1)}{2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^4=\begin{pmatrix}\beta_1^4&0&\cdots&0&0\\0&\beta_2^4&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\beta_{n-1}^4&0\\0&0&\cdots&0&\beta_n^4\end{pmatrix}$$

$$C^{n-1}=\begin{pmatrix}1&C_{n-1}^2&0&\cdots&C_{n-1}^{n-1}\\0&1&C_{n-1}^1&\cdots&C_{n-1}^{n-2}\\0&0&1&\cdots&C_{n-1}^{n-3}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&C_{n-1}^1\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

Từ đó ta sẽ suy ra ma trận cần chứng minh theo phương pháp cộng các ma trận cùng cỡ

Bài 1.32. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1, & (1)\\x_2+\cdots+x_n=y_2 & (2)\\\cdots\\x_{n-1}+x_n=y_{n-1} & (n-1)\\x_n=y_n & (n)\end{cases}$$

Đặt $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

Khi đó, hệ phương trình trên được viết lại là

$$AX = B \text{ hay } X = A^{-1}B.$$

Từ hệ phương trình đã cho, ta có

$$\begin{array}{rcl} (1)-(2) & : & x_1 = y_1 - y_2 \\ (2)-(3) & : & x_2 = y_2 - y_3 \\ & & ..... \\ (n-1)-(n) & : & x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \end{array}$$

Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = x_1 \\ y_2 - y_3 = x_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} - y_n = x_{n-1} \\ y_n = x_n \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = x_1 \\ y_2 - y_3 = x_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} - y_n = x_{n-1} \\ y_n = x_n \end{cases} \qquad (*)$$

Đặt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ (*) được viết lại là

$$CB = X.$$

Suy ra

$$X = A^{-1}B = CB, \forall B.$$

Vậy

$$A^{-1} = C.$$

Bài 1.33. Ta có $A = I_3 + C$ với

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ k \geq 3.$$

I và C giao hoan nên

$$\begin{aligned} A^{2017} &= \sum_{k=0}^{2017} (I+C)^k = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k C^k I^{2017-k} \\ &= C_{2017}^0 I + C_{2017}^1 C + C_{2017}^2 C^2 + \left(C_{2017}^3 + C_{2017}^4 + ... + C_{2017}^{2017}\right) C^3. \end{aligned}$$

Tính

$$C_{2017}^3 + C_{2017}^4 + ... + C_{2017}^{2017} = 2^{2017} - C_{2017}^0 - C_{2017}^1 - C_{2017}^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned} b_{21} &= -4C_{2017}^1 - 2C_{2017}^2 + 10\left(2^{2017} - C_{2017}^0 - C_{2017}^1 - C_{2017}^2\right) \\ &= 10.2^{2017} - 14C_{2017}^1 - 12C_{2017}^2 - 10 < 10.2^{2017} - 14C_{2017}^1 - 12C_{2017}^2. \end{aligned}$$

Bài 1.34. Ta có $(A+xB)^n = A^n + xD_1 + x^2D_2 + \cdots + x^{n-1}D_{n-1} + x^nB^n$ trong đó $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ là các ma trận không phụ thuộc vào x. Chú ý rằng $C_i^n = 0$ với mọi $i = 1, \cdots, n+1$ (do chỉ số lũy linh không vượt quá cấp của ma trận).
Lấy $i, j = 1, 2, \cdots, n$ tùy ý. Giả sử $a, d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}, b$ là phần tử hàng i cột j tương ứng của các ma trận $A^n, D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}, B^n$
Xét đa thức $P(x) = a + d_1x + d_2x^2 + ... + d_{n-1}x^{n-1} + bx^n$ có ít nhất $n+1$ nghiệm phân biệt $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ (vì bậc của ma trận lũy linh luôn không vượt quá n). Do đó $P(x) = 0$ hay các hệ số $a = d_1 = \cdots = d_{n-1} = b = 0$. Vì cách lấy i, j bất kỳ nên:
Suy ra $A^n = B^n = \theta$ tức là A, B lũy linh.

Bài 1.35. Ta có: $A^{2017} = \theta \Rightarrow detA = 0$

$$A + B = AB \Leftrightarrow A = (A - E)\,B \Rightarrow detA = det\,(A - E)\,.detB$$

$\Rightarrow detB.det\left(A-E\right)=0.$

Ta lại có:

$A^{2017}=\theta \Leftrightarrow A^{2017}-E^{2017}=-E \Leftrightarrow (A-E)\left(A^{2016}+A^{2015}+...+A+E\right)=-E.$

$\Rightarrow det\left(A-E\right).det\left(A^{2016}+A^{2015}+...+A+E\right)=(-1)^n \Rightarrow det\left(A-E\right)\neq 0.$

Từ đó: $detB=0$ dẫn tới không khả nghịch

2 Định thức

Bài 2.1. Cộng đồng thời cột 2, cột 3 vào cột 1 và đặt nhân tử chung ra ngoài, ta được định thức:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & c & a\\ 1 & a & b\end{vmatrix}$$

Lần lượt lấy hàng 2, hàng 3 trừ đi hàng 1, định thức thu được có dạng

$$(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & c-b & a-c\\ 0 & a-b & b-c\end{vmatrix}$$

Khai triển định thức theo cột 1:

$$\left|A\right|=(a+b+c)[-(b-c)^2-(a-b)(a-c)]=-(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)].$$

A là ma trận cấp 3, được lập từ các nghiệm trên, sao cho mỗi nghiệm chỉ xuất hiện đúng một lần trên mỗi hàng và mỗi cột của A, vậy A có dạng sau:

$$(-1)^k\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$$

Sử dụng kết quả của phần a), khi đó

$$\left|A\right|=-(x_1+x_2+x_3)[(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)]$$

Giải thiết cho x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $x^3+x^2-3x+q=0$, theo Viet phương trình bậc 3, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3\end{cases}$$

Thay vào $\left|A\right|$, ta được:

$\left|A\right| = -(-1)[(-1)^2 - 3(-3)] = 10 \vdots 10$ (đpcm).

Bài 2.2. Đa thức đặc trưng của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + C_1(-\lambda)^{n-1} + C_2(-\lambda)^{n-2} + ... + C_n,$$

trong đó C_k là tổng tất cả các định thức con chính bậc k của A . Đặc biệt $C_n = \det(A)$, $C_1 = \mathrm{Tr}(A) = 2017$. Vì hạng $r(A) = 1$ do đó $C_k = 0$ với mọi $k \geq 2$. Vậy

$$\begin{aligned} &P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + 2017(-\lambda)^{n-1} \\ &\Rightarrow \det(A + I) = P_A(-1) = (1)^n + 2017(1)^{n-1} = 2018 \end{aligned}$$

Bài 2.3. Biểu diễn

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

Đối với D_1, lấy cột 1 nhân với $(-b)$ cộng vào cột 2, sau đó lấy cột 2 nhân với $(-b)$ cộng vào cột 3, ..., đến cột cuối cùng. Do đó

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = a^n$$

và $D_2 = b\Delta_{n-1}$. Vậy $\Delta_n = a^n + b\Delta_{n-1}$. Bằng phương pháp quy nạp, chúng ta chứng minh rằng

$$\Delta_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Bài 2.4. Dễ dàng chứng minh được $A = B^2$ trong đó B là cấp 2017 và

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gọi B_n là định thức cấp n của ma trận có dạng như trên. Khai triển theo hàng thứ nhất ta phân tích ra được tổng hai định thức của 2 ma trận trong đó có 1 ma trận có định thức bằng 0, rồi khai triển tiếp ma trận còn lại ta được

$$B_n = -B_{n-2}$$

Có $B_1 = 0$ nên $B_{2017} = 0$. Do đó $\det A = 0$.

Bài 2.5. Ta có, φ_A khả nghịch (hay đẳng cấu) khi và chỉ khi $Det(\varphi_A) \neq 0$. Vì $\varphi_A(I) = 0 = \varphi_A(0)$ nên φ_A không là đơn cấu và do đó không đẳng cấu. Từ đó, suy ra $Det(\varphi_A) = 0$.

Bài 2.6. Gọi $B, C, D \in M_n(\mathbb{Z})$ xác định như sau:

$$(B)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } j \mid i, \\ 0 \text{ nếu } j \nmid i, \end{cases}$$

(B là ma trận tam giác dưới với các phần tử thuộc đường chéo chính là 1),

$$(C)_{ij} = \begin{cases} i \text{ nếu } i = j, \\ 0 \text{ nếu } i \neq j, \end{cases}$$

(C là ma trận đường chéo với các phần tử thuộc đường chéo chính là 1, 2, ..., n),

$$(D)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i \mid j, \\ 0 \text{ nếu } i \nmid j, \end{cases}$$

(D là ma trận tam giác trên với các phần tử thuộc đường chéo chính là 1).
Khi đó, ta có:

$$(BCD)_{ij} = \sum_{k,l} (B)_{ik}(C)_{kl}(D)_{lj} = \sum_{k} k(B)_{ik}(D)_{kj} = \sum_{k|i,k|j} k = (A)_{ij}.$$

Do đó $\det A = \det B.\det C.\det D = n!$. □

Bài 2.7. a) Nhật xét rằng $X_n = X_{n-1} - X_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$ và ta có quy luật

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
X_n	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	...
$(-1)^n X_n$	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	...

Từ đó, do $2017 \equiv 1 (\text{mod } 6)$ nên $X_{2017} = 1$.

b) Cũng theo bảng trên, xét từ $n = 2$ trở đi, tại các cặp giá trị $(m, m+1)$, $m \equiv 3 (\text{mod } 6)$, hoặc $(m, m+1)$, $m \equiv 0 (\text{mod } 6)$, thì $(-1)^m X_m + (-1)^{m+1} X_{m+1} = 0$. Hơn nữa, do $2017 = 6.336 + 1$ nên tổng đã cho bằng giá trị tại $n = 1$ và bằng -1.

Bài 2.8. Tính toán trực tiếp định thức bên trái ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = (xb + xc + xd + bc + bd + cd) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Định thức bên phải là định thức Vandemonde. Từ đó biện luận suy ra nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 2.9. Ký hiệu phần bù đại số của mỗi phần tử trong D là $A_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$. Xét định thức

$$D(z) = \begin{vmatrix} a_1 + z & x + z & x + z & \cdots & x + z \\ y + z & a_2 + z & x + z & \cdots & x + z \\ y + z & y + z & a_3 + z & \cdots & x + z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y + z & y + z & y + z & \cdots & a_n + z \end{vmatrix}.$$

Khai triển đa tuyến tính định thức $D(z)$, ta có

$$D(z) = D + z \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ij} = D + zB, \quad B := \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ij}.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} D(-x) &= D - xB = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x) \\ D(-y) &= D - yB = (a_1 - y)(a_2 - y) \cdots (a_n - y) \end{aligned}$$

Suy ra

$$D = \frac{x(a_1 - y)(a_2 - y) \cdots (a_n - y) - y(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x)}{x - y}$$

Bài 2.10. Ta sẽ giải quyết bài toán tổng quát: Cho $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ và $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0$ với mọi số thực x, y.

Thật vậy, xét $f(t) = \det(A+tB) = \det B.t^3 + at^2 + bt + \det A = at^2 + bt$.

Nhận thấy $\operatorname{degf}(t) \leq 2$ nhưng có 3 nghiệm phân biệt $0, 1, -1$ nên $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

- Với $x = y = 0$ thì hiển nhiên $\det(xA+yB) = 0$.
- Với $x = 0, y \neq 0$ thì $\det(xA+yB) = y^3 \det B = 0$.
- Với $x \neq 0, y = 0$ thì $\det(xA+yB) = x^3 \det A = 0$.
- Với $x, y \neq 0$ ta có $\det(xA+yB) = x^3 \det\left(A + \dfrac{y}{x}B\right) = x^3 f\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$.

Vậy $\det(xA+yB) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Áp dụng vào bài toán, với $x = 2017; y = 1995$ thì $\det(2017A + 1995B) = 0$.

Bài 2.11. Áp dụng công thức $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ ta có

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \dfrac{m}{p}C_{m-1}^{p-1} & \dfrac{m}{p+1}C_m^p & ... & \dfrac{m}{p+n}C_{m-1}^{p+n-1} \\ \dfrac{m+1}{p}C_m^{p-1} & \dfrac{m+1}{p}C_m^p & ... & \dfrac{m+1}{p+n}C_m^{p+n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{m+n}{p}C_{m+n-1}^{p-1} & \dfrac{m+n}{p+1}C_{m+n-1}^p & ... & \dfrac{m+n}{p+n}C_{m+n-1}^{p+n-1} \end{vmatrix}.$$

Rút m từ hàng 1, $m+1$ từ hàng $2 \cdots$, $m+n$ từ hàng $n+1$.

Rút $\dfrac{1}{p}$ từ cột 1, $\dfrac{1}{p+1}$ từ cột 2, $\cdots$, $\dfrac{1}{p+n}$ từ cột $n+1$.

Ta có:

$$D_{n+1} = \frac{m.(n+1)...(m+n)}{p.(p+1)...(p+n)}.\begin{vmatrix} C_{m-1}^{p-1} & C_m^p & ... & C_{m-1}^{p+n-1} \\ C_m^{p-1} & C_m^p & ... & C_m^{p+n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ C_{m+n-1}^{p-1} & C_{m+n-1}^p & ... & C_{m+n-1}^{p+n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{C_{m+n}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}}.\begin{vmatrix} C_{m-1}^{p-1} & C_m^p & ... & C_{m-1}^{p+n-1} \\ C_m^{p-1} & C_m^p & ... & C_m^{p+n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ C_{m+n-1}^{p-1} & C_{m+n-1}^p & ... & C_{m+n-1}^{p+n-1} \end{vmatrix}.$$

Lặp lại tiến trình trên p lần ta có:

$$D_{n+1} = \frac{C_{m+n}^{n+1}.C_{m+n-1}^{n+1}...C_{m+n-p+1}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}.C_{p+n-1}^{n+1}...C_{n+1}^{n+1}}.\begin{vmatrix} C_{m-p}^{0} & C_{m-p}^{1} & \dots & C_{m-p}^{n} \\ C_{m-p+1}^{0} & C_{m-p+1}^{1} & \dots & C_{m-p+1}^{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m-p+n}^{0} & C_{m-p+n}^{1} & \dots & C_{m-p+n}^{n} \end{vmatrix}$$

Tiếp tục thực hiện phép biến đổi, ta có kết quả $D_{n+1} = \dfrac{C_{m+n}^{n+1}.C_{m+n-1}^{n+1}...C_{m+n-p+1}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}.C_{p+n-1}^{n+1}...C_{n+1}^{n+1}}$.

3 Hệ phương trình

Bài 3.1. Ta có $AA^T = A^TA = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_3, a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, trong đó A là ma trận hệ số của hệ đã cho là A_i nên ta có $A^{-1} = \frac{A^T}{\det(AA^T)}$ từ đó tìm được nghiệm.

Bài 3.2. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)\,x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22}-1)\,x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + (2a_{nn}-1)\,x_n = 0 \end{cases}$$

Gọi ma trận con chính cấp $i(i = 1, \cdots, n$ của ma trận hệ số đã cho là A_i. Khi đó, ta có

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \cdots & 2a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & 2a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

Do a_{ij} là các số nguyên nên các phần bù đại số của $(A_n)_{ij}$ cũng là các số nguyên. Khi đó, nếu khai triển định thức trên theo dòng cuối ta có

$$\det A_n = 2k + (2a_{nn}-1)\det A_{n-1} = 2k + 2a_{nn}\det A_{n-1} - \det A_{n-1}$$

Suy ra

$$\det A_n = 2l - \det A_{n-1},$$

hay

$$\det A_n + \det A_{n-1} = 2l$$

là số chẵn

Suy ra $\det A_n, \det A_{n-1}$ cùng tính chẵn lẻ với mọi n.

Mà $\det A_1 = 2a_{11} - 1$ là số lẻ nên $\det A_n$ là số lẻ nên $\det A_n \neq 0$. Do đó, hệ trên là hệ Gramer và có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.

Bài 3.3. Với $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, gọi $X = [x_{ij}]_n$, đặt $m(X) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2$. Trước tiên ta chứng minh rằng với $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thì $m(XY) \leqslant m(X)m(Y)$. Thật vậy, coi $XY = Z = [z_{ij}]_n$. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$z_{ij}^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2\Big).$$

Lấy tổng theo j ta được

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2\Big)\\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\cdot m(Y).\end{aligned}$$

Lại lấy tổng theo i ta được

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\cdot m(Y) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\cdot m(Y) = m(X)m(Y).$$

Áp dụng điều vừa chứng minh ta có $[m(A)]^k \geqslant m(A^k) = m(N) = 1$. Đến đây do $m(A) \geqslant 0$ ta suy ra $m(A) \geqslant 1$.

4 Không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính

Bài 4.1. Đặt các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

và

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

Gọi F là ma trận của ánh xạ tuyến tính cần tìm, khi đó $FA = B$ hay $F = B.A^{-1}$. Mà

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Nên

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 4.2. Ta có ma trận biểu diễn của D theo cơ sở S là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng $f_D(x) = f_A(x) = (-x)^n = (-1)^n x^n$. Đa thức cực tiểu của D có dạng $m_D(x) = x^k$ với $1 \leq k \leq n$. Chú ý rằng $A^k \neq 0$ với $1 \leq k \leq n$. Do đó đa thức cực tiểu của D là $m_D(x) = x^n$.

Bài 4.3. Giả sử tồn tại ánh xạ F. Ta lựa chọn một cơ sở $\{A_1, A_2, A_2, A_4\}$ của $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ gồm 3 ma trận đối xứng thực và một ma trận phản đối xứng:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta ký hiệu ma trận của F trên cơ sở $\{A_1, A_2, A_2, A_4\}$ là U. Khi đó ma trận tương ứng của F^2 chính là U^2. Tính toán trực tiếp ta có: $F^2(A_1) = 9A_1,\ F^2(A_2) = 9A_2,\ F^2(A_3) = 9A_3, F^2(A_4) = -A_4$. Do đó ma trận của F^2 trên $\{A_1, A_2, A_2, A_4\}$ là

$$U^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta suy ra $(\det U)^2 = -9^3 < 0$. Điều này là vô lý vì $\det U$ là một số thực. Như vậy không tồn tại ánh xạ F để $F^2(A) = 4A + 5A^T,\ \ \forall\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Bài 4.4. Nếu $k \geqslant 3$ thì ta sẽ chỉ ra hợp thành $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ trùng với hợp thành của $(k-1)$ không gian con. Từ đó có thể chuyển dần bài toán về trường hợp $k = 2$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng một trong hai khẳng định sau là khẳng định đúng

i) $M_1 \subset M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$.

ii) $M_2 \subset M_1 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$.

Thật vậy, nếu cả hai khẳng định đều sai thì tồn tại $x \in M_1$, $x \notin M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$ và $y \in M_2$, $y \notin M_1 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. Giả sử $\lambda \neq 0$ và ta xét phần tử $u = x + \lambda y$. Nếu $u \in M_1$ thì từ M_1 là một không gian con chúng ta suy ra $y = \lambda^{-1}(u - x)$ cũng thuộc M_1, nhưng điều này mâu thuẫn với $y \notin M_1 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. Từ đó ta khẳng định được rằng $u \notin M_1$. Phân tích tương tự ta cũng có $u \notin M_2$. Vì $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ là một không gian con nên từ $x \in M_1, y \in M_2$ ta suy ra $u \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Kết hợp với $u \notin M_1$, $u \notin M_2$ ta thu được $u = x + \lambda y \in M_3 \cup \ldots \cup M_k$ với mỗi $\lambda \neq 0$. Nói riêng dãy $x + y, x + 2y, \ldots, x + (k-1)y$ nằm trong $M_3 \cup \ldots \cup M_k$. Suy ra có một không gian con $M_i, 3 \leqslant i \leqslant k$ chứa hai phần tử phân biệt $x + \alpha y, x + \beta y$ của dãy này và ta thu được $y \in M_i$. Như điều này mâu thuẫn với $y \notin M_1 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. Nếu (i) xảy ra thì $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k = M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. Nếu (ii) xảy ra thì $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k = M_1 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. Trong cả hai trường hợp, ta quy được bài toán về trường hợp $(k-1)$ không gian con.
Sau $(k-2)$ bước ta quy về xét trường hợp $k = 2$. Trong trường hợp này nếu $M_1 \not\subset M_2$ thì ta sẽ chứng minh $M_2 \subset M_1$. Thật vậy do $M_1 \not\subset M_2$ nên tồn tại $x \in M_1 \setminus M_2$. Lấy $y \in M_2$ tùy ý. Vì $M_1 \cup M_2$ là không gian con nên $x + y \in M_1 \cup M_2$. Nếu $x + y \in M_2$ thì $x = (x+y) - y$ là phần tử của M_2 và điều này trái với $x \in M_1 \setminus M_2$. Bởi vậy $x + y \in M_1$ và ta suy ra $y = (x+y) - x \in M_1$. Do đó $M_2 \subset M_1$.

Bài 4.5. a) Xét ánh xạ tuyến tính $\bar{f} : U \to V$, $\bar{f} = f|_U$, tức là $\bar{f}(u) = f(u)$ với mọi $u \in U$. Do đó $f(U) = \bar{f}(U) = \mathrm{Im}\bar{f}$ và $\ker \bar{f} = \ker f \cap U$, và như vậy

$$\dim f(U) = \dim \mathrm{Im}\bar{f}, \quad \dim \ker \bar{f} \leq \dim \ker f.$$

Mặt khác, ta có

$$\dim \mathrm{Im}\bar{f} + \dim \ker \bar{f} = \dim U.$$

Suy ra,

$$\dim f(U) = \dim U - \dim \ker \bar{f} \leq \dim U$$

và

$$\dim f(U) = \dim U - \dim \ker \bar{f} \geq \dim U - \dim \ker f.$$

b) Đặt $U' = f^{-1}(U)$, nên $f(U') = U$. Theo kết quả của 1), ta có

$$\dim U' - \dim \ker f \leq \dim f(U') \leq \dim U'.$$

Suy ra,

$$\dim f^{-1}(U) - \dim\ker f \leq \dim U \leq \dim f^{-1}(U).$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.6. Đặt $dim(V) = n$ và $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là cơ sở chính tắc của V. Đặt $\mathbb{B}' = \{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ và giả sử $k = rank(\mathbb{B}')$ là hạng của hệ véctơ $\mathbb{B}'$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$\mathbb{C} = \{f(e_1) = v_1, ..., f(e_k) = v_k\}$$

là hệ k véctơ độc lập tuyến tính tối đại của $\mathbb{B}'$. Bổ sung thêm các véctơ $\{v_{k+1}, ..., v_n\}$ sao cho $\mathbb{C}' = \{v_1, ..., v_n\}$ là cơ sở của V.
Xét tương ứng $v_j \mapsto e_j$ với $j = 1, ..., n$; tương ứng này xác định một đẳng cấu $g : V \longrightarrow V$ thoả mãn $g(v_j) = e_j$. Ta sẽ chứng minh $f = fgf$.
Thật vậy, với $j = 1, ..., k$ ta có $f(g(f(e_j))) = f(g(v_j)) = f(e_j)$. Với $j = k + 1, ..., n$, đặt

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{k} r_{ij} f(e_i)$$

trong đó r_{ij} là các số thực với mọi $j = k + 1, ..., n$ và $i = 1, ..., k$.
Khi đó với $j = k + 1, ..., n$,

$$f(g(f(e_j)) = f(g(\sum_{i=1}^{k} r_{ij} f(e_i))) = \sum_{i=1}^{k} r_{ij} f(g(f(e_i))) = \sum_{i=1}^{k} r_{ij} f(e_i) = f(e_j).$$

Vậy tính chất $fgf = f$ đúng trên cơ sở $\mathbb{B}$. Do đó $f(g(f(v))) = f(v)$ với mọi $v \in V$, tức là $f = fgf$ với $g \in S$ là một đẳng cấu.

Bài 4.7. Quy nạp theo k, không giảm tổng quát giả sử $\{f_1, ..., f_k\}$ độc lập tuyến tính.
Chứng minh với $k = 1$. Giả sử $f_1(x) \equiv 0$ thì $f(x) \equiv 0$. Lấy $e \notin \ker f_1$ (luôn có vì giả thiết f_1 đltt, f_1 không thể là ánh xạ θ) thì với mọi vector $v \in V$ ta có $v = w + \alpha e$ với $w \in \ker f_1, \alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(v) = \alpha f(e)$, mặt khác $f_1(v) = \alpha f_1(e)$, từ đó ta thấy

$$f(v) = \frac{f(e)}{f_1(e)} f_1(v).$$

Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$. Ta chứng minh đúng với $n = k$. Vì f_k đltt với $f_1, ..., f_{k-1}$ nên theo gt quy nạp tồn tại $a_k \in V$ sao cho

$$f_1(a_k) = ... = f_{k-1}(a_{k-1}) = 0$$

và $f_k(a_k) \neq 0$. Chuẩn hóa, giả sử $f_k(a_k) = 1$. Tương tự ta chọn được các vector $a_1, ..., a_{k-1}$ thỏa

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Với x bất kỳ ta có

$$f_i(x - f_1(x)a_1 - f_2(x)a_2 - ... - f_k(x)a_k) = f_i(x) - \sum_{j=1}^{k} f_j(x) f_i(a_j)$$
$$= f_i(x) - f_i(x) f_i(a_i) = 0$$

với mọi $i = 1, ..., k$. Từ giả thiết suy ra

$$f(x - f_1(x)a_1 - f_2(x)a_2 - ... - f_k(x)a_k) = 0 = f(x) - \sum_{i=1}^{k} f_i(x) f(a_i)$$

hay f biểu diễn tuyến tính qua $f_1, .., f_k$.

Bài 4.8. Từ khai triển Taylor của hàm $\exp(2tx)$ và hàm $\exp(-x^2)$

$$\left[1 + 2tx + \frac{2^2t^2x^2}{2!} + \frac{2^3t^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{2^nt^nx^n}{n!} + \cdots\right]\left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right] =$$

theo phương pháp nhân đa thức ta sẽ thu được:

$$a_0(t) = 1; a_1(t) = 2t; a_2(t) = 2t^2 - 2$$

$$a_3(t) = 8t^3 - 12t; a_4(t) = 16t^4 - 48t + 12; \cdots$$

Từ đó bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh được hệ thức:

$$a_{n+1}(t) - 2ta_n(t) + 2na_{n-1}(t) = 0$$

b) Sử dụng kết quả của câu a) ta sẽ thu được:

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{\left|\frac{n}{2}\right|} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2t)^{n-2k}$$

trong đó $\left|\dfrac{n}{2}\right|$ là phần nguyên của $\dfrac{n}{2}$

$$\Rightarrow a_{2k+1}(0) = 0; a_{2k}(0) = (-1)^k\frac{(2n)!}{n!}$$

Ta có nhận xét (chứng minh nhận xét này bằng phương pháp quy nạp) $(a_n(t))' = 2na_{n-1}(t)$

Từ đó ta sẽ suy ra: $\dfrac{d^m}{dx^m}(a_n(t)) = \dfrac{2^m n!}{(n-m)!}a_{n-m}(t); (\forall m < n, m, n \in \mathbb{N})$.

Bài 4.9. Ta có thể giả thiết $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\} \subset V$ độc lập tuyến tính, nếu không ta sẽ lấy hệ con độc lập tuyến tính đại số của nó gồm m vector ($m < l$) ta sẽ chứng minh $k \leq l$.

Theo giả thiết, tồn tại các hệ số vô hướng a_{ij} mà mỗi α_i được biểu diễn

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\beta_j;\ (i = 1, ..., k)\,.$$

Xét tổ hợp tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\beta_j\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\lambda_i\right)\beta_j = 0$$

Do đó $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\} \subset V$ độc lập tuyến tính nên suy ra $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij}\lambda_i = 0$ với mỗi $j = 1, ..., l$.

Như vậy, ta có hệ phương trình thuần nhất gồm k ẩn và l phương trình. Giả sử $k > l$, khi đó hệ phương trình này có ẩn λ_i nào đó khác không, điều này trái với giả thiết $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 4.10. Chứng minh bằng quy nạp

+ $n = 1$, $\{x_1 \neq 0\}$ là độc lập tuyến tính

+ Giả sử $\{x_1, ..., x_k\}$ độc lập tuyến tính với $k \leq n - 1$. Ta chứng minh $\{x_1, ..., x_n\}$ độc lập tuyến tính

Xét tổ hợp tuyến tính $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) &= f(c_1x_1) + f\left(\sum_{i=2}^{n} c_i x_i\right)\\
&= c_1x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i f(x_i)\\
&= c_1x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i (x_i + x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=2}^{n} c_i x_{i-1} = 0.
\end{aligned}$$

Do $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ nên $\sum\limits_{i=2}^{n} c_i x_{i-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_{i+1} x_i = 0$. Theo giả thiết quy nạp suy ra

$$c_2 = ... = c_n = 0.c_2 = ... = c_n = 0.$$

Do đó $c_1 x_1 = 0$, suy ra $c_1 = 0$.

Vậy $\{x_1, ..., x_n\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 4.11. Giả sử có phương trình

$$a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{k-1} A^{k-1} = 0.$$

Khi đó, từ tính chất lũy linh của ma trận A nhân cả hai vế trên với ma trận A^{k-1} ta được $a_0 = 0$. Cho $a_0 = 0$ và thực hiện lại quá trình trên ta được các hệ số $a_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Do đó hệ các ma trận $\{I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}\}$ là độc lập tuyến tính. Vì vậy hệ các ma trận $\{I_n, I_n + A, I_n + A + A^2, ..., I_n + A + A^2 + ... + A^{k-1}\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

5 Giá trị riêng và véc tơ riêng

Bài 5.1. a) $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda)$
b) Ma trận A có 5 giá trị riêng phân biệt nên chéo hóa được, do đó tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho

$$C = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận B giao hoán với ma trận A khi và chỉ khi $D = P^-1BP$ giao hoán với C. Bằng cách thử trực tiếp có thể chứng minh được rằng D giao hoán với C khi và chỉ khi có dạng chéo

$$D = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 \end{bmatrix}$$

trong đó $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\ \mu_5$ là các số thực nào đó. Ta chỉ ra được rằng tồn tại duy nhất các số thực $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ sao cho $D = a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 +$

$a_3C^3 + a_4C^4$ bằng cách giải hệ Cramer

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 = \mu_1 \\ a_0 + 5a_1 + 5^2a_2 + 5^3a_3 + 5^4a_4 = \mu_2 \\ a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4 = \mu_3 \\ a_0 + (-2)a_1 + (-2)^2a_2 + (-2)^3a_3 + (-2)^4a_4 = \mu_4 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \mu_5 \end{cases}$$

với định thức ma trận hệ số là định thức Vandermonde. Từ đó suy ra $B = f(A)$, trong đó $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.

Bài 5.2. Do $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng phân biệt của A nên A chéo hóa được. Khi đó tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ là ma trận chéo. Ta có $A = PDP^{-1}$ và với mọi $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k\right) P^{-1}.$$

Đặt $A_1 = P\operatorname{diag}(1, 0, ...0) P^{-1}$, $A_2 = P\operatorname{diag}(0, 1, ...0) P^{-1}$,..,$A_n = P\operatorname{diag}(0, 0, ...1) P^{-1}$, thì ta có

$$A^k = \lambda_1^kA_1 + \lambda_2^kA_2 + \cdots + \lambda_n^kA_n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bài 5.3. Đa thức đặc trưng của ma trận A là $f_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^n$. Do đó, A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = -1$.

+ Với $\lambda = 1$, ta có hệ phương trình tương ứng là

$$\begin{cases} -x_1 + x_{2n} = 0 \\ -x_2 + x_{2n-1} = 0 \\ \dots \\ -x_n + x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Ta tìm được n véc tơ riêng là $v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, \dots 0, 1, 0)$, $\dots$, $v_n = (0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)$.

+ Với $\lambda = -1$, tương tự ta tìm được n véc tơ riêng khác là $u_1 = (-1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0, \dots 0, 1, 0)$, $\dots$, $u_n = (0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0)$. Do đó A chéo hóa được và ma trận P cần tìm có dạng

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

Bài 5.4. a) Do A đối xứng nên A có đủ n giá trị riêng thực (kể cả bội). Gọi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A. Đặt

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có thể kiểm tra được $B = VV^T$. Hiển nhiên B là nửa xác định dương.
b) Giả sử

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

là ma trận vuông đối xứng cấp 2 thỏa mãn bài toán. Khi đó đa thức đặc trưng của A có dạng $p_A(t) = t^2 - \mathrm{Trace}(A)t + \det(A)$. Theo giải thiết ta có $\mathrm{Trace}(A) = 0$ và $\det(A) = 3$, hay $a = -c$ và $b^2 - ac = 3$. Suy ra $b^2 + a^2 = 3$. Do a, b là các số hữu tỷ nên sau khi quy đồng mẫu số ta được $u^2 + v^2 = 3w^2$ với $u, v, w \in \mathbb{Z}$.
Một số chính phương luôn chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1. Từ đẳng thức trên suy ra cả u, v đều chia hết cho 3. Từ đó w cũng vậy. Nếu $u = 3u_1, v = 3v_1$ và $w = 3w_1$ thì ta được $u_1^2 + v_1^2 = 3w_1^2$ với $u_1, v_1, w_1 \in \mathbb{Z}$. Lập luận tương tự ta nhận được 3 dãy số vô hạn giảm nghiêm ngặt $u > u_1 > \ldots$

Bài 5.5. a) Ta thấy $A^3 = A + I_3$ tức là $A(A^2 - I_3) = I_3$. Do đó A khả nghịch và $A^{-1} = A^2 - I_3$. Đa thức đặc trưng $P(x)$ của A là một đa thức bậc 3, nên có 1 nghiệm thực, do đó A có một giá trị riêng thực. Ma trận A thỏa mãn $A^3 - A - I_3 = O_3$, nên A là nghiệm của đa thức $G(x) = x^3 - x - 1$. Hai đa thức $P(x)$ và $G(x)$ phải có ước chung, nên chúng có nghiệm chung. Bằng cách khảo sát hàm số $G(x)$ ta dễ dàng thấy $G(x)$ chỉ có 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức liên hợp. Ta thấy $G(1,3) < 0$ và $G(1,4) > 0$ nên nghiệm thực đó xấp xỉ bằng 1,3 hoặc 1,4. Vậy giá trị gần đúng của giá trị riêng thực của A là xấp xỉ bằng 1,3 hoặc 1,4.

b) Biết rằng nếu ma trận A có giá trị riêng λ thì với mọi đa thức $q(x)$, ma trận $q(A)$ có giá trị riêng $q(\lambda)$, do đó giá trị riêng của $A - I_3$ có giá trị riêng $\lambda - 1$. Ta lại biết $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$ với λ_i là các giá trị riêng của A (tính cả bội và tính cả giá trị riêng phức).

Trường hợp A có một giá trị riêng thực $\lambda_1 > 1$ với bội 3 thì $\det(A) = \lambda_1^3 > 0$, lúc đó giá trị riêng của $A - I_3$ là $\lambda_1 - 1 > 0$ với bội 3 và $\det(A - I_3) = (\lambda_1 - 1)^3 > 0$.

Trường hợp A có giá trị riêng thực $\lambda_1 > 1$ và 2 giá trị riêng phức liên hợp λ_2, λ_3 thì $\det(A) = \lambda_1\lambda_1\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_2} = \lambda_1|\lambda_2|^2 > 0$. Lúc đó giá trị riêng của $A - I_3$ là $\lambda_1 - 1 > 0$ và 2 giá trị riêng phức liên hợp $\lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1$ và $\det(A - I_3) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)\overline{(\lambda_2 - 1)} = (\lambda_1 - 1)|(\lambda_2 - 1)|^2 > 0$.

Bài 5.6. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n+1} + 1$. Áp dụng định lý Hamilton – Caley, ta có

$$(-A)^{n+1} + I = 0 \Rightarrow A^{n+1} = (-1)^n I \Rightarrow \Phi^{n+1} = (-1)^n Id.$$

c) $\det(A + I) = P_A(-1) = (1)^{n+1} + 1 = 2$.
$(A + I)\Big(I - A + A^2 - \dots + (-1)^n A^n\Big) = I - (-A)^{n+1} = 2I$.

$$\det(A + I) = 2 \Rightarrow \det\Big(I - A + A^2 - \dots + (-1)^n A^n\Big) = 2^n.$$

6 Đa thức

Bài 6.1. Ta sẽ chứng minh với đa thức bậc n : $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ có đầy đủ nghiệm thực thì $P'(a) - n(P(a))^{\frac{n-1}{n}} \geq 0$ với $a > \max\{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$.

Sử dụng đẳng thức $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_i}$ và phân tích: $P(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Khi đó thay a vào các đẳng thức trên ta được $\dfrac{P'(a)}{P(a)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a - x_i}$ và $P(a) = \prod\limits_{i=1}^{n}(a - x_i)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương $\dfrac{1}{a - x_i} > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ ta có: $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a - x_i} \geq \dfrac{n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(a - x_i)}}$.

Hay $\dfrac{P'(a)}{P(a)} \geq \dfrac{n}{\sqrt[n]{P(a)}} \Leftrightarrow \Big(P'(a)\Big)^n \geq n^n\Big(P(a)\Big)^{n-1}$.

Vì $P'(a),\ P(a) > 0$, thay $n = 2017$ và ta có đpcm.
Dấu bằng xảy ra khi các nghiệm bằng nhau.

Bài 6.2. $P_i(x)$ có bậc $\leq n-1 \Rightarrow \quad P_i^{(n-1)}(x) = \text{const} = P_i^{(n-1)}(0)$, trong đó $P_i^{(k)}(x)$ là đạo hàm cấp k của đa thức $P_i(x)$, trường hợp $P_i(x)$ có bậc $\leq n-1$ thì $P_i^{(n-1)}(x) = P_i^{(n-1)}(0) = 0$. Vậy hàng thứ n có dạng: $P_1^{(n-1)}(0) \quad \cdots \quad P_n^{(n-1)}(0)$.
Bằng cách lấy tích phân ta có

$$P_i^{(n-1)}(x) = P_i^{(n-1)}(0) \Rightarrow\ P_i^{(n-2)}(x) = xP_i^{(n-1)}(0) + P_i^{(n-2)}(0)$$

Do đó hàng thứ $n-1$ có dạng:

$$xP_1^{(n-1)}(0) + P_1^{(n-2)}(0) \cdots xP_n^{(n-1)}(0) + P_n^{(n-2)}(0)$$

Từ hàng $n-1$ định thức cần tìm ta tách thành tổng hai định thức với hàng thứ $n-1$ có dạng: $xP_1^{(n-1)}(0) \cdots xP_n^{(n-1)}(0)$ và $P_1^{(n-2)}(0) \cdots P_n^{(n-2)}(0)$
Định thức thứ nhất bằng 0 vì hàng thứ $n-1$ và n tỷ lệ. Tương tự hàng thứ $n-2$ có dạng:

$$\frac{x^2}{2}P_1^{(n-1)}(0) + xP_1^{(n-2)}(0) + P_1^{(n-3)}(0) \cdots \frac{x^2}{2}P_n^{(n-1)}(0) + xP_n^{(n-2)}(0) + P_n^{(n-3)}(0).$$

Từ hàng $n-2$ định thức cần tìm ta tách thành tổng ba định thức với hàng thứ $n-1$ có dạng:

$$\frac{x^2}{2}P_1^{(n-1)}(0) \cdots \frac{x^2}{2}P_n^{(n-1)}(0) xP_1^{(n-2)}(0) \cdots xP_n^{(n-2)}(0) \ \text{ và }\ P_1^{(n-3)}(0) \cdots P_n^{(n-3)}(0).$$

Hai định thức đầu bằng 0 vì có hàng thứ $n-2$ tỷ lệ với hàng thứ $n-1$ và n.
Tiếp tục tương tự đối với các hàng còn lại cuối cùng được:

$$\begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \cdots & P_n(x) \\ P_1'(x) & P_2'(x) & \cdots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(x) & P_2^{(n-1)}(x) & \cdots & P_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1(0) & P_2(0) & \cdots & P_n(0) \\ P_1'(0) & P_2'(0) & \cdots & P_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(0) & P_2^{(n-1)}(0) & \cdots & P_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix}.$$

Bài 6.3. Ta có $P(1) = 0, P(0) = 0$ và $P(-1) = 0$. Do đó $P(x) = x(x-1)(x+1)G(x)$. Thay $P(x)$ vào đẳng thức cho

$$x(x-1)(x+1)(x+2)G(x+1) = (x+2)x(x-1)(x+1)G(x).$$

Suy ra $G(x+1) = G(x) = C$ hằng số. Vậy $P(x) = Cx(x-1)(x+1)$. Thử lại đa thức nghiệm đúng

Bài 6.4. Vế trái là tích của hai đa thức. Ta có

$$a_0b_0 = 1, a_0b_1 + a_1b_0 = 1, ...$$

Đồng nhất các hệ số ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned} a_0 + a_1b_{s-1} + a_2b_{s-2} + \cdots &= 1 \\ b_0 + b_1a_{r-1} + b_2a_{r-2} + \cdots &= 1. \end{aligned}$$

Từ các đẳng thức này và với điều kiện $a_i, b_j \geq 0$, ta có $a_0 \leq 1$ và $b_0 \leq 1$. Mặt khác do $a_0b_0 = 1$ nên $a_0 = b_0 = 1$. Cũng từ các đẳng thức trên ta có $a_i \leq 1$ và $b_j \leq 1$. Từ $a_0b_1 + a_1b_0 = 1$, suy ra một trong a_1, b_1 bằng 0 và số còn lại bằng 1. Bài toán kết thúc bằng phương pháp quy nạp. Vậy a_i, b_j bằng 0 hoặc 1 với mọi i, j.

Bài 6.5. Với mỗi số phức α, ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} P(x) = \alpha \\ P'(x) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Phương trình thứ hai của hệ trên tương đương với $x^{2016} - 1 = 0$. Các nghiệm của phương trình thứ hai đều là nghiệm đơn và là các nghiệm có dạng $x = z_k = \exp\left\{\dfrac{k2\pi}{2016}i\right\}$ với $k = 1, 2, \ldots, 2016, i^2 = -1$. Ứng với $k = 1008$ ta có $z_{1008} = -1$ và từ đó ta tính được $P(z_{1008}) = P(-1) = 2016$. Suy ra phương trình

$$P(y) = 2016$$

có một nghiệm kép là $y_1 = -1$, có 2015 nghiệm phức đơn và ta ký hiệu là $y_2, y_3, \ldots, y_{2016}$. Như vậy phương trình (1) được tách thành 2016 phương trình có dạng

$$P(x) = y_j \quad \text{với } j = 1, 2, \ldots, 2016. \tag{3}$$

Tính toán trực tiếp ta có $P(z_k) = z_k(z_k^{2016} - 2017) = -2016z_k$ và $P(P(z_k)) = -2016z_k(2016^{2016} - 2017) \neq 2016$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Suy ra $P(z_k) \neq y_j$ với mọi $j, k = 1, 2, \ldots, 2016$ và hệ (2) vô nghiệm khi $\alpha = y_j$. Như vậy các phương trình trong (3) đều chỉ có các nghiệm đơn. Từ đó ta xác định được số lượng nghiệm phức phân biệt của phương trình (1) là 2016.2017.

Bài 6.6. a) Tính toán trực tiếp, ma trận của φ đối với cơ sở đã cho là

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n+1 \end{bmatrix}.$$

b) Suy ra các giá trị riêng của φ.

Bài 6.7. Dễ thấy hai vế của bất phương trình

$$(n-1)(P'(x))^2 \leq nP(x)P''(x) \quad (*)$$

đồng thời bằng 0 khi $n=1$. Bây giờ ta giả sử rằng, $x_1, ..., x_n$ là các nghiệm của đa thức $P(x)$. Dễ thấy $(*)$ đúng khi $x = x_i,\ i \in \{1, ..., n\}$, và đẳng thức xảy ra nếu $P'(x_i) = 0$, tức là nếu x_i là một nghiệm bội của P. Ta giả sử x không là nghiệm của P. Sử dụng đồng nhất thức

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i},\ \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)},$$

ta thấy

$$\begin{aligned}(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{(x-x_i)^2} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{1}{x-x_i} - \frac{1}{x-x_j}\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra với mọi x khi $x_1 = \cdots = x_n$. Một ví dụ trực tiếp: $P(x) = K(x - x_1)$.

Bài 6.8. Ta có

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

và

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} (x-x_i).$$

Xét đa thức

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^n \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} + \prod_{j=1}^{n}(x-x_j) - x^n$$

có $deg(Q) \leq n-1$ và $Q(x_1) = Q(x_2) = ... = Q(x_n) = 0$. Do đó $Q(x) \equiv 0$. Điều này suy ra các hệ số của $Q(x)$ đều bằng 0. Mặt khác hệ số ứng với x^{n-1} là

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^n}{\prod_{i=1, i\neq j}^{n}(x_j-x_i)} - \sum_{j=0}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^n}{P'(x_j)} - \sum_{j=0}^{n} x_j = 0.$$

Theo Định lý Viète ta có $\sum_{j=0}^{n} x_j = -1$, suy ra

$$\frac{x_1^n}{P'(x_1)} + \frac{x_2^n}{P'(x_2)} + ... + \frac{x_n^n}{P'(x_n)} = -1.$$

Bài 6.9. Nhận xét. Nếu $x < -2$, $P_1(x) > 2$, $P_2(x) = P_1^2(x) - 2 > 2$, ..., do đó $P_{2017}(x) > 2 > x$, phương trình vô nghiệm.
Nếu $x > 2$, bằng quy nạp nhận được $P_n(x) > 2$, với mọi n. Dẫn đến $P_{n+1}(x) = P_n^2(x) - 2 > P_n(x)$. Từ đó $P_{2017}(x) > P_{2016}(x) > ... > P_1(x) = x^2 - 2 > x$, phương trình vô nghiệm.
+) Đặt $x = 2\cos t$, với hạn chế $-2 \leq x \leq 2$ thì $0 \leq t \leq \pi$. Khi đó $P_{2017}(x) = 2\cos(2^{2017}t)$. Phương trình $P_{2017}(x) = x$ tương đương với $\cos(2^{2017}t) = \cos t$ nhận nghiệm

$$t = \frac{k2\pi}{2^{2017} - 1}, t = \frac{k2\pi}{2^{2017} + 1}.$$

Kết luận

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\cos\frac{k2\pi}{2^{2017}-1}, 0 \leqslant k \leqslant 2^{2016} - 1 \\ x = 2\cos\frac{n2\pi}{2^{2017}+1}, 1 \leqslant n \leqslant 2^{2016} \end{array}\right.$$

Phương trình có 2^{2017} nghiệm phân biệt.

Bài 6.10. Đặt $y = x + 3$ thì phương trình $f(x + 4) = f(x + 3) + 2x + 7$ trở thành $f(t + 1) = f(t) + 2t + 1$. Đạo hàm cấp 2 phương trình đa thức $f(t + 1) = f(t) + 2t + 1$ ta được $f"(t + 1) = f"(t)$. Dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta xác định được $f"(t)$ một hằng số nào đó. Do đó đa thức f(t) có dạng $f(t) = ct^2 + bt + a$ ở đây $a, b, c \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra rằng $f(t) = t^2 + c$.

Bài 6.11. Đặt $f(x) = x^4 - x^3 + 1$; $g(x) = x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$. Giả sử m, n, p, q là bốn nghiệm của đa thức $x^4 - x^3 + 1$. Khi đó, ta có

$$x^4 - x^3 + 1 = (x - m)(x - n)(x - p)(x - q).$$

Suy ra

$$mnpq = 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} g(mn) &= (mn)^6 - (mn)^4 - (mn)^3 - (mn)^2 + 1 \\ &= (mn)^3\left[(mn)^3 - mn - 1 - \frac{1}{mn} + \frac{1}{(mn)^3}\right]. \end{aligned}$$

Do

$$mnpq = 1 \Rightarrow pq = \frac{1}{mn}.$$

Do đó
$$g(mn) = (mn)^3 \left[(mn)^3 - mn - 1 - pq + (pq)^3\right].$$
Mặt khác
$$\begin{aligned} f(m) &= 0 = m^4 - m^3 + 1 \Rightarrow m^3 = \frac{1}{1-m}. \\ f(n) &= 0 = n^4 - n^3 + 1 \Rightarrow n^3 = \frac{1}{1-n}. \\ f(1) &= 1 = (1-m)(1-n)(1-p)(1-q) \Rightarrow \frac{1}{(1-m)(1-n)} = (1-p)(1-q). \end{aligned}$$
Nên
$$(mn)^3 = \frac{1}{(1-m)(1-n)} = (1-p)(1-q).$$
Tương tự, ta có
$$(pq)^3 = \frac{1}{(1-p)(1-q)} = (1-m)(1-n).$$
Suy ra
$$\begin{aligned} (mn)^3 - mn - 1 - pq + (pq)^3 &= (1-p)(1-q) - mn - 1 - pq + (1-m)(1-n) \\ &= 1 - m - n - p - q = 0. \end{aligned}$$
Vậy mn là nghiệm của đa thức $x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$.

Bài 6.12. Ta cần xây dựng một chiến thuật thắng. Bạn Thương, sau 1008 bước của mình, có thể đạt sao cho đối với bước cuối cùng là bước 1009 của người thứ nhất (do giả thiết chỉ đúng 2017 bước đi), dấu $*$ còn lại ở lũy thừa bậc lẻ x^{2l+1}.

Giả sử trước bước đi cuối cùng là bước thứ đi của người thứ hai, xuất hiện đa thức $P(x) + *x^m + l * x^{2l+1}$, trong đó $P(x)$ là đa thức đã biết với hệ số nguyên.

Chọn số α và số $c > 0$ sao cho với mọi giá trị λ đối với đa thức $F(x) = P(x) + \alpha x^m + \lambda x^{2l+1}$ luôn có $cF(1) + F(-2) = 0$, khi đó $F(x)$ sẽ có nghiệm trên đoạn $[-2; 1]$.

Để làm được điều này, chỉ cần lấy $c = 2^{2l+1}; \alpha = \dfrac{P(-2) - cP(-1)}{c + (-2)^n}$. (Chúng ta có thể thay thế 1 và -2 bằng số khác, nhưng phải trái dấu).

Đặt giá trị này của α vào bước đi cuối thì bạn Thương đảm bảo đa thức có nghiệm thực, và giành chiến thắng

7 Tổ hợp

Bài 7.1. Vì các điểm đều được nối với nhau cho nên với mỗi điểm ta có 5 đoạn thẳng nối 5 điểm còn lại. Do tô hai màu nên theo nguyên lý Dirichlet, luôn tồn tại 3 đoạn thẳng cùng màu xuất phát từ một điểm, ta gọi đó là đỉnh A và 3 đỉnh có cạnh cùng màu nối với đỉnh A là $B,\ C,\ D$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $AB,\ AC,\ AD$ có màu xanh. Xét các đoạn thẳng $AB,\ AC, AD,\ BC,\ BD,\ CD$. Nếu trong $BC,\ BD,\ CD$ có một cạnh màu xanh thì ta được một tam giác có 3 cạnh cùng màu xanh. Ngược lại, để loại trừ trường hợp trên thì 3 cạnh $BC,\ BD,\ CD$ phải tô màu đỏ, ta cũng có được tam giác BCD có 3 cạnh cùng màu. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 7.2. a) Gọi x_i là số côn trùng lúc đầu ở phòng i. Ta có hệ

$$\begin{cases} 0,4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0,2x_4 & = 12 \\ 0x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 & = 25 \\ 0x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 + 0,2x_4 & = 26 \\ 0,6x_1 + 0,3x_2 + 0,3x_3 + 0,4x_4 & = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 30 \\ x_4 = 40 \end{cases}.$$

b) Số côn trùng ở P1, P2, P3, P4 là: 16, 22, 22, 40.

Bài 7.3. Gắn mỗi câu lạc bộ i với véctơ $v_i \in \mathbb{R}^n$ xác định bởi: thành phần thứ j bằng 1 nếu người j tham gia câu lạc bộ i và bằng 0 nếu ngược lại. Khi đó $v_i \cdot v_j = k$ với mọi $i \neq j$. Nếu $v_1, \dots, v_m$ độc lập tuyến tính thì $m \leq n$. Ngược lại, tồn tại $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$c_1v_1 + \cdots + c_mv_m = 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 0 &= (c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) \cdot (c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i^2 v_i \cdot v_i + 2\sum_{i<j} c_ic_jv_i \cdot v_j \\ &= \sum_{i=1}^m c_i^2 |v_i|^2 + 2k\sum_{i<j} c_ic_j \\ &= \sum_{i=1}^m c_i^2(|v_i|^2 - k) + k\big(\sum_{i=1}^m c_i\big)^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Từ giả thiết suy ra, mỗi câu lạc bộ đều có ít nhất k thành viên và $|v_i|^2 - k > 0$ với mọi i. Khi đó, theo (5.1) ta nhận được $c_1 = \dots c_m = 0$. (mâu thuẫn)

Bài 7.4. Chọn một cây gọi A
TH1: Cây A không bị chặt Sau khi chặt đi 4 cây còn lại 13 cây , xen kẽ giữa 13 cây này có 13 khoảng trống. Bốn cây bị chặt tương ứng với 4 trong 13 khoảng trống nói trên. Do đó số cách thực hiện là $C_{13}^4 = 715$.
TH2: Cây A bị chặt Sau khi chặt tiếp 3 cây, còn lại 13 cây, xen kẽ giữa 13 cây

này có 12 khoảng trống không kề vị trí của cây A.Ba cây bị chặt tương ứng với 3 trong 12 khoảng trống nói trên . Do đó số cách thực hiện là $C_{12}^3 = 220$. Vậy có $715 + 220 = 935$.

Bài 7.5. a) Do 1 chú cóc chỉ có thể nhảy từ bậc N đến $2N + 1$ hoặc $4N + 1$ nên nếu chú cóc nhảy từ bậc N đến bậc $4N + 1$ rồi chú nhảy lùi lại theo quy tắc $2N + 1$ chú sẽ nhảy tới bậc $2N$. Do đó nếu ta đặt chú cóc ở bậc N chú có thể nhảy lên bậc $2N$ hoặc $2N + 1$ và có thể nhảy lùi lại. Vì vậy nếu đặt chú cóc ở một bậc N bất kì nếu N lẻ chú sẽ nhảy lùi xuống bậc $\dfrac{N-1}{2}$ còn nếu N chẵn chú sẽ nhảy lùi tới bậc $\dfrac{N}{2}$. Rõ ràng sau một số hữu hạn bước chú sẽ nhảy về đúng bậc 1. Vì vậy nếu đặt chú cóc ở bậc bất kì chú sẽ luôn nhảy về được bậc 1. Do đó chỉ có thể đặt được duy nhất 1 chú cóc lên thang mà thôi.
b) Tương tự như ý a) một chú cóc ở bậc N bất kì có thể nhảy lên bậc $3N$ hoặc $3N + 1$ và có thể nhảy lùi lại. Như vậy nếu đặt cóc ở một bậc bất kì thì chú chỉ có **duy nhất** một cách nhảy lùi. Đó là nếu N chi hết cho 3 thì chú nhảy xuống bậc $\dfrac{N}{3}$, còn nếu chia 3 dư 1 thì xuống bậc $\dfrac{N-1}{3}$, còn nếu chia 3 dư 2 thì chú đứng im không thể nhảy lùi được được nữa. Do đó nếu ta đặt các chú cóc ở các bậc có dạng $3k + 2$ thì sẽ không có chú cóc nào có thể gặp được nhau. Thật vậy giả sử có hai chú cóc ở bậc $3a + 2$ và $3b + 2$ trong đó ($a \neq b$) có thể gặp được nhau thì sau một hữu hạn lần nhảy hai chú cóc sẽ đến một bậc M nào đó. Do chú cóc ở bậc M chỉ có duy nhất một cách nhảy lùi, mà lại có 2 chú cóc nhảy về do đó từ bậc M sẽ có hai cách nhảy lùi tới $3a + 2$ và $3b + 2$ khác nhau điều này vô lí vì nhảy lùi là duy nhất. Vì vậy ta có thể đặt được vô số chú cóc lên thang bằng cách đặt các chú cóc ở vị trí $2, 5, 8, 11, ..., 3k + 2, ...$

Bài 7.6. Giả sử trái lại rằng tồn tại hai đảo A, B sao cho không thể đi từ đảo này sang đảo kia bằng đường hàng không. Suy ra từ mỗi một trong 7 đảo còn lại hoặc có thể đến được A bằng đường hàng không, hoặc có thể đến được B bằng đường hàng không, nhưng không đến được cả hai. Nếu trái lại, tồn tại một đảo C đến được cả A và B bằng đường hàng không thì ta có thể đi từ A đến B bằng đường hàng không bằng cách vòng qua C. Như vậy từ 7 đảo còn lại ta tách ra được hai tập con rời nhau, một tập gồm những đảo có thể đến A bằng đường hàng không và tập còn lại gồm những đảo có thể đến B bằng đường hàng không. Suy ra một trong hai tập chứa không quá 3 đảo. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là từ mỗi đảo đều đi được tới 4 đảo khác bằng đường hàng không. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 7.7. Gọi X là vector cột các phần tử đều bằng 1. Với mỗi j, gọi Y_j là vector cột mà phần tử thứ k là 1 nếu game thủ thứ k thắng game j, là -1

nếu thua.

Khi đó, sau game j thì ma trận A được cộng thêm ma trận $\frac{1}{2}\left(XX^t+Y_jY_j^t\right)$. Ma trận B được cộng thêm ma trận $\frac{1}{2}\left(Y_jX^t-XY_j^t\right)$. Do đó, sau n game, ta được:

$$A=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(XX^t+Y_jY_j^t\right), \quad B=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_jX^t-XY_j^t\right).$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}A+iB&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[XX^t+Y_jY_j^t+i\left(Y_jX^t-XY_j^t\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(X+iY_j)(X-iY_j)^t=\frac{1}{2}(D+iY)(D-iY)^t,\end{aligned}$$

Trong đó $D\in M_n(\mathbb{Z})$ là ma trận có các phần tử bằng 1, $Y\in M_n(\mathbb{Z})$ là ma trận có cột j là Y_j. Dễ thấy các phần tử của $D+iY$ đều có dạng $1\pm i$. Bằng cách nhân dòng đầu với (-1) rồi cộng vào các dòng sau, ta có

$$\det(D+iY)=2^{n-1}(a+bi),$$

với a,b cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Suy ra

$$\det(A+iB)=\frac{1}{2^n}.2^{2(n-1)}(a+bi)(a-bi)=2^{n-2}(a^2+b^2).$$

Do đó $\det(A+iB)$ không âm và chia hết cho 2^{n-1}. □

Bài 7.8. Giả sử ngược lại, nghĩa là với mỗi cặp học sinh đều tồn tại ít nhất một bài toán nào đó mà cả hai học sinh này đều không giải được. Đánh số thứ tự các bài toán là $1,2,3,4,5,6$ và số thứ tự các học sinh là $1,2,\dots,200$. Xây dựng bảng (a_{ij}) kích thước 6×200, với $a_{ij}=1$ nếu học sinh j giải được bài toán i và $a_{ij}=0$ nếu học sinh j không giải được bài toán i.

Gọi T là tập các cặp số $(0,0)$ thuộc cùng một dòng của ma trận (a_{ij}). Ta đếm số phần tử của T theo hai cách.

- Theo giả thiết, mỗi cặp cột có ít nhất một cặp số 0 thuộc cùng một dòng. Do có tất cả C_{200}^2 cặp cột nên $|T|\geq C_{200}^2$.
- Do mỗi bài toán đều giải được bởi ít nhất 120 học sinh nên mỗi dòng có nhiều nhất C_{80}^2 cặp số 0. Suy ra $|T|\leq 6C_{80}^2$.

Vậy $C_{200}^2\leq|T|\leq 6C_{80}^2$ hay $19000\leq|T|\leq 18960$. Điều này vô lí.

Bài 7.9. a) Số dân của thành phố C_i khi giờ làm việc bắt đầu trong ngày $m+1$ là

$$p_i^{(m+1)} = p_i^{(m)} - p_i^{(m)} \sum_{j \neq i} a_{ij} + \sum_{j \neq i} a_{ji} p_j^{(m)}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Suy ra

$$\begin{bmatrix} p_1^{(m+1)} \\ \vdots \\ p_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_1^{(m)} \\ \vdots \\ p_n^{(m)} \end{bmatrix},$$

trong đó $A = [\alpha_{ij}]$ có các phần tử xác định bởi

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ji} & \text{nếu } i \neq j, \\ 1 - \sum\limits_{k \neq j} a_{kj} & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

b) Gọi $\mathbf{p}^{(m)}$ là véctơ cột số dân của n thành phố trong ngày m. Áp dụng công thức truy hồi trên đây ta có

$$\mathbf{p}^{(m+s)} = A^s \mathbf{p}^{(m)}.$$

Bài toán ta đang xét ứng với $n = 2, s = 5$ và $m = 0$.
Trong trường hợp $n = 2$ ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$ với hai véctơ riêng tương ứng là $v_1 = (\beta; \alpha)$ và $v_2 = (1; -1)$. Suy ra

$$A^5 = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Bài 7.10. Ta chứng tỏ rằng với bất kỳ $n \geq 2$ thì đáp án là 6. Trước hết, ta chỉ ra rằng ít hơn 6 chuyến du lịch là không đủ. Trong trường hợp đó tổng số lượng sinh viên trong tất cả các chuyến du lịch sẽ không vượt quá 5n. Một sinh viên sẽ gặp $n-1$ sinh viên khác trên mỗi chuyến du lịch, vì thế, người sinh viên đó phải tham gia ít nhất 3 chuyến du lịch để gặp tất cả $2n-1$ bạn học chung trường với mình. Như vậy, tổng số sinh viên trong suốt các chuyến đi không nhỏ hơn $6n$, điều này là ko thể xảy ra.
Bây giờ ta xây dựng một ví dụ cho trường hợp 6 chuyến du lịch. Nếu n là chẵn, thì ta có thể chia $2n$ sinh viên thành các nhóm bằng nhau, chẳng hạn

A, B, C, D. Khi đó ta có thể tổ chức các chuyến du lịch với các nhóm tương ứng: $(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$ và (C, D).
Nếu n là lẻ và chia hết cho 3, thì ta có thể chia tất cả các sinh viên thành các nhóm bằng nhau, chẳng hạn: E, G, H, I, K, L. Khi đó các thành viên của các chuyến du lịch có thể được sắp xếp như sau:
$(E, G, H), (E, G, I), (H, I, K), (H, I, L), (E, K, L), (H, K, L)$.
Trong trường hợp còn lại, đặt $n = 2x + 3y$, trong đó x, y là các số nguyên dương. Ta hãy thành lập các nhóm A, B, C, D của $2x$ sinh viên, và các nhóm E, G, H, I, K, L của $3y$ sinh viên. Sau đó ta áp dụng các trường hợp ở trên để tổ chức các chuyến du lịch sau: A, B, E, G, H, C, D, E, E, G, I, A, C, H, I, K, B, D, H, I, L, A, D, E, K, L, B, C, G, K, L.

Bài 7.11. **Bổ đề:***Nếu $n! = 2^\alpha.\beta$ với β là số nguyên dương lẻ thì*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{n}{2^k}],$$

trong đó $[x]$ là ký hiệu phần nguyên của số thực x.
Trước hết chúng ta chứng minh rằng nếu $n = 2^{p_1} + 2^{p_2} + ... + 2^{p_m}$ với $0 \leq p_1 < p_2 < ... < p_m$ thì trong tập hợp Ω có đúng 2^m số tự nhiên lẻ. Thật vậy, với số tự nhiên p, ta có

$$(X+1)^{2^p} = X^{2^p} + 1 + \sum_{k=1}^{2^p-1} \begin{pmatrix} 2^p \\ k \end{pmatrix} X^k,$$

là khai triển nhị thức Newton của $(X+1)^{2^p}$. Với $k \in \{1, ..., 2^p - 1\}$, đặt $(2^p)! = 2^{\alpha_1}\beta_1$, $(2^p - k)! = 2^{\alpha_2}\beta_2$, $k! = 2^{\alpha_3}\beta_3$, trong đó $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ là các số nguyên dương lẻ.
Ta có

$$\begin{aligned}\alpha_2 + \alpha_3 = \sum_{j=1}^{\infty}[\frac{2^p - k}{2^j}] + \sum_{j=1}^{\infty}[\frac{k}{2^j}] &= \sum_{j=1}^{p-1}([\frac{2^p - k}{2^j}] + [\frac{k}{2^j}]) \\ &\leq \sum_{j=1}^{p-1}[\frac{2^p}{2^j}] < \sum_{j=1}^{p}[\frac{2^p}{2^j}] = \sum_{j=1}^{\infty}[\frac{2^p}{2^j}] = \alpha_1.\end{aligned}$$

Do đó $\begin{pmatrix} 2^p \\ k \end{pmatrix}$ là bội của 2 với mọi $k \in \{1, ..., 2^p - 1\}$, tức là

$$(X+1)^{2^p} = X^{2^p} + 1 + 2P(X),$$

trong đó $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Từ đó ta có,

$$(X+1)^n = (X+1)^{2^{p_1}+2^{p_2}+....+2^{p_m}} = \prod_{i=1}^{m}(X+1)^{2^{p_i}}$$

$$= \prod_{i=1}^{m}(X^{2^{p_i}}+1+2P_i(X)) = \prod_{i=1}^{m}(X^{2^{p_i}}+1)+2Q(X),$$

với $P_1(X), ..., P_m(X), Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
Nhận xét rằng

$$\prod_{i=1}^{m}(X^{2^{p_i}}+1)$$

có đúng 2^m số hạng với hệ số bằng 1. Suy ra

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k$$

có 2^m số hạng có hệ số lẻ. Vậy Ω có đúng 2^m số tự nhiên lẻ.
Tiếp theo, vì $2^3 = 8$, nên chúng ta tìm các số tự nhiên $n \in \{1, ..., 1024 = 2^{10}\}$ sao cho $n = 2^{p_1} + 2^{p_2} + 2^{p_3}$ với $p_1 < p_2 < p_3$. Bài toán này tương đương với bài toán cho một dãy gồm 10 ô vuông và ta điền các chữ số 0 và 1 vào các ô đó sao cho có đúng ba ô được điền số 1 (dĩ nhiên 1024 biểu diễn hệ nhị phân có 11 chữ số nhưng số này không thoả mãn nên chỉ xét với 10 chữ số).
Vậy có $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 120$ số tự nhiên n thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7.12. Xét $\mathbb{R}_{2016}[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực có bậc không quá 2016. Khi đó dễ dàng tính được $dim\mathbb{R}_{2016}[x] = 2017$. Vì vậy, hệ gồm 2018 đa thức trên trường số thực có bậc không quá 2016 luôn là hệ các đa thức phụ thuộc tuyến tính. Vậy luôn tồn tại ít nhất một đa thức mà nó có thể biểu diễn như là tổng của các đa thức còn lại cùng với các hệ số thực.

Bài 7.13. Ta sẽ sử dụng hệ đếm cơ số 4. Ta đánh số các chữ cái A, D, H, N tương ứng với các chữ số 0, 1, 2, 3. Như vậy AAAAAAAA$= 00000000_{(4)} = 0$ đứng ở vị trí đầu tiên (đánh số 0), ..., NNNNNNNN$= 33333333_{(4)} = 65535$ đứng ở vị trí thứ tự 65536 (đánh số 65535). Lúc đó từ đứng ở vị trí thứ tự tự 2017 (đánh số 2016) với $2016 = 00133200_{(4)}$, nên từ đứng ở vị trí thứ tự 2017 là AADNNHAA. Từ DHANDHAN tương ứng với $12031203_{(4)} = 25443$ (đánh số 25443), nên từ đó đứng ở vị trí thứ tự 25444.

Bài 7.14. Chúng ta xét bài toán tổng quát: Có $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc thì có $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}-2}{2}$ cách chọn ra một số người (ít nhất 1) từ $2n$ người này, sao cho không có hai người nào đứng kề nhau được chọn (hai người đứng kề nhau là hai người có số thứ tự liên tiếp trong một hàng dọc hoặc có cùng số thứ tự ở hai hàng)?

Thật vậy, gọi S_n là số cách chọn ra một số người từ $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc và T_n là số cách chọn ra một số người từ $2n-1$ người xếp thành 2 hàng dọc, trong đó khuyết một chỗ ở đầu của một hàng.

Ta có: $S_1 = 2, T_1 = 1.$

Xét $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc. Ta xét các cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau:

1) Người ở vị trí số 1 được chọn. Khi đó người ở vị trí số 2 và số 3 không được chọn, có $T_{n-1}+1$ cách chọn ($+1$ là do bổ sung cách chọn " không chọn gì cả").

Người ở vị trí số 2 được chọn, tương tự, có $T_{n-1}+1$ cách chọn

Cả hai người ở vị trí số 1 và số 2 đều không được chọn, có S_{n-1} cách chọn.

Vậy ta có $S_n = S_{n-1} + 2T_{n-1} + 2 \qquad (1)$.

Xét $2n-1$ người xếp thành 2 hàng dọc. Ta xét các cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau:

1) Người ở vị trí số 1 được chọn: Khi đó người ở vị trí số 2 không được chọn là có $T_{n-1}+1$ cách chọn

Người ở vị trí số 1 không được chọn, có S_{n-1} cách chọn.

Vậy ta có: $T_n = S_{n-1} + T_{n-1} + 1 \qquad (2)$

Từ (1) ta suy ra: $2T_{n-1} = S_n - S_{n-1} - 2; 2T_n = S_{n+1} - S_n - 2.$

Thay vào (2) ta được: $S_{n+1} - S_n - 2 = 2S_{n-1} + S_n - S_{n-1} - 2 + 2; S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1} + 2.$

Từ đây dễ dàng tìm được:

$$S_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}-2}{2}.$$

Áp dụng vào bài toán, ta có số cách chọn bằng:

$$S_{1009} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{1010}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{1010}-2}{2}.$$

Bài 7.15. Gọi khối lượng 2017 quả táo đó là $x_1, x_2, \cdots, x_{2017}$. Theo giả thiêt ta có hệ phương trình 2017 ẩn, 2017 phương trình:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,2017}x_{2017} = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,2017}x_{2017} = 0 \\ \ldots \\ a_{2017,1}x_1 + a_{2017,2}x_2 + \ldots + a_{2017,2017}x_{2017} = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ii} = 0 \forall i = \overline{1,2017}$, và $a_{ij} = 1; -1;\ \forall i \neq j$.

Để chứng minh 2017 quả táo có khối lượng bằng nhau thì ta cần chứng minh $r(A) = 2016$ với

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2017} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2017,1} & \cdots & a_{2017,2017} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,2016} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{2016,1} & \ldots & a_{2016,2016} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ta chứng minh

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,2016} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{2016,1} & \ldots & a_{2016,2016} \end{vmatrix} \equiv 1\,(mod 2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_{2016\times 2016} \equiv 1\,(mod 2)$$

$$\Leftrightarrow D_{2016} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}_{2016\times 2016} \equiv 1\,(mod 2)$$

Thật vậy, do quy nạp

$$D_{2016} = (-1)^{2015} - D_{2015} = \cdots = (-1)^{2015} - (-1)^{2014} + (-1)^{2013} - \cdots - (-1)^2 + (-1)^1 - D_1 = -2015$$

Chương 6

Đáp án đề đề xuất môn Giải tích

1 Dãy số

Bài 1.1. $a)$ Chứng minh rằng: Dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ. Ta có $a_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{6x+4}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{14}{(x+3)^2} > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } (0, \infty).$$

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{-a_n^2 + 3a_n + 4}{a_n + 3} = -\frac{(a_n - 4)(1 + a_n)}{a_n + 3}.$$

Trường hợp 1: $a_1 > 4$. Suy ra

$$a_2 < a_1 \Rightarrow a_3 = f(a_2) < a_2 = f(a_1), ..., \Rightarrow a_{n+1} < a_n \ \ \forall n \geq 1.$$

Vậy, dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ giảm và bị chặn dưới bởi 0, nên hội tụ.
Trường hợp 2: $a_1 < 4$. Suy ra

$$a_2 > a_1 \Rightarrow a_3 = f(a_2) > f(a_1) = a_2, ..., \Rightarrow a_{n+1} > a_n \ \ \forall n \geq 1.$$

Vậy, dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng và bị chặn trên bởi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 6$, nên hội tụ.
$b)$ Lấy giới hạn hai vế, ta có

$$I = \frac{6I+4}{I+3} \Rightarrow I = 4.$$

Bài 1.2.

a) $\Rightarrow$: Giả sử $\{u_n\}$ tăng. Khi đó $u_n^5 = u_{n+1} - u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $u_1 = a > 0$.

$\Leftarrow$: Giả sử $u_1 = a > 0$. Ta chứng minh $u_n > 0 \quad (1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp. Thật vậy, với $n = 1$, $u_1 = a > 0$ thỏa mãn. Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là $u_k > 0$. $\Rightarrow u_{k+1} = u_k + u_k^5 > 0$ thỏa mãn với $n = k+1$. Vậy $u_n > 0$ với mọi n. $u_{n+1} - u_n = u_n^5 > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó dãy $\{u_n\}$ tăng.

b) $\Rightarrow$: Giả sử $\{u_n\}$ giảm. Khi đó $u_n^5 = u_{n+1} - u_n < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $u_1 = a < 0$.
$\Leftarrow$: Giả sử $u_1 = a < 0$. Ta chứng minh $u_n < 0 \quad (1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp. Thật vậy, với $n = 1$, $u_1 = a < 0$ thỏa mãn. Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là $u_k < 0$. $\Rightarrow u_{k+1} = u_k + u_k^5 < 0$ thỏa mãn với $n = k+1$. Vậy $u_n < 0$ với mọi n. $u_{n+1} - u_n = u_n^5 < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó dãy $\{u_n\}$ giảm.

c) Nếu $a < 0$: dãy $\{u_n\}$ giảm. Giả sử dãy $\{u_n\}$ bị chặn dưới, khi đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Dãy giảm nên $u_n \le u_1 = a$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $l \le a$, mà $a < 0 \Rightarrow l < 0$. Do $u_{n+1} = u_n + u_n^5$. Cho $n \to +\infty$ ta được: $l = l + l^5 \Rightarrow l = 0$. (Mâu thuẫn với $l < 0$) Vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn dưới, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{u_{n+1} - u_n^3}{u_n}} - u_n^2 + 2 \right) =$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{u_n^4 - u_n^2 + 1} - u_n^2 \right) + 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-u_n^2 + 1}{\sqrt{u_n^4 - u_n^2 + 1} + u_n^2} + 2 \right) = \dfrac{3}{2}$
(Do $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$)

Nếu $a > 0$: Chứng minh tương tự ta cũng được $L = \dfrac{3}{2}$

Bài 1.3. a) Ta có $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$. Do đó, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng. Từ bất đẳng thức $\ln(1+x) < x \ \ \forall x > 0$, suy ra

$$\ln a_n = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{4}) + ... + \ln(1+\frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Vậy, dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng và bị chặn trên, nên hội tụ.
b) Theo bất đẳng thức $\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$ với mọi $x > 0$, ta có

$$\ln a_n = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{4}) + ... + \ln(1+\frac{1}{2^n}) > [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2] + ... + [\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n})^2].$$

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n \ge \lim_{n\to\infty} \left\{ [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2] + ... + [\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n})^2] \right\} = \frac{5}{6}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.4. Ta có
$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)!-k!}{k!(k+1)!}$$
Suy ra
$$u_{k-1}-u_k=-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}$$
Lấy tổng hai vế ta được $u_0-u_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$ nên
$$u_n=u_0-1+\frac{1}{(n+1)!}$$
Vậy $u_{2017}=1+\frac{1}{2018!}$ và giới hạn của dãy bằng 1.

Bài 1.5. Ta có $a_2=14$ và $a_3=\dfrac{2.29}{17}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $a_n>2$ với mọi $n\geq 2$. Mặt khác ta có
$$a_{n+1}-a_n=\frac{2\left(2a_n+1\right)}{a_n+3}-a_n=\frac{a_n+2-a_n^2}{a_n+3}=\frac{\left(a_n+1\right)\left(2-a_n\right)}{a_n+3}.$$
Suy ra $\{a_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn hữu hạn. Gọi $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, ta được $l\geq 2$ và
$$l=\frac{2\left(2l+1\right)}{l+3}.$$
Giải tìm được $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

Bài 1.6. Ta có
$$u_n-u_{n+1}=\frac{u_n^2+3u_n+1}{3+u_n}=\frac{(u_n+\frac{3+\sqrt{5}}{2})(u_n+\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{3+u_n}.$$
Ta chứng minh
$$u_n>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\tag{6.1}$$
với mọi $n=0,1,2,...$ bằng quy nạp như sau: với $n=0$ thì $u_0=1$; với $n=1$ thì $u_1=-\frac{1}{4}$. Từ đó (6.1) đúng với $n=0$ và $n=1$. Giả sử (6.1) đúng với $n=k$, tức là $u_k>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Khi đó $3+u_k>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ và $\frac{1}{3+u_k}<\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Vậy
$$u_{n+1}=-\frac{1}{3+u_k}>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy (6.1) đúng với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$. Từ đó $u_n > u_{n+1}$ với mọi n, nghĩa là $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha \geq \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, chuyển qua giới hạn trong $u_n = \dfrac{-1}{3+u_{n-1}}$ ta được $\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$. Giải ra ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 1.7. Đặt $v_n = u_n + 3$. Với mọi $n \geq 1$, từ công thức truy hồi ta có $v_{n+1} = \dfrac{6v_n - 8}{v_n}$. Suy ra $v_{n+1}v_n = 6v_n - 8$. Đặt $w_0 = 1$ và $w_n = \prod\limits_{k=1}^{n} v_k$ thì công thức trên trở thành $w_{n+1} = 6w_n - 8w_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $w_{n+1} - 2w_n = 4(w_n - 2w_{n-1})$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp n lần ta có

$$w_{n+1} - 2w_n = 4(w_n - 2w_{n-1}) = 4^2(w_{n-1} - 2w_{n-2}) = \cdots = 4^n(w_1 - 2w_0) = 4^n.$$

Suy ra $w_{n+1} - \dfrac{4^{n+1}}{2} = 2\left(w_n - \dfrac{4^n}{2}\right)$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp n lần ta có

$$w_{n+1} - \frac{4^{n+1}}{2} = 2\left(w_n - \frac{4^n}{2}\right) = 2^2\left(w_{n-1} - \frac{4^{n-1}}{2}\right) = \cdots = 2^n\left(w_1 - \frac{4}{2}\right) = 2^n.$$

Vậy $w_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 4^{n+1}}{2}$, suy ra $u_n = v_n - 3 = \dfrac{w_n}{w_{n-1}} - 3 = \dfrac{2^n + 4^n}{2^{n-1} + 4^{n-1}} - 3 = \dfrac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} + 1}$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 1.8. Dãy số được cho bởi công thức truy hồi $u_{n+1} = f(u_n)$ trong đó $f(x) = x^x$. Xét $f(x) - x = x(x^{x-1} - 1)$. Nếu $x > 1$ thì $x - 1 > 0$ nên $x^{x-1} > x^0 = 1$. Nếu $0 < x < 1$ thì $x - 1 < 0$ nên $x^{x-1} > x^0 = 1$. Do đó ta luôn có $f(x) > x$ với $0 < x \neq 1$ và $f(1) = 1$. Suy ra $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ nên (u_n) là dãy số không giảm. Nếu dãy số (u_n) hội tụ đến $l \in \mathbb{R}$ thì ta phải có $l = f(l)$, do đó $l = 1$. Mặt khác $f'(x) = (e^{x\ln x})' = x^x(\ln x + 1)$. Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Ta cũng có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = 1$ vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$.
Bảng biến thiên của f:

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta xét 2 trường hợp sau:

- Trường hợp $a > 1$: (u_n) là dãy số không giảm và $u_1 > 1$ nên (u_n) không thể hội tụ đến 1, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

- Trường hợp $0 < a \leq 1$: Từ bảng biến thiên ta có $0 < u_2 = f(u_1) \leq 1$. Bằng qui nạp ta có $0 < u_n \leq 1$ với mọi $n \geq 2$. Do (u_n) là dãy số không giảm và bị chặn trên bởi 1 nên hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Kết luận: $0 < a \leq 1$, khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Bài 1.9. Ta có $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geq 2$. Do đó, nếu $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ thì a là nghiệm âm của phương trình $x = x^2/2 - 1$. Giải ta được $x = 1 - \sqrt{3}$. Ta sẽ chứng minh $a = 1 - \sqrt{3}$ là giới hạn của dãy số. Thật vậy

$$|u_{n+1} - a| = |u_n^2/2 - 1 - (a^2/2 - 1)| = \frac{1}{2}|u_n - a||u_n + a|.$$

Vì $u_n \in (-1, 0)$ nên $|u_n + a| < |-1 + 1 - \sqrt{3}| = |\sqrt{3}|$. Vậy $|u_{n+1} - a| < \sqrt{3}/2|u_n - a|$ với mọi $n \geq 2$. Do đó, theo quy nạp, ta thu được $|u_{n+1} - a| < (\sqrt{3}/2)^{n-1}|u_2 - a| < (\sqrt{3}/2)^{n-1}$. Chuyển qua giới hạn ta thu được điều phải chứng minh.

Bài 1.10. Ta có

$$a_{n+1} = 2017\left(\tfrac{a_n}{n} + \tfrac{a_{n-1}}{n-1}\right) + a_{n-1} = 2017\left(\tfrac{a_n}{n} + \tfrac{a_{n-1}}{n-1}\right) + 2017\left(\tfrac{a_{n-2}}{n-2} + \tfrac{a_{n-3}}{n-3}\right) + a_{n-3} =$$
$$... = 2017\left(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{a_i}{i}\right) + a_1; \quad \forall n \geq 2,$$

và

$$a_{n+2} = \frac{2017a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1},\ n = 2, 3, ...$$

Từ đó

$$a_{n+1} = 2017\frac{a_n}{n} + a_n = a_n\left(\frac{2017}{n} + 1\right), \quad n = 2, 3, 4, ...$$

Do đó

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n + 2017}{n},\ n = 2, 3, 4, 5, ...$$

Từ đó

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Bài 1.11. Rõ ràng, bởi quy nạp, ta có $|a_n| \leq |a_1|$ với mọi $n \geq 1$, và vì vậy

$$0 \leq L := \varlimsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty. \tag{6.2}$$

Với mọi $n \geq 2$, bởi giả thiết, ta có

$$|a_n| \leq \frac{1}{2} \sup_{k \geq n/2} |a_k|.$$

Do đó, bởi dãy $\{\sup_{k\geq n/2} |a_k|\}_{n\geq 1}$ là dãy giảm,

$$\begin{aligned} L = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \leq \frac{1}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{k\geq n/2} |a_k| &= \frac{1}{2} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n/2} |a_k| \\ &\leq \frac{1}{2} \inf_{n\in 2\mathbb{N}} \sup_{k\geq n/2} |a_k| = \frac{1}{2} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} |a_k| = \frac{1}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = \frac{1}{2} L. \end{aligned}$$

Điều này, kết hợp với (6.2), dẫn đến rằng $L = 0$, và do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bài 1.12. (a) Nếu $\{a_n\}$ là dãy hằng, ta có $a_2 = a$ hay $\dfrac{43a - 425}{a+1} = a \Rightarrow a = 17$ hoặc $a = 25$.
Ngược lại, nếu $a = 17$ thì $a_n = 17$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $a = 25$ thì $a_n = 25$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Ta có: $a_n - 25 = \dfrac{43a_{n-1} - 425}{a_{n-1}+1} - 25 = \dfrac{18(a_{n-1} - 25)}{a_{n-1}+1}$
. $a_n - 17 = \dfrac{43a_{n-1} - 425}{a_{n-1}+1} - 17 = \dfrac{26(a_{n-1} - 17)}{a_{n-1}+1}$
(+) Nếu $a = 17$ thì $a_n = 17$ với mọi n nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 17$.
(+) Nếu $a \neq 17$ thì $a_n \neq 17$ với mọi n. Khi đó ta có:

$$\frac{a_n - 25}{a_n - 17} = \frac{18(a_{n-1} - 25)}{26(a_{n-1} - 17)} = ... = \frac{18^{n-1}(a_1 - 25)}{26^{n-1}(a_1 - 17)} = \frac{18^{n-1}(a - 25)}{26^{n-1}(a - 17)}.$$

Từ đây ta thu được $a_n = \dfrac{25(a-17) - 17(\frac{9}{13})^{n-1}(a-25)}{a - 17 - (\frac{9}{13})^{n-1}(a-25)}$
Chú ý rằng, trong trường hợp này ta phải có thêm điều kiện để dãy số xác định là $a_n \neq -1$, tức là $a \neq \dfrac{17.26^n - 25.18^n}{26^n - 18^n}$, $\forall n = 1, 2, ...$
Kết luận:
+) $a = 17$ thì dãy đã cho hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 17$.
+) $a \neq 17$ và $a \neq \dfrac{17.26^n - 25.18^n}{26^n - 18^n}$, $\forall n = 1, 2, ...$ thì dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 25$.

+) $a = \dfrac{17.26^n - 25.18^n}{26^n - 18^n}$ với một số tự nhiên bất kì $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy đã cho không xác định.

Bài 1.13. Ta chỉ ra rằng luôn tìm được số hạng thứ k nào đó của dãy là $u_k \in [-1;1]$. Thật vậy, Nếu $a \in [0;1)$ thì $a \in [0;1) \subset [-1;1]$. Xét trường hợp $a \in (1;2)$, tức là $u_0 \in (1;2)$. Nếu xảy ra mọi trường hợp $u_n \notin [-1;1]$ thì từ hệ thức $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$, suy ra $u_n > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Để ý rằng

$$\frac{n+2-u_n}{n+1-u_{n-1}} = \frac{n+1+u_{n-1}}{n} > \frac{n+1}{n},$$

tức là

$$\frac{k+2-u_k}{k+1-u_{k-1}} > \frac{k+1}{k}, \forall k = 1, 2, ..., n.$$

Nhân theo vế của n bất đẳng thức với $k = 1, 2, ..., n$ ta thu được

$$\frac{n+2-u_n}{2-u_0} > \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow u_n < n+2-(2-u_0)\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\Rightarrow u_n < (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2-u_0}{2}\right).$$

Điều này là không thể vì khi n đủ lớn $\left(n > \dfrac{u_0}{2-u_0}\right)$ thì vế trái là số dương còn vế phải là số âm. Vậy luôn tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $u_k \in [-1;1]$.
Khi đó theo hệ thức $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$, suy ra $-\dfrac{1}{n} < u_n < \dfrac{1}{n}$ với mọi $n > k$. Do đó $|u_n\sqrt{n}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ với mọi $n > k$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\sqrt{n}) = 0$.

Bài 1.14. Rõ ràng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gồm toàn số dương và ta có

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{n}{a_n}\Big) \geqslant \sqrt{n}.$$

Do đó

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{n}{\sqrt{n-1}}\Big).$$

Bằng quy nạp ta suy ra với $n \geqslant 2$ thì

$$2^n a_{n+1} \leqslant a_1 + 2^{n-1}b_n + \cdots + 2b_3 + b_2,\ b_n = \frac{n}{\sqrt{n-1}}.$$

Đồng thời ta có $b_{n+1} > b_n \Leftrightarrow n^2 > n+1$, nên $\{b_n\}$ là dãy tăng. Khi đó

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1+(2^{n-1}+\cdots+1)b_n}{2^n} = \frac{1+(2^n-1)b_n}{2^n} < \frac{1}{2^n} + b_n.$$

Như vậy ta được

$$\sqrt{n} \leqslant a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{n}{\sqrt{n-1}},\ 1 \leqslant \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2^n\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Từ đây $[a_{2017}] = 44$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 1.$

Bài 1.15. Ta dễ dàng chứng tỏ được bất đẳng thức $e^x \geqslant x+1$, với mọi $(x \geqslant 1)$, hay $e^x - x \geqslant 1$, với mọi $(x \geqslant 1)$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} x_1 = 1,\ x_{n+1} &= \ln(e^{x_n} - x_n) \geqslant \ln 1 = 0, (n \geqslant 1) \\ x_{n+1} &= \ln(e^{x_n} - x_n) \leqslant \ln(e^{x_n}) = x_n, (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

Như vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy dương và đơn điệu giảm, nên nó hội tụ. Từ quan hệ $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n), (n \geqslant 1)$ ta dẫn tới $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}, (n \geqslant 1)$. Gọi giới hạn của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là l ta được $l = e^l - e^l = 0$. Xét tổng riêng

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &= (e^{x_1} - e^{x_2}) + (e^{x_2} - e^{x_3}) + \cdots + (e^{x_n} - e^{x_{n+1}}) \\ &= e^{x_1} - e^{x_{n+1}} = e - e^{x_{n+1}} \to e - 1\ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e - 1.$

Bài 1.16. Ta thấy $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n+2}$. Bằng cách khảo sát hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, (x \neq -2)$ ta thấy hàm này đơn điệu tăng với $x > -2$, nên ta suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng. Bằng quy nạp chứng tỏ được $-\frac{1}{2} \leqslant x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, rõ ràng $-\frac{1}{2} = x_1 < 0$. Giả sử $-\frac{1}{2} \leqslant x_n < 0$, ta có $\frac{3}{2} \leqslant x_n + 2 < 2$, dẫn đến $\frac{2}{3} \geqslant \frac{1}{x_n+2} > \frac{1}{2}$ và do đó $\frac{2}{3}x_n \leqslant x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} < \frac{1}{2}x_n < 0$. Mặt khác $-\frac{1}{2} \leqslant x_n$, nên $\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2}) \leqslant \frac{2}{3}\cdot x_n$ hay $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \leqslant \frac{2}{3}x_n \leqslant x_{n+1}$. Vậy ta có $-\frac{1}{2} \leqslant x_{n+1} < 0$. Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tăng và bị chặn (bởi 0), nên hội tụ. Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ta thấy $a = \dfrac{a}{a+2}$ và $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$, nên phải có $a = 0$. Khi đó $\frac{1}{2} \leqslant 1 + x_n < 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n) = 1 \neq 0$, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ không hội tụ và ta được $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+x_n) = +\infty.$

Bài 1.17. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $a_n = 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.
Thật vậy $2\sin\dfrac{\pi}{2^0} = 2\sin 0 = 0 = a_0,\ 2\sin\dfrac{\pi}{2^1} = 2\sin\dfrac{\pi}{2} = 2 = a_1$. Khi đó

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}} = \sqrt{2 - \frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\pi}{2^n}}} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}} \\ &= \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right) = 2\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 2\pi.$$

Bài 1.18. a) Hiển nhiên $a_n > 0, \forall n \geqslant 1$ và ta có

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \frac{1}{4a_n^2} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}^2 > a_n^2 + 1.$$

Từ đây bằng quy nạp dễ dàng có $a_n^2 \geqslant n$. Vẫn bằng quy nạp, ta chứng tỏ vế còn lại của bất đẳng thức. Rõ ràng bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n, tức là $a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$. Khi đó $a_{n+1}^2 < n + \sqrt[3]{n} + 1 + \dfrac{1}{4n}$, vì thế chỉ cần chứng tỏ $\sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1}$ là được. Thật vậy

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2} < 4n \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1 < 4\sqrt[3]{n}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức sau cùng suy ra từ việc $1 + \frac{1}{n} < 2$ và $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} < 4$.
b) Ta có

$$0 \leqslant a_n - \sqrt{n} < \sqrt{n + \sqrt[3]{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n + \sqrt[3]{n}} + \sqrt{n}} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \searrow 0.$$

Vậy ta được $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{n}) = 0$.

Bài 1.19. a) Từ nhận xét:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^4\left(1 - \cos\left(\frac{2}{n^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} 2n^4\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{\frac{\sin 1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) = 2$$

Mặt khác từ tính chất của dãy số thực hội, dãy tổng: $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ sẽ có cùng giới hạn với a_n (ta có thể chứng minh tính chất này bằng định nghĩa về giới hạn của dãy số), nghĩa là trong trường hợp này ta sẽ có giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

+b) Trước hết ta biến đổi:

$$\gamma_n = \ln(\beta_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln a_k\right)$$

Áp dụng tính chất đã nêu trong câu a) ta thấy rằng:

$$\beta_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\gamma_n} \to e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n} = e^{\ln 2} = 2 \to \lim_{n\to\infty}\beta_n = 2.$$

Bài 1.20. a) Từ giả thiết ta thấy ngay $u_n \geq -2000 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x) = \sin^2(x+11) - 2000, x \in \mathbb{R}$.

Ta thấy: $f'(x) = 2\sin(x+11)\cos(x+11) = \sin(2x+22)$ và $u_{n+1} = f(u_n)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có $g'(x) = \sin 2(x+11) - 1 \leq 0$, $g(-2000) = \sin^2(-1999) > 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến và có nghiệm duy nhất trong $[-2000; +\infty)$ gọi nghiệm đó là b thì phương trình $\sin^2(x+11) - x = 2000$ có nghiệm duy nhất là b.

b) Kí hiệu $\alpha = \max\limits_{[-2000;-1999]} \left|f'(t)\right|$. Khi đó $\alpha \in [0;1]$. Ta thấy $-2000 \leq u_n \leq -1999$.

Phương trình $|\sin 2(x+11)| = 1$ vô nghiệm trên $[-2000; -1999]$ nên $0 < \alpha < 1$.

Theo định lý Lagrange, ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $c_n \in (-2000; -1999)$ sao cho:

$$|u_{n+1} - b| = |f(u_n) - f(b)| = \left|f'(c_n)\right| |u_n - b| \leq \alpha |u_n - b|.$$

Từ đây theo phương pháp quy nạp ta được $|u_{n+1} - b| \leq \alpha^n |u_1 - b|$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} |u_{n+1} - b| = 0$ tức là $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Bài 1.21. Chúng ta xét bài toán tổng quát:

Cho dãy số (x_n) với $n = 1, 2, \cdots$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a\ (a > 1),\ x_2 = 1 \\ x_{n+2} = x_n - lnx_n\ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_{2k-1}} \quad (n \geq 2)$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{S_n}{n}\right)$?

Nhận xét rằng $x_{2n} = 1, n = 1, 2, \ldots$ do $\ln 1 = 0$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = 1$.

Tiếp theo ta chứng minh dãy (x_{2n+1}) cũng có giới hạn là 1.

Xét hàm số $f(x) = x - lnx$ liên tục và đồng biến trong $(1; +\infty)$ vì $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} > 0 \forall x > 1$.

Bị chặn:

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp, dãy (x_{2n+1}) bị chặn dưới bởi 1. Theo giả thiết thì $x_1 = a > 1$, giả sử $x_{2k+1} > 1$ thì $f(x_{2k+1}) > f(1) > 1$ nên hiển nhiên $x_{2k+3} > 1$ tức dãy (x_{2n+1}) bị chặn dưới bởi 1.

Giảm:

Ta chứng minh dãy (x_{2n+1}) là dãy giảm.

Thật vậy, do $x_{2n+1} > 1$ nên $\ln x_{2n+1} > 0$ vì thế $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -lnx_{2n+1} < 0$, tức dãy (x_{2n+1}) là dãy giảm.

Từ đó suy ra (x_{2n+1}) có giới hạn: $c = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}$.

Chuyển qua giới hạn dãy số ta được: $c = c - \ln c \Leftrightarrow c = 1$.

Vậy dãy số (x_n) có giới hạn là 1.

Theo định lý Cessaro, ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) = 1$.

Hay:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n+1}) + (x_2 + x_4 + ... + x_{2n})}{2n}\right) = 1.$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{nx_1 - (n-1)\ln x_1 - (n-2)\ln x_3 - \cdots - \ln x_{2n-3} + n}{2n}\right) = 1.$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{2} - \tfrac{S_n}{n} + \tfrac{1}{2}\right) = 1 \text{ hay } \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{a-1}{2}.$$

Áp dụng vào bài toán, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{2017-1}{2} = 1008$.

Bài 1.22. 1) Từ định nghĩa, suy ra $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng tới vô cùng.
Hơn nữa, chúng ta có thể chứng minh được: $a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 \left(a_1^2 - 4\right)$ bằng quy nạp.
Do đó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = \sqrt{a_1^2 - 4} \tag{1}$$

Mặt khác, với $n > 1$ thì:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{a_1 a_2 \ldots . a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots . a_n}\right) \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra tổng của chuỗi là:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2} = \frac{2017 - \sqrt{4068285}}{2}.$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln \frac{2}{1} - \ln \tfrac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} - \ln \frac{5}{4} + \cdots + \ln \frac{2n}{2n-1} - \ln \frac{2n+1}{2n} \\ &= \ln \frac{2.4.\ldots.2n}{1.3.\ldots.(2n-1)} - \ln \frac{3.5\cdots(2n+1)}{2.4\cdots 2n} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Kí hiệu $(2n)!!$ chỉ tích các số tự nhiên chẵn liên tiếp, $(2n-1)!!$ chỉ tích các số tự nhiên lẻ liên tiếp.

Từ công thức: $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$ suy ra: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ln \dfrac{\pi}{2}$.

2 Chuỗi số

Bài 2.1. Gọi A_n là số hạng thứ n của chuỗi trên. Khi đó ta có

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + 2017} \Leftrightarrow 2017 A_{n+1} = a_{n+1} A_n - a_{n+2} A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Lấy tổng hay vế từ 1 đến $n-1$, ta được

$$2017\left(S_n - A_1\right) = a_2 A_1 - a_{n+1} A_n,$$

trong đó S_n là tổng riêng thứ n của dãy. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} 0 < a_{n+1}A_n &= a_1 \frac{a_2 \cdots a_n a_{n+1}}{(a_2+2017)(a_3+2017)\cdots(a_{n+1}+2017)} \\ &= \frac{a_1}{\left(1+\frac{2017}{a_2}\right)\left(1+\frac{2017}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{2017}{a_{n+1}}\right)} < \frac{a_1}{2017\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{a_k}} \end{aligned}$$

Ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}A_n = 0$. Vì vậy, ta được

$$2017 \lim_{n\to\infty} S_n = (a_2+2017)\,A_1 = a_1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{2017}.$$

Bài 2.2. Xét hàm $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x \geq 1$, dễ thấy: đây là hàm nghịch biến và

$$f(2n) + f(2n+1) = f(n);\ M = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(2n)f(2n+1)$$

+) Mà ta đã có $\forall x > 0 : \ln(1+x) < x$ nên

$$f(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $g(n) = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} f^3(k)$ khi đó

$$g(n) = \sum_{k=n}^{2n-1} f^3(k) < nf^3(n) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} g(n) - g(n+1) &= f^3(n) - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\ &= [f(2n)+f(2n+1)]^3 - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\ &= 3\,[f(2n)+f(2n+1)]\,f(2n)f(2n+1) = 3f(n)f(2n)f(2n+1) \end{aligned}.$$

Từ đó:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}\,[g(1) - g(N+1)]\,.$$

Để ý rằng: $g(N+1) \to 0$ khi $N \to +\infty$. Từ đó, bằng cách cho $N \to +\infty$ ta nhận được :

$$M = \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}\ln^3(2).$$

Bài 2.3. a) Vì $a_n \downarrow 0$ nên

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

và

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i \ge \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Do đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ khi và chỉ khi $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$.
b) Vì $a_n \downarrow 0$ nên

$$\begin{aligned} \infty > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^{p-1}}{n^{1/p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{a_i^{p-1}}{i^{1/p}} &\ge \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{a_{2^{k+1}}^{p-1}}{(2^{k+1})^{1/p}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{k+1} a_{2^{k+1}}^p\right]^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến rằng $\sum_{k=1}^{\infty} \left[2^k a_{2^k}^p\right]^{(p-1)/p} < \infty$, và vì vậy

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}^p < \infty$$

bởi $0 < (p-1)/p < 1$. Do đó, việc áp dụng Câu (a), ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty.$$

Bài 2.4. Theo công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội bằng x, với $|x| < 1$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Mặt khác theo khai triển Taylor tại $x = 0$ ta có:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

Hai chuỗi số trên đều hội tụ tuyệt đối trong miền $|x| < 1$ vậy tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối trong miền đó và số hang tổng quát của tích sẽ có dạng:

$$a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}(-1)^{n-k}x^{n-k} = (-1)^{n-1}x^n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

Nghĩa là, nếu $|x| < 1$ ta sẽ có:

$$\frac{1}{1+x}\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}x^n\right)$$

Để xét miền hội tụ của chuỗi hàm nói trên ta sử dung tiêu chuẩn D'Alambert:

$$\frac{1}{1+x}\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^{n-1}x^n\right)$$

Ta biết rằng chuỗi số điều hòa là chuỗi phân kỳ, nên: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = +\infty$

Và $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$ suy ra:

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = |x|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right) = 1$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = |x|$

Từ đó ta rút ra các kết luận sau

a) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho bằng 1. (Miền hội tụ của chuỗi: $-1 < x < 1$

b) Trong miền hội tụ, chuỗi đã cho hội tụ về hàm số: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}\ln(1+x)$

3 Hàm số

Bài 3.1. Giả sử $f(x_0) = 0$ với $x_0 \in [a,b]$. Khai triển Taylor tại điểm x_0, tồn tại c_x nằm giữa x và x_0 sao cho

$$f(x) = f'(c_x)(x - x_0).$$

Do $|f(x)|$ liên tục trên $[a,b]$, lấy đoạn $G \subseteq [a,b]$, nên tồn tại $x_1 \in G$ sao cho

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &= \max\{|f(x)| : x \in G\} \\ &= \max\{|f'(c_x)||x - x_0| : x \in G\} \\ &\leq \max\{|f'(x)||x - x_0| : x \in G\} \\ &\leq \max\{|f(x)||x - x_0| : x \in G\} \end{aligned}$$

Chọn $G = [x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}] \cap [a,b]$. Khi đó,

$$|f(x_1)| \leq \frac{1}{2}\max\{|f(x)| : x \in G\} = \frac{1}{2}|f(x_1)| \Rightarrow f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in G.$$

Tịnh tiến x_0 trên $[a,b]$, ta có $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a,b]$.

Bài 3.2. Với $n = 0, 1, 2, ...$, đặt

$$T_n = \left\{\frac{i}{2^n} : i = 0, 1, ..., 2^n\right\} \quad \text{và} \quad T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Chú ý rằng T trù mật trong $[0,1]$ nên để chứng minh f là hàm lồi trên $[a,b]$ ta chứng minh rằng với $x, y \in [a,b]$ và $s \in T_n$ thì

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y), \tag{6.3}$$

với mỗi $n = 0, 1, ...$ Thật vậy, với $n = 0$, ta có $T_0 = \{0, 1\}$ và do đó (6.3) thỏa. Giả sử (6.3) đúng với $n = 0, 1, ..., k$, ta chứng minh rằng (6.3) đúng với $k+1$. Lấy $s \in T_{k+1}$, nếu $s \in T_k$ thì rõ ràng (6.3) đúng bởi giả thuyết quy nạp. Nếu $s \notin T_k$ thì tồn tại $\alpha, \beta \in T_k$ sao cho $s = \frac{\alpha+\beta}{2}$ và do đó

$$\begin{aligned} f(sx + (1-s)y) &= f\left(\frac{\alpha x + (1-\alpha)y + \beta x + (1-\beta)y}{2}\right) \\ &\leq \frac{f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f(\beta x + (1-\beta)y)}{2} \\ &\leq \frac{\alpha+\beta}{2}f(x) + \left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)f(y) \\ &= sf(x) + (1-s)f(y). \end{aligned}$$

Vì vậy (6.3) đúng với $s \in T$. Do tính chất liên tục của f và tính trù mật của T trong $[0,1]$ ta suy ra

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y), \ \forall s \in [0,1].$$

Vậy f là hàm lồi.

Bài 3.3. Giả sử trái lại $|f'(l)| > 1$. Vì f liên tục và $x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n \geq 1$ nên chuyển qua giới hạn ta có $f(l) = l$. Vì $\lim\limits_{x \to l} \frac{f(x)-f(l)}{x-l} = f'(l)$ nên

$$\lim_{x \to l} \left| \frac{f(x) - f(l)}{x - l} \right| = |f'(l)| > 1.$$

Lấy $\epsilon = \frac{|f'(l)|-1}{2} > 0$, khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in (l-\delta, l+\delta)$ ta có

$$|f'(l)| - \epsilon < \left| \frac{f(x) - f(l)}{x - l} \right| < |f'(l)| + \epsilon,$$

do đó

$$\frac{|f'(l)| + 1}{2} < \left| \frac{f(x) - f(l)}{x - l} \right|.$$

Vì $|f'(l)| > 1$ nên

$$|x - l| < |x - l| \frac{|f'(l)| + 1}{2} < |f(x) - f(l)|$$

với mọi $x \in (l-\delta, l+\delta)$. Vì $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ nên tồn tại $N \geq 1$ sao cho với mọi $n \geq N$, ta có $x_n \in (l-\delta, l+\delta)$. Vậy

$$|x_n - l| < |f(x_n) - f(l)| = |x_{n+1} - l|$$

với mọi $n \geq N$. Đặc biệt ta có

$$|x_N - l| < |x_{N+1} - l| < |x_n - l|$$

với mọi $n > N+1$. Cho $n \to \infty$ ta được

$$|x_N - l| < |x_{N+1} - l| \leq 0,$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn. Do đó ta phải có $|f'(l)| \leq 1$.

Bài 3.4. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Với mọi $x \in [0,1]$, do f đồng biến nên $\lim\limits_{t \to x^-} f(t)$ và $\lim\limits_{t \to x^+} f(t)$ tồn tại. Đặt $r(x) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t) - \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$. Do f đồng biến và không liên tục tại bất kì điểm nào nên $r(x) > 0$ với mọi $x \in [0,1]$.

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $A_n = \left\{x \in [0,1] : r(x) > \dfrac{1}{n}\right\}$ thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$. Nếu tất cả các tập hợp A_n đều hữu hạn thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ là một tập hợp vô hạn đếm được, mâu thuẫn vì $[0,1]$ là một tập hợp vô hạn không đếm được.
Do đó tồn tại n_0 sao cho tập hợp A_{n_0} có vô hạn phần tử.
Chọn ra một dãy (a_n) các phần tử phân biệt trong A_{n_0}. Từ tính đồng biến của f và định nghĩa của A_{n_0} ta có $f(1) - f(0) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} r(a_k) \geq \dfrac{n}{n_0}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Cho $n \to \infty$, ta nhận được điều vô lý: $f(1) - f(0) \geq +\infty$. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa bài toán.

Bài 3.5. Ta có $f'(x) = \left(e^{x^x \ln x}\right)' = x^{x^x}\left(x^x \ln x\right)' = x^{x^x}\left((e^{x\ln x})' \ln x + x^{x-1}\right) = x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)$. Vậy $f'(x) = x^{x^x + x}\left((\ln x + 1)\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

- Nếu $x \geq 1$ thì $\ln x \geq 0$ nên $f'(x) > 0$.
- Nếu $0 < x < 1$ thì $(\ln x + 1)\ln x = \left(\ln x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \geq -\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{1}{x} > 1$ nên ta cũng có $f'(x) > 0$.

Vậy f đồng biến trên $(0, +\infty)$. Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x} = 1$ vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$. Do đó $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^1 = 0$.

Bài 3.6. a. Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$. Dễ thấy $g'(x) < 0$ với mọi $x \in [1/2; 1]$. Do đó $g(x)$ đơn điệu trên đoạn $[1/2;1]$. Mặt khác, ta cũng có $g(1/2).g(1) < 0$ và g liên tục trên $[1/2;1]$. Suy ra $g(x) = 0$ hay $x = f(x)$ có duy nhất một nghiệm trong đoạn $[1/2;1]$. Hơn nữa,

$$f"(x) = \frac{(x^2 - 2x + 3)e^x}{(x+1)^4} > 0,\ \forall x \in [1/2;1].$$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $[1/2;1]$.
b. Ta sẽ chứng minh $u_n \in [1/2;1]$ với mọi $n \geq 1$ theo quy nạp. Thật vậy, với $n = 1$ thì $u_1 \in [1/2;1]$. Giả sử, $u_n \in [1/2;1]$ với $n \geq 1$ nào đó. Vì $f(x)$ đơn điệu giảm trên $[1/2;1]$ nên $f(1) \leq u_{n=1} = f(u_n) \leq f(1/2)$. Dễ thấy, $u_{n+1} \in [f(1); f(1/2)] \subset [1/2;1]$ và do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.7. Xét hàm số $g(x) = f^2(x)/2 + f'(x),\ x \in \Re$. Ta có, $g(0) = 0$ và $g'(x) = f(x)f'(x) + f"(x)$. Theo định lý Rolle, ta chỉ cần chứng minh tồn tại $\mu \in (0;1)$ sao cho $g(\mu) = 0$. Ta xét hai trường hợp sau:

TH1: $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [0;1]$. Đặt $h(x) = x/2 - 1/f(x)$ với $x \in [0;1]$. Ta có, $h(x)$ xác định trên $[0;1]$ và $h'(x) = 1/2 = f'(x)/f^2(x)$, $h(0) = h(1/2) = -1/2$. Áp dụng định lý Rolle suy ra tồn tại $\mu \in (0,1)$ sao cho $h'(\mu) = 0$ hay $g(\mu) = 0$. Theo định lý Rolle cho hàm $g(x)$, suy ra tồn tại $c \in (0,\mu) \subset (0;1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.
TH2: Tồn tại $x \in [0;1]$ sao cho $f(x) = 0$. Khi đó ta đặt

$$z_1 = \inf\left\{x \in [0;1] : f(x) = 0\right\},$$

$$z_2 = \sup\left\{x \in [0;1] : f(x) = 0\right\}.$$

Từ tính liên tục của hàm f và tính chất $\inf$ và $\sup$ ta có $f(z_1) = f(z_2) = 0$. Do đó, $0 < z_1 \leq z_2 < 1$. Ngoài ra, dễ dàng thấy rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0;z_1)$ hoặc $x \in (z_2;1]$. Do đó, $g(z_1) = f'(z_1) \leq 0$ và $g(z_2) = f'(z_2) \geq 0$. Do đó, tồn tại $c \in [z_1;z_2] \subset (0;1)$ sao cho $g(c) = 0$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.8. Nếu $b = 0$ thì ta thu được ngay kết quả. Giả sử $b > 0$. Xét $h(x) = e^{-bx}\left(\int_0^x f(t)dt + \frac{a}{b}\right)$. Ta có

$$h'(x) = e^{-bx}\left(f(x) - a - b\int_0^x f(t)dt\right) \leq 0,\ \forall x \geq 0.$$

Do đó h là hàm giảm trên $[0;+\infty)$ và $h(x) \leq h(0)$ với mọi $x \in [0;+\infty)$. Suy ra

$$e^{-bx}\left(\int_0^x f(t)dt + \frac{a}{b}\right) \leq \frac{a}{b},\ \forall x \geq 0.$$

Do đó

$$a + b\int_0^x f(t)dt \leq ae^{bx},\ \forall x \geq 0.$$

Kết hợp điều này với giả thiết ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.9. Ta có

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)\right]}$$

Xét

$$A = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(f\left(2\sqrt{t}\right)\right)}{t} \quad \text{với} \quad t = \frac{1}{x}.$$

Dùng Lô pi tan:

$$A = \lim_{t\to0^+}\frac{f'(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}f(2\sqrt{t})}$$

Lại dùng Lô pi tan:

$$A = \lim_{t\to 0^+} \frac{2f''(2\sqrt{t})}{f(2\sqrt{t}) + 2\sqrt{t}f'(2\sqrt{t})} = 2$$

Vậy: $L = e^2$.

Bài 3.10. Xét hàm số

$$g(x) = xf(x)e^{-x}, \quad x \in [0,1].$$

Khi đó $g(0) = g(1) = 0$, và vì vậy, bởi Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$0 = g'(c) = e^{-c}(cf'(c) + f(c) - cf(c)).$$

Điều này dẫn đến

$$f'(c) = f(c)\frac{c-1}{c}.$$

Bài 3.11. Xét $x_0 \in \mathbb{R}$.
T.hợp 1: $x_0 \neq 0$, do tính trù mật của $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại các dãy $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ và $\{x_m\} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x_0$ và $x_m \to x_0$.
Mặt khác $f(x_n) = x_n^\alpha \to x_0^\alpha, \quad f(x_m) = -x_m^\alpha \to -x_0^\alpha \neq x_0^\alpha$.
Điều này suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, tức là $f(x)$ không liên tục và không khả vi tại x_0.
T.hợp 2: $x_0 = 0$, khi đó mọi dãy $\{x_n\}$ mà $x_n \to 0$, ta có x_n^α và $-x_n^\alpha$ đều hội tụ về $f(0) = 0$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ với mọi $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
+) Nếu $\alpha = 1$ ta có: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ nếu } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$
Bằng cách chọn dãy như trên ta suy ra $f(x)$ không khả vi tại 0.
+) Nếu $\alpha > 1$ ta có: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} x^{\alpha-1} \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ -x^{\alpha-1} \text{ nếu } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$
Suy ra: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ hay $f(x)$ khả vi tại 0.
Kết luận:
+) Hàm số không liên tục và không khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}^*$ với mọi $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
+) Nếu $\alpha = 1$ thì $f(x)$ chỉ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại điểm này.
+) Nếu $\alpha > 1$ thì $f(x)$ liên tục và khả vi tại 0.

Bài 3.12. +) Trước hết ta chứng minh rằng nếu $g(x)$ là hàm có đạo hàm đến cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) trên $\mathbb{R}$ và $g^{(n)}(x) > 0$ (hoặc $g^{(n)}(x) < 0$) với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $g(x) = 0$ có tối đa n nghiệm thực.

Thật vây, giả sử phương trình $g(x) = 0$ có đến $n + 1$ nghiệm $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{n+1}$.
Khi đó tồn tại $x_i' \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 1, ..., n$ sao cho $g'(x_i') = 0$.
Tương tự tồn tại $x_i'' \in [x_i', x_{i+1}'],\ i = 1, ..., n-1$ sao cho $g''(x_i'') = 0$.
...
Cuối cùng, tồn tại $x_1^{(n)} \in [x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}]$ sao cho $g^{(n)}(x_1^{(n)}) = 0$. Điều này mâu thuẩn với giả thiết.
Vậy phương trình $g(x) = 0$ có không quá n nghiệm thực. Chẳng hạn với đa thức $g(x) = (x-1)(x-2)...(x-n)$, dễ thấy $g^{(n)}(x) = n! > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và phương trình $g(x) = 0$ có n nghiệm thực.
+) Áp dụng kết quả trên vào bài toán, ta có $f^{(n+1)}(x) = \Big(e^x + p(x)\Big)^{(n+1)} = e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa $n+1$ nghiệm thực.

Bài 3.13. a) Với $x \neq 0$, ta có: $f'(x) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$.

Với $x = 0$ thì $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left[-h\left(2 + \sin\dfrac{1}{h}\right)\right] = 0$.

Vậy $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(x) \leq 2 = f(0)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

b) Giả sử tồn tại $\varepsilon > 0$ thỏa mãn bài toán.

Do $-4x \to 0$ và $-2x\sin\frac{1}{x} \to 0$ khi $x \to 0$ nên với $|x|$ đủ nhỏ thì:

$$\left|-4x - 2x\sin\frac{1}{x}\right| < 1.$$

Từ đó, với số nguyên dương k đủ lớn, ta có: $x = -\dfrac{\pi}{2k+1} \in (-\varepsilon; 0)$ và $x = \dfrac{1}{2k\pi} \in (0; \varepsilon)$ ($|x|$ đủ nhỏ).

Ta có: $f'\left(-\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right) < 0$ và

$$f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) > 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại $\varepsilon > 0$ như đã giả thiết.

Vậy không tồn tại số thực $\varepsilon > 0$ sao cho $f'(x) > 0\ \forall x \in (-\varepsilon; 0)$ và $f'(x) < 0\ \forall x \in (0; \varepsilon)$.

4 Phép tính vi phân

Bài 4.1. Đặt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Khi đó

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow g"(x) = \frac{2f'^2(x) - f(x).f"(x)}{f^3(x)}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$g(x) > 0, g'(x) < 0, g"(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0, \infty).$$

Do $g'(x) < 0$ và hàm số $g'(x)$ đồng biến trên $[0, \infty)$, nên tồn tại hữu hạn

$$C = \lim_{x \to \infty} g'(x) \leq 0.$$

Nếu $C < 0$, thì $g^{'}(x) \leq C$. Suy ra $g(x) \leq Cx + g(0)$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Mà giới hạn $\lim_{x\to\infty}(Cx + g(0)) = -\infty$. Do đó, tồn tại x_0 đủ lớn sao cho $Cx_0 + g(0) < 0$ và $g(x_0) < 0$, trái với giả thiết $g(x) > 0$ với mọi $x \in [0, \infty)$.

Bài 4.2.

a) Trên khoảng $(0; +\infty)$: $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$ liên tục. Tại $x = 0$.

- Nếu $a = 0$: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Nếu } x > 0 \\ 0 & \text{Nếu } x = 0 \end{cases}$. Do đó $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$. Hàm số gián đoạn tại $x = 0$.
- Nếu $a > 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \neq 0 = f(0)$. Hàm số gián đoạn tại $x = 0$.
- Nếu $a < 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Hàm số liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số liên tục trên đoạn $[0; +\infty) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục phải tại $x = 0 \Leftrightarrow a < 0$.

b) " $\Rightarrow$: ". Giả sử hàm số có đạo hàm trên đoạn $[0; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên đoạn $[0; +\infty)$. Theo câu trên $a < 0$.
" $\Leftarrow$: " Giả sử $a < 0$.

- Trên khoảng $(0; +\infty)$: $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$ $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}.e^{\frac{a}{x}}$. Vậy hàm số có đạo hàm trên $(0; +\infty)$.

- Tại $x = 0$:
  $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{a}{x}}}{x}$.
  Đặt $\dfrac{1}{x} = t$. Khi $x \to 0^+$ thì $t \to +\infty$. $f'(0^+) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{e^{-at}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{-ae^{-at}} = 0$. Vậy hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Vậy hàm số khả vi trên $[0; +\infty) \Leftrightarrow a < 0$.

c) " $\Rightarrow$: ". Giả sử hàm số có đạo hàm mọi cấp trên đoạn $[0; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên đoạn $[0; +\infty)$. Theo câu trên $a < 0$.
" $\Leftarrow$: " Giả sử $a < 0$. Ta chứng minh bằng quy nạp

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{a}{x}} & \text{Nếu } x > 0 \\ 0 & \text{Nếu } x = 0 \end{cases}.$$

Với $P_n(x)$ là đa thức có $\deg P_n = 2n$ với mọi n. (1) Thật vậy, với $n = 1$. Theo câu b ta có $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{x^2}.e^{\frac{a}{x}} & \text{Nếu } x > 0 \\ 0 & \text{Nếu } x = 0 \end{cases}$. $P_1(x) = -ax^2$ và $\deg P_1 = 2.1$. Giả sử (1) đúng với $n = k$: Tức là $f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{a}{x}} & \text{Nếu } x > 0 \\ 0 & \text{Nếu } x = 0 \end{cases}$.
Với $P_k(x)$ là đa thức có $\deg P_k = 2k$. Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$.

- Trên khoảng $(0; +\infty)$.

  $$f^{(k+1)}(x) = P_k'\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right).e^{\frac{a}{x}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right).-\left(\frac{a}{x^2}\right).e^{\frac{a}{x}}.$$

  Suy ra $P_{k+1}(x) = -P_k'(x).x^2 - P_k(x).ax^2$, từ đó
  $\deg(P_{k+1}) = \max\{\deg P_k - 1 + 2; \deg P_k + 2\} = \deg P_k + 2 = 2k + 2 = 2(k+1)$.

- Tại $x = 0$. $f^{(k+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{P_k\left(\frac{1}{x}\right).e^{\frac{a}{x}}}{x}$. Đặt $\dfrac{1}{x} = t$. Khi $x \to 0^+$ thì $t \to +\infty$. $f^{(k+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{P_k(t).t}{e^{-at}}$. Sử dụng quy tắc L'Hospital $2k+1$ lần ta được: $f^{(k+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{c}{(-a)^{2k+1}e^{-at}} = 0$.

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$. Vì n tùy ý nên ta có hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên $[0; +\infty)$.

Bài 4.3. Cho $x = 0$. Ta có: $2f(0) \geq 0 \Rightarrow f(0) \geq 0$. Mà $f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Đặt $g(x) = x^2 f(x) - \dfrac{x^{2019}}{3}$ $g(0) = 0$. $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 673x^{2018} = x(2f(x) + xf'(x) - 673x^{2017}) \geq 0$ với mọi $x \in [0; +\infty) \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó $g(x) > g(0) = 0$ với mọi $x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x) - \dfrac{x^{2017}}{3} > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ Mà $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) - \dfrac{x^{2017}}{3} \geq 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Bài 4.4. Vì $0 = f(0) < \dfrac{1}{2017} < f(1) \Rightarrow$, hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ (hàm khả vi thì liên tục) tồn tại $a \in (0, 1)$ sao cho $f(a) = \dfrac{1}{2017}$. Vì $f(a) = \dfrac{1}{2017} < \dfrac{673}{2017} < 1 = f(1)$, hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, 1]$ $(\subset [0, 1])$ nên tồn tại $b \in (a, 1)$ sao cho: $f(b) = \dfrac{673}{2017}$.

Vậy ta có $0 < a < b < 1$ và $f(a) = \dfrac{1}{2017}$, $f(b) = \dfrac{673}{2017}$.

Áp dụng định lý Lagrange trên $[0, a]$ ta có: Tồn tại $x_1 \in (0, a)$ sao cho $f'(x_1) = \dfrac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \dfrac{1}{2017a}$. Do đó $\dfrac{1}{f'(x_1)} = 2017a$. (1)

Áp dụng định lý Lagrange trên $[a, b]$ ta có: Tồn tại $x_2 \in (a, b)$ sao cho $f'(x_2) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{672}{2017(b - a)}$. Do đó $\dfrac{672}{f'(x_2)} = 2017(b - a)$. (2)

Áp dụng định lý Lagrange trên $[b, 1]$ ta có: Tồn tại $x_3 \in (b, 1)$ sao cho $f'(x_3) = \dfrac{f(1) - f(b)}{1 - b} = \dfrac{1344}{2017(1 - b)}$. Do đó $\dfrac{1344}{f'(x_3)} = 2017(1 - b)$. (3).

Cộng 2 vế của $(1), (2), (3)$ ta có: $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{672}{f'(x_2)} + \dfrac{1344}{f'(x_3)} = 2017$.

Bài 4.5. Đặt

$$f(x_1) = \max_{x \in [0,1]} f(x),\ f(x_2) = \min_{x \in [0,1]} f(x).$$

Trường hợp 1: $f'(1) > 0, f'(0) < 0$. Theo định nghĩa của đạo hàm, ta có

$$f'(1) = f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > 0$$

và

$$f'(0) = f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} < 0.$$

Khi đó, tồn tại $a, b \in (0,1)$ sao cho $0 < a < b < 1$ thỏa mãn $f(a) < f(0)$ và $f(b) < f(1)$. Suy ra $x_2 \in (0,1)$. Vậy, x_2 là điểm cực tiểu. Theo Fermat, $f'(x_2) = 0$ và chọn $c := x_2$.
Trường hợp 1: $f'(1) < 0, f'(0) > 0$. Tương tự như Trường hợp 1, chọn $c := x_1$.

Bài 4.6. Với mọi $x \in (a,b)$, đặt

$$g(t) = f(t) - (t-a)(t-b)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

Khi đó

$$g(a) = g(b) = g(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b].$$

Áp dụng định lý Rolle cho hàm $g(x)$ trên $[a,x]$, tồn tại $y_x \in (a,x)$ sao cho

$$g'(y_x) = 0 \Rightarrow g'(y_x) = f'(y_x) - (2y_x - a - b)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = 0.$$

Áp dụng định lý Rolle cho hàm $g(x)$ trên $[x,b]$, tồn tại $z_x \in (x,b)$ sao cho

$$g'(z_x) = 0 \Rightarrow g'(z_x) = f'(z_x) - (2z_x - a - b)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = 0.$$

Áp dụng định lý Rolle cho hàm

$$h(t) := f'(t) - (2t - a - b)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}$$

trên $[y_x, z_x]$, tồn tại $c_x \in (y_x, z_x)$ sao cho

$$h'(c_x) = 0 \Rightarrow h'(c_x) = f''(c_x) - 2\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = 0.$$

Thay $x = \frac{a+b}{2}$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.7. Vì f khác 0 nên đặt $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)}$ là hàm liên tục, khả vi và

$h(0) = -\frac{1}{2}, h(1) = -\frac{1}{2}$. Theo Rolle tồn tại $a \in (0,1)$ sao cho $h'(a) = 0$. Nghĩa là $\frac{1}{2} + \frac{f'(a)}{f^2(a)} = 0$.
Đặt $g(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$ là hàm liên tục, khả vi và $g(0) = 0, g(a) = 0$. Theo Rolle tồn tại $x_0 \in (0,a)$ sao cho $g'(x_0) = 0$. Hay

$$g'(x_0) = f(x).f'(x_0) + f''(x_0) = 0.$$

Bài 4.8. Đặt $v_n = \frac{a^{n+1}}{n}$ là dãy tăng và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.
Đặt $u_n = a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}$. Ta tính được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{1}{a-1}$$

Theo Định lý Stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\big(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}\big) = \frac{1}{a-1}.$$

Bài 4.9. Theo Lagrange

$$\begin{array}{l} \exists t_1 \in (a;b) : f(b) - f(a) = (b-a)f'(t_1) \\ \exists t^* \in (b;c) : f(c) - f(b) = (c-b)f'(t^*) \end{array}$$

Khi đó ta có

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\frac{c-b}{c-a} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{c-a} = kf'(t^*) + (1-k)f'(t_1)$$

Vì $k = \dfrac{c-b}{c-a} \in (0,1)$, nên $kf'(t^*) + (1-k)f'(t_1)$ nằm giữa hai giá trị $f'(t^*)$ và $f'(t_1)$. Và theo giả thiết f' là hàm liên tục, nên theo Định lý giá trị trung gian đối với hàm f' thì sẽ tồn tại giá trị $t_2 \in (t_1;t^*) \subseteq (a;c)$ sao cho

$$f'(t_2) = kf'(t^*) + (1-k)f'(t_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Từ đó ta nhận được điều cần chứng minh.

Bài 4.10. Giả sử $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Ta có $f(0) + f(1) + f(-1) = 2a + 3$ không chia hết cho 3 nên a không chia hết cho 3. Đặt $a = 3k + r$ $(r \in \{1,\ 2\})$. Ta có

$$f(n) = (n+k)^3 + rn^2 + (b - 3k^2)n + c - k^3.$$

Khi n đủ lớn thì $rn^2+(b-3k^2)n+c-k^3>0$ do đó $f(n)>(n+k)^3$ khi n đủ lớn. Lại có

$$f(n)=(n+k+1)^3+(r-3)\,n^2+\big(b-3(k+1)^2\big)\,n+c-(k+1)^3.$$

Khi n đủ lớn thì

$$(r-3)\,n^2+\big(b-3(k+1)^2\big)\,n+c-(k+1)^3<0,$$

do đó $f(n)<(n+k+1)^3$ khi n đủ lớn. Như vậy nếu n đủ lớn thì

$$(n+k)^3<f(n)<(n+k+1)^3.$$

Từ đây ta suy ra $\left[\sqrt[3]{f\,(n)}\right]=n+k$, khi n đủ lớn, trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số x. Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{f\,(n)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{f\,(n)}-(n+k)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\,(n)-(n+k)^3}{\left(\sqrt[3]{f\,(n)}\right)^2+\sqrt[3]{f\,(n)}\,(n+k)+(n+k)^2}.$$

Thay $f(n)=n^3+(3k+r)\,n^2+bn+c$ vào (1) ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{f\,(n)}\right\}=\dfrac{r}{3}=\left\{\dfrac{a}{3}\right\}$.

Bài 4.11. Ta thấy ngay $g(a)\neq g(b)$, vì nếu ngược lại thì theo định lý Rolle $\exists c\in(a,b)$ để $g'(c)=0$ mâu thuẫn với $g'(x)\neq 0,\forall x\in[a,b]$. Xét các hàm $u(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ và $v(x)=-\frac{1}{g(x)}$. Ta thấy $u(x),v(x)$ khả vi trên $[a,b]$ với

$$u'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}\quad\text{và}\quad v'(x)=\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Theo định lý Cauchy $\exists\xi\in(a,b)$ sao cho

$$\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}=\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)},\ \text{hay}$$

$$\frac{f'(\xi)g(\xi)-g'(\xi)f(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\frac{f(b)}{g(b)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{\frac{1}{g(a)}-\frac{1}{g(b)}},\ \text{hay}$$

$$\frac{1}{g'(\xi)}\det\begin{bmatrix}f(\xi)&g(\xi)\\f'(\xi)&g'(\xi)\end{bmatrix}=\frac{1}{g(b)-g(a)}\det\begin{bmatrix}f(a)&f(b)\\g(a)&g(b)\end{bmatrix}.$$

Bài 4.12. Xét hàm $g(x) = [f(x)]^\alpha [f(1-x)]^\beta, x \in [0,1]$. Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và $g(x) > 0, \forall x \in (0,1)$, đồng thời

$$\begin{aligned} g'(x) &= \alpha [f(x)]^{\alpha-1} f'(x) [f(1-x)]^\beta - \beta [f(1-x)]^{\beta-1} f'(1-x) [f(x)]^\alpha \\ &= g(x) \Big[\alpha \frac{f'(x)}{f(x)} - \beta \frac{f'(1-x)}{f(1-x)} \Big]. \end{aligned}$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Nhưng $g(c) \neq 0$, nên ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.13. Xét khai triển Taylor của $f(x)$ tại $x = 0$ và $x = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(\xi_x)}{6} x^3, \\ f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\eta_x)}{6}(x-1)^3, \end{aligned}$$

với $0 \leqslant \xi_x \leqslant x$ và $x \leqslant \eta_x \leqslant 1$. Từ giả thiết ta dẫn đến

$$f(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{6} x^3, \quad f(x) = 1 + \frac{f'''(\eta_x)}{6}(x-1)^3.$$

Lấy $x = \dfrac{1}{2}$ thì tồn tại $\xi \in [0, \frac{1}{2}], \eta \in [\frac{1}{2}, 1]$ để $f'''(\xi) + f'''(\eta) = 48$. Tổng 2 số bằng 48, nên phải có 1 số $\geqslant 24$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.14. Gọi $h = \dfrac{8}{(b-a)^2} \Big[\dfrac{f(a) + f(b)}{2} - f(\dfrac{a+b}{2}) \Big]$ và xét hàm

$$g(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - f(\frac{a+x}{2}) - \frac{(x-a)^2}{8} h.$$

Ta có $g(a) = g(b) = 0$, theo định lý Rolle tồn tại $d \in (a,b)$ sao cho $g'(d) = 0$, tức là

$$\frac{1}{2}[f'(d) - f'(\frac{a+d}{2})] - \frac{d-a}{4} h = 0 \quad \text{hay} \quad f'(d) - f'(\frac{a+d}{2}) = \frac{d-a}{2} h.$$

Bây giờ áp dụng định lý Lagrange cho hàm f' trên đoạn $[\frac{a+d}{2}, d]$ ta thấy tồn tại $c \in (\frac{a+d}{2}, d) \subset (a,b)$ sao cho

$$f''(c) = \frac{f'(d) - f'(\frac{a+d}{2})}{\frac{d-a}{2}} = h.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.15. Hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ đồng biến trong $[a;b]$ nên nó liên tục trên đó. Hơn nữa:

$$\forall x, y \in [a,b] : x \neq y \Leftrightarrow f'(x) \neq f'(y) \qquad (1)$$

Áp dụng định lí Lagrange, ta có:

$$\exists \gamma \in (a,b) : f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 1, \qquad (2)$$

Đặt $g(x) = f(x) + x - \dfrac{a+b}{2}$, hàm này liên tục trên $[a,b]$ và $g(a).g(b) = -(a-b)^2 < 0$.

Suy ra tồn tại $x_0 \in [a,b]$ $g(x_0) = 0$, hay: $f(x_0) = \dfrac{a+b}{2} - x_0$.

Lúc này, lại áp dụng định lí Lagrange, tồn tại $\alpha \in (a;x_0)$ và $\beta \in (x_0;b)$ sao cho:

$$f'(\alpha).f'(\beta) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x-a}.\frac{f(b) - f(x_0)}{b-x_0} = 1 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra α, β phân biệt trong (a,b) và $f'(\alpha).f'(\beta).f'(\gamma) = 1$.

5 Phép tính tích phân

Bài 5.1. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\left(\int_0^x t^{1008} f(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^x t^{2016}dt\right)\left(\int_0^x f^2(t)dt\right) \leq \left(\int_0^x t^{2016}dt\right)\frac{x^{2017}}{2017} = \left(\int_0^x t^{2016}dt\right)^2.$$

Suy ra

$$\int_0^x t^{1008} f(t)dt \leq \int_0^x t^{2016}dt \Rightarrow F(x) := \int_0^x [t^{2016} - t^{1008} f(t)]dt \geq 0 \ \ \forall x \in [0,1].$$

Khi đó, ta có

$$\int_0^1 [x^{2015} - x^{1007} f(x)]dx = \int_0^1 \frac{1}{x}[x^{2016} - x^{1008} f(x)]dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} F'(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dF(x) = F(1) + \int_0^1 \frac{1}{x^2} F(x)dx \geq 0.$$

Chú ý rằng

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0} [x^{2016} - x^{1008} f(x)] = 0.$$

Khi đó,

$$\int_0^1 [x^{2015} - x^{1007} f(x)]dx \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 x^{1007} f(x)dx \leq \frac{1}{2016}.$$

Bài 5.2. Ta có $f'(x) = (x^2)'.\dfrac{e^{x^2}}{x^2-1} - (x)'.\dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{2x.e^{x^2} - (x+1).e^x}{x^2-1}$ Vì $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow e^{x^2} > e^x \Rightarrow f'(x) > \dfrac{2xe^x - (x+1)e^x}{x^2-1} = \dfrac{e^x}{x+1} > 0$ với mọi $x > 1$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ Ta có $e^{x^2}.\displaystyle\int_x^{x^2} .\frac{dt}{t-1} > f(x) > e^x.\displaystyle\int_x^{x^2} .\frac{dt}{t-1} \Leftrightarrow e^{x^2}.\ln|t|\Big|_x^{x^2} > f(x) > e^x.\ln|t|\Big|_x^{x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}.\ln|x+1| > f(x) > e^x.\ln|x+1|$ với mọi $x > 1$. $\lim_{x\to+\infty}\Big(e^x \ln|x+1|\Big) = +\infty \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\Big(e^{x^2}.\ln|x+1|\Big) = \lim_{x\to 1^+}(e^x.\ln|x+1|) = e.\ln 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = e.\ln 2$. Vậy $f(x) \in (e.\ln 2; +\infty)$.

Bài 5.3. Đặt

$$g(x) = e^{-2017x} \int_0^{x^2} f(t)dt.$$

Khi đó, ta có $g(0) = 0$ và $g(1) = e^{-2017} \int_0^1 f(x)dx$. Đặt

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow g(x) = e^{-2017x} F(x^2).$$

Khi đó

$$F(1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx.$$

Suy ra

$$\int_0^1 F(x)dx = 0 \Rightarrow \text{ tồn tại } d \in (0,1] \text{ sao cho } F(d^2) = 0 \Rightarrow g(d) = 0.$$

Áp dụng định lý Rolle cho $g(x)$ trên $[0,d]$, tồn tại $c \in (0,d)$ sao cho $g'(c) = 0$. Mà

$$g'(x) = e^{-2017x}\left[-2017\int_0^{x^2} f(t)dt + 2xf(x^2)\right], g'(c) = 0 \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

Bài 5.4. Cố định $x_0 \in (0,1)$, giả sử $x = x_0$. Đặt $x_n = f_n(x_0), n = 1, 2, ...$ Suy ra $x_n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f(x_0)}_{n \text{ lần}}$.

Ta có $x_1 = f(x_0) = 2x_0(1 - x_0) \in (0, \frac{1}{2}]$. Dùng quy nạp chứng minh được

$$x_n \leq f(x_n) \leq \frac{1}{2}$$

và dãy tăng nên dãy x_n có giới hạn bằng $\dfrac{1}{2}$.

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n dx = \frac{1}{2},$$

theo Định lý hội tụ đơn điệu của Beppo-Levi.

Bài 5.5. Đặt $M = \max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|$. Suy ra $-M \leq f'(x) \leq M, \forall x \in [0,1]$.

Suy ra $-Mf(x) \leq f(x)f'(x) \leq Mf(x)$ hay $-M\displaystyle\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x f(t)f'(t)dt \leq$

$M\displaystyle\int_0^x f(t)dt$

Hay $-M\displaystyle\int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0) \leq M\int_0^x f(t)dt$

Khi đó $-Mf(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{2}f^3(x) - \frac{1}{2}f^2(0)f(x) \leq Mf(x)\int_0^x f(t)dt$

nên

$$-\frac{M}{2}[(\int_0^x f(t)dt)^2]' \leqslant \frac{1}{2}f^3(x) - \frac{1}{2}f^2(0)f(x) \leqslant \frac{M}{2}[(\int_0^x f(t)dt)^2]'.$$

Với $x \in [0,1]$ ta có

$$-M\left(\int\limits_0^x f(x)dx\right)^2 \le \int\limits_0^x f^3(x)dx - f^2(0)\int\limits_0^x f(x)dx \le M\left(\int\limits_0^x f(x)dx\right)^2$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 5.6. Sử dụng quy tắc L'Hospital ta dễ thấy $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$. Do đó với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in (0,\delta)$ ta có $|x^x - 1| < \epsilon$. Vì thế với $n \ge \frac{1}{\delta}$ ta suy ra

$$\left|n^2\int_0^{\frac{1}{n}}(x^{x+1}-x)dx\right| \le n^2\int_0^{\frac{1}{n}}|x^{x+1}-x|dx \tag{6.4}$$

$$= n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x|x^x-1|dx < \epsilon n^2\int_0^{\frac{1}{n}} xdx = \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{\frac{1}{n}}(x^{x+1}-x)dx = 0,$$

hay

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1}dx = \lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{\frac{1}{n}} xdx = \frac{1}{2}.$$

Bài 5.7. Ta sẽ áp dụng hai bất đẳng thức hiển nhiên sau đây:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) \le \sqrt{a^2+b^2} \le a+b$$

với mọi $a, b \ge 0$. Đặt

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Vì $f'(x) \ge 0$ nên

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1(1+f'(x))dx \le L \le \int_0^1(1+f'(x))dx = 2.$$

Do đó $\sqrt{2} \le L \le 2$. Nếu $L = 2$ thì ta có

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = 1+f'(x)$$

với mọi $x \in [0,1]$; điều này dẫn đến $f'(x) = 0$ với mọi $x \in [0,1]$; vì thế f là hàm hằng. Điều này trái với giả thiết $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

Bài 5.8.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(2017^x+1)(1+x^2)} + \int_0^1 \frac{dx}{(2017^x+1)(1+x^2)} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(2017^{-x}+1)(1+(-x)^2)} + \int_0^1 \frac{dx}{(2017^x+1)(1+x^2)} \\ &= \int_0^1 \frac{2017^x dx}{(2017^x+1)(1+x^2)} + \int_0^1 \frac{dx}{(2017^x+1)(1+x^2)} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Bài 5.9. Xét hàm số $F(x) = xf(x)$, khi đó $F'(x) = f(x) + xf'(x)$ tại hầu hết $x \in [a,b]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = F(x)\Big|_a^b = bf(b) - af(a) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b xf'(x)dx.$$

Ta sẽ chứng minh :

$$\int\limits_a^b xf'(x)dx = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx.$$

Xét $I = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$, đặt $t = g(x) \to x = f(t) \to dx = f'(t)dt$ tại hầu hết $t \in [a,b]$. Từ đó $I = \int\limits_a^b tf'(t)dt = \int\limits_a^b xf'(x)dx$, và ta nhận được ĐPCM.

Bài 5.10. Đặt $g(x) := \int_0^x [f(t)]^2 dt$, $x \geq 0$. Khi đó, bởi giả thiết, ta có

$$g'(x) \geq [g(x)]^2, \quad \forall x \geq 0. \tag{6.6}$$

Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $g(x_0) > 0$. Khi đó $g(x) \geq g(x_0) > 0$ với mọi $x \geq x_0$. Do đó, bởi (6.6), hàm số sau

$$\varphi(x) := \frac{1}{g(x)} + x, \quad x \in [x_0, \infty),$$

đơn điệu giảm vì $\varphi'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} + 1 \leq 0$ với mọi $x \in [x_0, \infty)$. Tuy nhiên, điều này dẫn đến mâu thuẫn vì $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Vậy giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $g(x_0) > 0$ là sai, tức là

$$g(x) = \int_0^x [f(t)]^2 dt = 0$$

với mọi $x \geq 0$. Điều này dẫn đến rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \geq 0$.

Bài 5.11. Với mọi $x \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(\sqrt{x}) &= \textstyle\int_{\sqrt{x}}^x f'(t)dt = \int_{\sqrt{x}}^x tf'(t).\dfrac{1}{t}dt \\ &\geq \sqrt{x}f'(\sqrt{x}) \textstyle\int_{\sqrt{x}}^x \dfrac{1}{t}dt \quad \text{(Vì } xf'(x) \text{ là hàm tăng)} \\ &= \frac{\sqrt{x}f'\left(\sqrt{x}\right)\ln x}{2}. \end{aligned}$$

Chia hai vế cho x, ta thu được

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f'\left(\sqrt{x}\right)\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{f(\sqrt{x})}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int_1^{2017} \frac{f(x)}{x}dx \geq \int_1^{2017} \left(\frac{f'\left(\sqrt{x}\right)\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\right)dx = f\left(\sqrt{2017}\right)\ln(2017).$$

Bài 5.12. +) Trước hết ta chứng minh tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) = 0$. Thật vậy, giả sử ngược lại, do tính liên tục của hàm f ta suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0,1)$ $\big($hoặc $f(x) < 0$ với mọi $x \in (0,1)\big)$. Không mất tính tổng quát ta xét trường hợp $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0,1)$. Khi đó, $f(x) > 0$ với mọi $x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$. Đặt $m = \min\{f(x) | x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\} > 0$.
Ta có

$$\int\limits_0^1 f(x)dx > \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx \geq \frac{1}{2}m > 0 \quad \text{(trái giả thiết)}$$

+) Giả sử x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$. Khi đó kết hợp với tính liên tục của f và $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$, ta có $\begin{cases} f(x) < 0, & \forall x \in (0, x_0) \\ f(x) > 0, & \forall x \in (x_0, 1) \end{cases}$

(hoặc ngược lại)

Do đó, $(x-x_0)f(x) > 0, \quad \forall x \in (0,x_0) \cup (x_0,1)$. Từ đó $0 = \int\limits_0^1 xf(x)dx - x_0\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 (x-x_0)f(x)dx = \int\limits_0^{x_0}(x-x_0)f(x)dx + \int\limits_{x_0}^1 (x-x_0)f(x)dx > 0$

(mâu thuẩn)

Điều này chứng tỏ rằng $f(x)$ có ít nhất hai không điểm phân biệt trên khoảng $(0,1)$.

Bài 5.13. Ta có: $2+\cos x = 3\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$

Suy ra $\dfrac{1}{2+\cos x} = \dfrac{1}{3\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)}, \quad \forall x \in [0,\pi) \cup (\pi, 2\pi]$.

Vì vậy: $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx = \int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)}dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)}dx$

$\displaystyle = 2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{3+t^2} + 2\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dt}{3+t^2} = 2\Big(\frac{\arctan t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\arctan t}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{0}\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad \Big(t = \tan\frac{x}{2}\Big)$

Bài 5.14. Đặt $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Tích phân từng phần ra, ta được:

$$\int\limits_0^1 F(x)\,dx = -\int\limits_0^1 xf(x)\,dx.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\int\limits_0^{1/2} xf(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int\limits_0^{1/2} x^2dx\right)\left(\int\limits_0^{1/2} f^2(x)\,dx\right) = \frac{1}{24}\int\limits_0^{1/2} f^2(x)\,dx$$

$$\left(\int\limits_{1/2}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int\limits_{1/2}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx\right)\left(\int\limits_{1/2}^1 f^2(x)\,dx\right) = \frac{1}{24}\int\limits_{1/2}^1 f^2(x)\,dx.$$

Do đó:

$$\left(\int\limits_{1/2}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int\limits_0^{1/2} x\,f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{24}\int\limits_0^1 f^2(x)dx.$$

Mặt khác

$$\int\limits_0^{1/2} xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx - \int\limits_0^{1/2} F(x)\,dx,$$

và

$$\int\limits_{1/2}^{1} \left(x-\frac{1}{2}\right) f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1/2}^{1} F(x)dx.$$

Do đó

$$\frac{1}{24}\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geq \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} f(x)\ dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} F(x)\,dx\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} f(x)\ dx - \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} F(x)\,dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} f(x)\ dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} F(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} f(x)\ dx - \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} F(x)\,dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 F(x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 xf(x)\,dx\right)^2.$$

Bài 5.15. Ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^x tf'(t)dt + \int_x^1 (t-1)f'(t)dt.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
|f(\frac{1}{2})| &= \Big|\int_0^1 f(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} tf'(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(t)dt\Big| \\
&\leqslant \Big|\int_0^1 f(t)dt\Big| + \Big|\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(t)dt + \Big|\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(t)dt\Big| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^{\frac{1}{2}} |t||f'(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1||f'(t)|dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t)|dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|dt \\
&= \int_0^1 |f(t)|dt + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|dt = \int_0^1 \Big(|f(t)| + \frac{1}{2}|f'(t)|\Big)dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \Big|\int_0^1 f(t)dt + \int_0^x tf'(t)dt + \int_x^1 (t-1)f'(t)dt\Big|\\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^x |t||f'(t)|dt + \int_x^1 |t-1||f'(t)|dt\\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^x |f'(t)|dt + \int_x^1 |f'(t)|dt\\ &= \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f'(t)|dt = \int_0^1 \Big(|f(t)| + |f'(t)|\Big)dt, \forall x \in [0,1].\end{aligned}$$

Bài 5.16. Xét $f_1, f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ với $f_1(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ thì f_1 là hàm chẵn, f_2 là hàm lẻ, f_1f_2 là hàm lẻ và chúng đều liên tục. Khi đó ta có

$$\Big(\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx\Big)^2 = \Big(\int_{-1}^1 x^2[f_1(x) + f_2(x)]dx\Big)^2 = 4\Big(\int_0^1 x^2 f_1(x)dx\Big)^2$$

$$\Big(\int_{-1}^1 xf(x)dx\Big)^2 = \Big(\int_{-1}^1 x[f_1(x) + f_2(x)]dx\Big)^2 = 4\Big(\int_0^1 xf_2(x)dx\Big)^2$$

$$\frac{5}{2}\Big(\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx\Big)^2 + \frac{3}{2}\Big(\int_{-1}^1 xf(x)dx\Big)^2 = 10\Big(\int_0^1 x^2 f_1(x)dx\Big)^2 + 6\Big(\int_0^1 xf_2(x)dx\Big)^2$$

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 [f_1(x) + f_2(x)]^2 dx = 2\int_0^1 [f_1(x)]^2 dx + 2\int_0^1 [f_2(x)]^2 dx$$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy-Schwarz với $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục ta có

$$\int_0^1 [h(x)]^2 dx. \int_0^1 x^4 dx \geqslant \Big(\int_0^1 x^2 h(x)dx\Big)^2 \;\Rightarrow\; \int_0^1 [h(x)]^2 dx \geqslant 5\Big(\int_0^1 x^2 h(x)dx\Big)^2$$

$$\int_0^1 [h(x)]^2 dx. \int_0^1 x^2 dx \geqslant \Big(\int_0^1 xh(x)dx\Big)^2 \;\Rightarrow\; \int_0^1 [h(x)]^2 dx \geqslant 3\Big(\int_0^1 x^2 h(x)dx\Big)^2$$

Lấy $h(x) = f_1(x)$ và $h(x) = f_2(x)$ ta có

$$2\int_0^1 [f_1(x)]^2 dx + 2\int_0^1 [f_2(x)]^2 dx \geqslant 10\Big(\int_0^1 x^2 f_1(x)dx\Big)^2 + 6\Big(\int_0^1 xf_2(x)dx\Big)^2$$

Vậy ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh.
Nhận xét. Bằng cách tương tự có thể chứng minh bất đẳng thức tổng quát hơn

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^{2p} dx \geqslant \frac{4p+1}{2}\Big(\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx\Big)^2 + \frac{2p+1}{2}\Big(\int_{-1}^1 xf(x)dx\Big)^2.$$

với p là số nguyên dương lẻ.

Bài 5.17. Ta chứng tỏ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)^2 f''(x)dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-|x|)^2 f''(x)dx &= \int_{0}^{1}(1-|x|)^2[f''(x)+f''(-x)]dx\\ &= (1-x)^2[f'(x)-f'(-x)]\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (1-x)[f'(x)-f'(-x)]dx\\ &= 2(1-x)[f(x)+f(-x)]\Big|_0^1 + 2\int_0^1 [f(x)+f(-x)]dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx.\end{aligned}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân ta có

$$4\Big[\int_{-1}^{1} f(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_{-1}^{1}(1-|x|)^4dx\int_{-1}^{1}[f''(x)]^2dx$$

và dễ dàng thấy $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)^4dx = 2\int_0^1(1-x)^4dx = \frac{2}{5}$, nên ta suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Bài 5.18. Nếu $f(x)$ là hàm hằng số thì bài toán trở thành tầm thường. Nếu $f(x)$ là hàm tuyến tính ($f(x) = \alpha x + \beta, \alpha \neq 0$) thì mâu thuẫn với giả thiết $f'(a) = f'(b) = 0$. Áp dụng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $\phi(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2$ trên đoạn $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ ta có

$$\frac{8[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a},\ a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}.$$

Áp dụng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $\psi(x) = \frac{1}{2}(x-b)^2$ trên đoạn $[\frac{1}{2}(a+b), b]$ ta có

$$\frac{8[f(b) - f(\frac{a+b}{2})]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_2)}{\xi_2 - b},\ \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{8[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)]}{(b-a)^2} + \frac{8[f(b) - f(\frac{a+b}{2})]}{(b-a)^2} &= \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{\xi_2 - b},\\ \frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2} &= \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2) - f'(b)}{\xi_2 - b}.\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho $f'(x)$ ta được

$$\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}=f''(\eta_1),\ a<\eta_1<\xi_1,$$
$$\frac{f'(\xi_2)-f'(b)}{\xi_2-b}=f''(\eta_2),\ \xi_2<\eta_2<b.$$

Do đó

$$\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}=f''(\eta_1)+f''(\eta_2),$$
$$\frac{8}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|=|f''(\eta_1)+f''(\eta_2)|\leqslant|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|$$
$$\leqslant 2.\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}.$$

Như vậy tồn tại $c=\eta_1$ hoặc $c=\eta_2$ và $a<c<b$ thỏa mãn yêu cầu.

Bài 5.19. Ta có

$$0\leqslant\Big[\int_0^1 f(x)dx-\frac{m+M}{2}\Big]^2=\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2-(m+M)\int_0^1 f(x)dx+\Big(\frac{m+M}{2}\Big)^2$$
$$\Rightarrow\quad (m+M)\int_0^1 f(x)dx-mM\leqslant\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2+\Big(\frac{M-m}{2}\Big)^2.$$

Mặt khác

$$0\geqslant[f(x)-m][f(x)-M]=[f(x)]^2-(m+M)f(x)+mM,\forall x\in[0,1]$$
$$\Rightarrow\quad (m+M)\int_0^1 f(x)dx-mM\geqslant\int_0^1[f(x)]^2dx.$$

Suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Bài 5.20. Với mỗi $x\in[0,1]$, dùng khai triển Taylor ta được

$$f(t)=f(0)+f'(\alpha_z)t=f'(\alpha_x)t,$$
$$f(t)=f(1)+f'(\beta_x)(t-1)=f'(\beta_x)(t-1),$$

với $\alpha_x\in(0,x)$ và $\beta_x\in(x,1)$. Từ đó với mỗi $x\in[0,1]$ ta có

$$\Big|\int_0^1 f(x)dx\Big|=\Big|\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt\Big|\leqslant\Big|\int_0^x f(t)dt\Big|+\Big|\int_x^1 f(t)dt\Big|$$
$$\leqslant\int_0^x|f(t)|dt+\int_x^1|f(t)|dt=\int_0^x t|f'(\alpha_x)|dt+\int_x^1(1-t)|f'(\beta_x)|dt$$
$$\leqslant\int_0^x tdt+\int_x^1(1-t)dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^x+(t-\frac{t^2}{2})\Big|_x^1$$
$$=x^2-x+\frac{1}{2}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}.$$

Do $\min\limits_{x\in[0,1]}[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]=\frac{1}{4}$, đạt được tại $x=\frac{1}{2}$ ta suy ra $\Big|\int_0^1 f(x)dx\Big|\leqslant\frac{1}{4}$.

Bài 5.21. Đổi biến $t=u^3$ ta được

$$\frac{2}{3}\int_1^8 f(t)dt=2\int_1^2 u^2f(u^3)du=2\int_1^2 t^2f(t^3)dt.$$

Do đó từ điều kiện đề bài ta có

$$\int_1^2\Big([f(t^3)]^2+(t^2-1)^2+2f(t^3)-2t^2f(t^3)\Big)dt=0$$
$$\int_1^2\Big([f(t^3)]^2+(1-t^2)^2+2(1-t^2)f(t^3)\Big)dt=0$$
$$\int_1^2\Big([f(t^3)]+1-t^2\Big)^2dt=0.$$

Suy ra $f(t^3)+1-t^2\equiv 0,\forall t\in[1,2]$, hay $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-1,\forall x\in[1,8]$.

Bài 5.22. a) Trước hết ta có nhận xét

$$I(x)=\int_0^x e^{-at}\left[t+\cos(bt)\right]dt=I_1(x)+I_2(x)$$

trong đó:

$$I_1(x)=\int_0^x e^{-at}tdt, I_2(x)=\int_0^x e^{-at}\cos(bt)$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần, ta sẽ thu được:

$$I_1(x)=\frac{1}{a^2}-\frac{e^{-ax}}{a}\left(x+\frac{1}{a}\right)$$

$$I_2(x)=\int_0^x e^{-at}\cos(bt)dt=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left[b\sin(bx)-a\cos(bx)\right]+\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

Từ đó ta sẽ có:

$$I(x)=\frac{1}{a^2}+\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{e^{-ax}}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left[b\sin(bx)-a\cos(bx)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}I_1(x)=\frac{1}{a^2};\lim_{x\to\infty}I_2(x)=\frac{a}{a^2+b^2}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}I(x)=\frac{1}{a^2}+\frac{a}{a^2+b^2}$$

b) Theo tính chất đạo hàm theo cận trên biến thiên ta sẽ có:

$$I'(x)=e^{-ax}\left[x+\cos(bx)\right]$$

Bằng phương pháp quy nạp (hoặc dùng công thức Leibnitz) khi $n = 1, 2, , 3, \cdots$ ta sẽ thu được

$$\begin{aligned}
I^{(n+1)}(x) &= (e^{-ax}[x+\cos(bx)])^{(n)} = (xe^{-ax})^{(n)} + (xe^{-ax}\cos(bx))^{(n)} \\
&= x(e^{-ax})^{(n+1)} + n(e^{-ax})^{(n)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{-ax})^{(k)}(\cos(bx))^{(n-k)} \\
&= (n-ax)(-1)^n a^n e^{-ax} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k a^k e^{-ax}(b)^{(n-k)}\cos\left(x+(n-k)\tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= e^{-ax}\left[(n-ax)(-1)^n a^n + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k a^k (b)^{(n-k)}\cos\left(x+(n-k)\tfrac{\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Bài 5.23. *Cách 1:*

Xét hàm số: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\sin x}; x \neq \{0;\pi\}. \\ f'(0); x = 0 \\ -f'(\pi); x = \pi \end{cases}$.

Nhận thấy hàm g khả vi tại mọi điểm $x \in (0,\pi)$ và $f'(x) = g'(x)\sin x + g(x)\cos x$.

Do đó:

$$\int_0^\pi (f'(x))^2 dx = \int_0^\pi g(x)^2\cos^2 x dx + \int_0^\pi (g'(x))^2 \sin^2 x dx + 2\int_0^\pi g(x)g'(x)\sin x\cos x dx.$$

Tích phân từng phần suy ra:

$$2\int_0^\pi g(x)g'(x)\sin x\cos x dx = \int_0^\pi \left(g(x)^2\right)'\sin x\cos x dx = -\int_0^\pi g(x)^2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx.$$

Do đó:

$$\int_0^\pi (f'(x))^2 dx = \int_0^\pi \underbrace{g(x)^2\sin^2 x}_{f^2(x)} dx + \int_0^\pi (g'(x))^2\sin^2 x dx \geq \int_0^\pi f(x)^2 dx.$$

Từ đó suy ra đpcm.

Cách 2:

Ta có:

$$\int_0^\pi \left(f'(x) - f(x)g(x)\right)^2 dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \left(f'(x)\right)^2 dx \geq \int_0^\pi g(x)\, d\left(f^2(x)\right) - \int_0^\pi (f(x)g(x))^2 dx.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi \left(f'(x)\right)^2 \geq f^2(\pi)g(\pi) - f^2(0)g(0) - \int_0^\pi f^2(x)\left[g'(x) + g^2(x)\right]dx$$

Giờ chọn làm sao để thỏa mãn điều kiện:

$$g^{'}(x) + g^2(x) = -1 \Rightarrow g(x) = \cot x \quad \forall x \in (0; \pi).$$

6 Phương trình hàm

Bài 6.1. Đạo hàm hai vế theo ẩn y, ta có

$$f'(x+y) = \frac{y}{2}f''(x+\frac{y}{2}) + f'(x+\frac{y}{2}).$$

Thay $x = -\frac{y}{2}$, ta có

$$f'(\frac{y}{2}) = \frac{y}{2}f''(0) + f'(0).$$

Thay $x = 0$, ta có

$$f(y) = yf'(\frac{y}{2}) + f(0).$$

Khử $f'(\frac{y}{2})$ các hệ thức trên, ta nhận được

$$f(y) = y^2\frac{f''(0)}{2} + yf'(0) + f(0).$$

Hay

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Thử lại: Thỏa mãn.

Bài 6.2. Thay $x = y$, ta có

$$2xf''(2x) = 2f(x) \Rightarrow f''(t) = \frac{2}{t}f(\frac{t}{2}).$$

Do vậy, $f(x)$ khả vi vô hạn lần với mọi $t \neq 0$. Đạo hàm theo ẩn x, ta có

$$(x+y)f'''(x+y) + f''(x+y) = f'(x)$$

Đạo hàm theo ẩn y, ta có

$$(x+y)f'''(x+y) + f''(x+y) = f'(y)$$

Suy ra $f'(x) = f'(y)$ với mọi x, y và do vậy $f(x) = ax+b$. Thay $x = y = 0$, suy ra $f(0) = 0$ và $b = 0$. Thay $f(x) = ax$ vào giả thiết, ta có $a = 0$. Vậy, $f(x) = 0$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.3. Giả sử tồn tại hàm số thỏa yêu cầu bài toán. Thay $y = -x$, ta được:

$$xf(x) + xf(-x) = 2xf(0), \forall x \in \mathbb{R},$$

hay

$$f(x) - f(0) = -\left(f(-x) - f(0)\right).$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ thì g là hàm lẻ và thỏa

$$g(0) = 0 \quad \text{và} \quad xg(x) - yg(y) = (x-y)\, g\left(x+y\right), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Thay y bởi $-y$, ta được

$$xg(x) - yg(y) = (x+y)\, g\left(x-y\right) \tag{6.8}$$

Từ (6.7) và (6.8), ta được

$$(x-y)\, g\left(x+y\right) = (x+y)\, g\left(x-y\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $y+1$ ta được

$$g\left(2x+1\right) = (2x+1)\, g(1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x) = g(1)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và do đó $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 6.4. Cho $x = 0$ trong

$$f(2x) = 2f(x) \tag{6.9}$$

ta có $f(0) = 0$. Áp dụng (6.9) n lần ta được

$$f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right). \tag{6.10}$$

Vì f khả vi tại $x = 0$ nên

$$f(y) = my + \epsilon y, \tag{6.11}$$

trong đó $m = f'(0)$ và $\epsilon = \epsilon(y) \to 0$ khi $y \to 0$. Thay $y = \dfrac{x}{2^n}$ vào (6.11), kết hợp với (6.10) ta có

$$f(x) = 2^n\left(m\frac{x}{2^n} + \epsilon\frac{x}{2^n}\right) = mx + \epsilon x. \tag{6.12}$$

Cho $n \to \infty$, khi đó $\epsilon \to 0$, ta được $f(x) = mx$.

Bài 6.5. Đặt $g(x) = xf(x)$ thì phương trình trở thành $g(x) = g(x^x)$. Xét $x > 0$ bất kì.

- Nếu $0 < x \leq 1$, xét dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = x, \\ u_{n+1} = u_n^{u_n}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Ta có $g(u_{n+1}) = g(u_n^{u_n}) = g(u_n)$ nên $g(u_n) = g(u_{n-1}) = \cdots = g(u_1) = g(x)$ với mọi $n \geq 1$. Mặt khác, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ nên $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = g(1)$.

- Nếu $x > 1$, kí hiệu $s : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ là hàm số ngược của hàm số $r(x) = x^x$ trên $[1, +\infty)$ (s tồn tại vì r là hàm số đồng biến trên $[1, +\infty)$). Xét dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = x, \\ u_{n+1} = s(u_n), \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

$r(x) \geq x$ nên $s(x) \leq r(s(x)) = x$ với mọi $x \in (0, 1)$. Do đó (u_n) là dãy số không tăng và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ đến $l \in \mathbb{R}$ thỏa $l = s(l) \Rightarrow r(l) = r(s(l)) = l \Rightarrow l = 1$. Vậy $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = g(1)$.

Vậy g là hàm hằng. Suy ra các hàm số cần tìm là $f(x) = \dfrac{c}{x}$ với $c \in \mathbb{R}$.

Bài 6.6. Phương trình đã cho tương đương với

$$x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, ta có $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Ta cũng có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Do đó f có bảng biến thiên như sau:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & 0 & & 1 & & e & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & + & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & & & e^{-1} & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & \\
f(x) & & & 0 & & & & 0 \\
 & & \nearrow & & & & & \\
 & -\infty & & & & & &
\end{array}$$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm dương. Phương trình có đúng một nghiệm dương khi và chỉ khi

$$f(a) = \frac{\ln a}{a} \in (-\infty, 0] \cup \{e^{-1}\} \Leftrightarrow a \in (0, 1] \cup \{e\}.$$

Cũng từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{a\to+\infty} s(a) = 1$.

Bài 6.7. Đặt : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k [f(x+ky) - f(x-ky)]$. Khi đó: $|S_n - S_{n-1}| \leq |S_n| + |S_{n-1}| \leq 1$. Từ đó :

$$|a^n [f(x+ny) - f(x-ny)]| \leq 1 \to |f(x+ny) - f(x-ny)| \leq \frac{1}{a^n}.$$

Đặt $\begin{cases} u = x+ny \\ v = x-ny \end{cases} \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \dfrac{1}{a^n}$ với n tùy ý thuộc $\mathbb{N}^*$, từ đó suy ra

$$f(u) = f(v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Vậy f là hàm hằng . Thử lại, nếu f là hàm hằng ta luôn có bất đẳng thức.

Bài 6.8. Đặt $P(x,y)$ là mệnh đề $f(x+y^2) \geq (y+1) f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$P(x-1,-1) \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $y > 0$ thì

$$P\left(x+y^2, y\right) \Rightarrow f\left(x+2y^2\right) \geq (y+1) f\left(x+y^2\right) \geq (y+1)^2 f(x),$$

$$P\left(x+2y^2, y\right) \Rightarrow f\left(x+3y^2\right) \geq (y+1) f\left(x+2y^2\right) \geq (y+1)^3 f(x).$$

Bằng quy nạp ta thu được

$$f(x+ny^2) \geq (y+1)^n f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \forall n = 1, 2... \tag{2}$$

Từ (2), lấy $y = \dfrac{1}{n}$, ta được:

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2... \tag{3}$$

Sử dụng (3) liên tiếp ta thu được:

$$f\left(x+\frac{2}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n f\left(x+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} f(x)$$

$$\Rightarrow f\left(x+\frac{k}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} f(x) \Rightarrow f(x+1) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} f(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{f(x+1)}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, ... \tag{4}$$

Từ (4) cho $n \to +\infty$ ta được: $0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài 6.9. **Bổ đề**: Nếu hàm số $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và chỉ nhận các giá trị vô tỉ thì $g(x) = c$ với c là một hằng số nào đó.
Chứng minh Thật vậy, nếu không như vậy thì tồn tại các cặp số thực phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) sao cho $g(x_1) \neq g(x_2)$. Do tính chất liên tục của hàm g nên với số hữu tỉ $q \in (\min\{g(x_1), g(x_2)\}; \max\{g(x_1), g(x_2)\})$ cho trước, đều tồn tại $x_3 \in (x_1, x_2)$ để $g(x_3) = q$, điều này là không thể được vì g chỉ nhận giá trị vô tỉ. Vậy bổ đề được chứng minh. Theo bài ra hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện với $x \in \mathbb{R}$ số $f(x) + f\left(x + \frac{2017}{2}\right)$ là hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x + 11) + f(x + 4) + f(x + 2017)$ là số vô tỉ. Điều này tương đương với hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f\left(x + \dfrac{2017}{2}\right)$ là số vô tỉ khi và chỉ khi số $f(x + 11) + f(x + 4) + f(2017)$ là số hữu tỉ. Do vậy, cặp hàm

$$\begin{cases} h_1(x) = f(x) + f\left(x + \dfrac{2017}{2}\right) + f(x + 11) + f(x + 4) + f(2017) \\ h_2(x) = f(x) + f\left(x + \dfrac{2017}{2}\right) - f(x + 11) - f(x + 4) - f(2017) \end{cases}$$

là các hàm liên tục và luôn nhận giá trị vô tỉ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy theo nhận xét ở trên thì $h_1 \equiv c_1, h_2 \equiv c_2$ (với c_1, c_2 là các hằng số vô tỉ nào đó). Suy ra $f(x) + f\left(x + \dfrac{2017}{2}\right) = \dfrac{c_1 + c_2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (1) và vì vậy $f\left(x + \dfrac{2017}{2}\right) + f(x + 2017) = \dfrac{c_1 + c_2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (2).
Từ (1) và (2) cho ta $f(x) = f(x + 2017)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hay $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = x^{11} - 4x + 2017 - f(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $g(x)$ là hàm số xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ bị chặn. Ta có:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{11} - 4x + 2017 - f(x)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{11} - 4x + 2017 - f(x)\right) = -\infty.$$

Từ đây suy ra, tồn tại các số $n > 0, m < 0$ sao cho $g(n) > 0, g(m) < 0$. Vì hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(m).g(n) < 0$ nên theo định lý giá trị trung gian tồn tại $x_0 \in (n, m)$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay

$$x_0^{11} - 4x_0 + 2017 - f(x_0) = 0.$$

Bài 6.10. Từ a), thay $x = y$, ta có: $2f(x) - g(x) = f(x) - x \Rightarrow f(x) = g(x) - x;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Như vậy, giả thiết a) trở thành: $2(g(x) - x) - g(x) = (g(y) - y) - y \Rightarrow g(x) = 2x - 2y + g(y)\,\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Thay $y = 0$ và đặt $g(0) = b$, ta có $g(x) = 2x + b$, do đó: $f(x) = x + b$.

Thay biểu thức của f và g vào bất đẳng thức trong b), ta được

$$\begin{gathered}(x+b)(2x+b) \geq x+1 \quad \forall x \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (3b-1)x + b^2 - 1 \geq 0 \quad \forall x \\ \Leftrightarrow 0 \geq \Delta = (3b-1)^2 - 4.2\left(b^2 - 1\right) = b^2 - 6b + 9 \\ \Leftrightarrow b = 3\end{gathered}$$

Hiển nhiên các hàm $f(x) = x + 3; g(x) = 2x + 3$ thỏa mãn điều kiện b).

Không khó để chứng minh chúng cũng thỏa mãn điều kiện i).

Thật vậy, ta có: $2f(x) - g(x) = 2(x+3) - (2x+3) = 3$ và $f(y) - y = y + 3 - y = 3$. Vậy i) được thỏa mãn.

Vậy, tất cả các hàm số f và g cần tìm là: $f(x) = x + 3; g(x) = 2x + 3$.